Зборник радова Математичкої института, Нова серија, књ. 1 (9), 1976.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, № 1 (9), 1976.

Симпозијум КВАЗИГРУПЕ И ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
Symposium en QUASIGROUPES ET EQUATIONS FONCTIONNELLES
Београд—Нови Сад, 18—21. 9. 1974.

НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕЙ АССОЦИАТИВНОСТИ И ИХ СВЯЗ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ОБЩЕЙ АССОЦИАТИВНОСТИ НА АЛГЕБРЕ КВАЗИГРУПП

Янез Ушан

1. Введение

Речь идет о некоторых классах систем функциональных уравнений

$$\bigwedge_{j\in I} X_1[X_2(a_1^{|X_2|}),\ a_{|X_2|+1}^p]=X_{2j-1}[a_1^{j-1},\ X_{2j}(a_j^{j+|X_{2j}|-1}),\ a_{j+|X_{2j}|}^p], \tag{1}$$

и их отношений к функциональным уравнениям общей ассоциативности

$$X_{2s-1}[a_1^{s-1},\ X_{2s}(a_s^{s+|X_{2s}|-1}),\ a_{s+|X_{2s}|}^p]= \tag{2}$$
$$=X_{2j-1}[a_1^{j-1},\ X_{2j}(a_j^{j+|X_{2j}|-1}),\ a_{j+|X_{2j}|}^p]$$

на алгебре квазигрупп;

$$(\forall j\in N)\,(2\leqslant|X_{2j}|<p) \quad \text{и} \quad (\forall s\in N)\,(2\leqslant|X_{2s}|<p).$$

D: $I=\{2,\ldots,q\}\wedge|X_{2q}|=p-(q-1)$

A: $(\forall j\in N)\,(|X_{2j}|=|X_{2j-1}|=n)\wedge D$; $p=2n-1$, $q=n$

B: $(\forall j\in N)\,(|X_{2j-1}|=n\wedge|X_{2j}|=n+d)\wedge D$

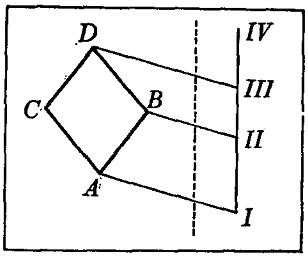
C: $(\forall j\in N)\,(|X_{2j}|=m\wedge|X_{2j-1}|=m+d)\wedge D$

I: $X_1[X_2(a_1^2),\ a_3^3]=X_3[a_1^1,\ X_4(a_2^3)]$

II: $X_1[X_2(a_1^n),\ a_{n+1}^{n+1}]=X_3[a_1^1,\ X_4(a_2^{n+1})]$

III: на пример $X_1[X_2(a_1^2),\ a_3^4]=X_3[a_1,\ X_4(a_2^4)]$

IV: уравнения общей ассоциативности (2).



Диагр. 1.

Диаграма 1 — диаграма систем функциональных уравнений, которые авторы работ [5]—[9] изучали или еще изучают, и их отношение к функциональным уравнениям общей ассоциативности (2), изученные В. Д. Белоусовым ([3], [4]). Самый общий случай систем функциональных уравнений на Диагр. 1 является система (D). Определена седующим образом: Это система (1) в которой $I=\{2, \ldots, q\}$ — множество натуральных чисел, начиная с 2, закончивается с q, а последняя операция с четным индексом имеет арность $|X_{2q}|=p-(q-1)$. Таким образом система (D) обладает некоторым свойством максимальности: j проходит все натуральные числа, начиная с 2, закончивая с q и каждая переменная из последовательности

$$a_1, \ldots, a_p$$

является переменной хотя бы в одной из операций с четным индексом. Система (A) — это система (D) в которой все операции имеют одну и ту же арность $n \in N \setminus \{1\}$. Система (B) — это система в которой все операции с нечетным индексом имеют арность $n \in N \setminus \{1\}$, а операции с четным индексом арность $n+d$. В системе (C) все операции с четным индексом имеют арность m, а все операции с нечетным индексом арность $m+d$; m, $m+d \in N \setminus \{1\}$.

I являются функциональным уравнением общей ассоциативности для бинарного случая, а IV самый общий случай функциональных уравнений общей ассоциативности, т. е. для любых арностей. II и III — это частные случай класса IV. В II X_1 и X_3 бинарные, а X_2 и X_4 n-арные операции; $n \in N \setminus \{1\}$. В III операции с четным индексом — отдельно — не имеют одну и ту же арность, но $q=2$, как и в случаях I и II. Они сразу являются и системами функциональных уравнений класса (D), как показывает настоящая диаграма 1. Это и является отношением функциональных уравнений общей ассоциативности (2) к системам функциональных уравнений общей ассоциативности класса (D).

Сейчас переидем к подробнейшем описании систем (A), (B) и (C).

2. Случай A ([6])

Система (A), как уже упомянуто, это система (D) в которой все операции имеют одну и ту же арность $n \in N \setminus \{1\}$. Задача решить эту систему. В этом направлении доказываются две теоремы. Первой теоремой является следующее положение.

Т. 1. Если n-квазигруппы A_i, $i \in N_{2n}$, удовлетворяют системе

$$(A) \qquad \bigwedge_{j \in \{2, \ldots, n\}} X_1[X_2(a_1^n), a_{n+1}^{2n-1}] = X_{2j-1}[a_1^{j-1}, X_{2j}(a_j^{j+n-1}), a_{j+n}^{2n-1}],$$

то справедливи равенства

$$(a) \qquad \begin{cases} A_{2j-1}(a_1^n) = A(\{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(1)} a_i\}_{i=1}^{j-1}, T_{2j-1}^{(j)} a_j, \{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(n)} a_i\}_{i=j+1}^{n}) \\ A_{2j}(a_1^n) = T_{2j-1}^{(j)^{-1}} A(\{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(1)} a_{i-j+1}\}_{i=j}^{n}, \{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(n)} a_{n+(i-j)}\}_{i=2}^{j}), \end{cases}$$

где

$$A(a_1^n) = B[B(\ldots(B(a_1, a_2), a_3), \ldots), a_n],$$

B — группа, и

$$T_i^{(i)} x = A_i(\overset{i-1}{k}, x, \overset{n-i}{k});$$

$k \in Q$ фиксированный элемент.

Т. 1. — один из полиадических аналогонов теоремы Белоусова о четырех квазигруппах.

Опись доказательства

Шаг 1. Определяются ретракции операции A_1 и A_2:

$$(c)\qquad \begin{cases} A_1^{(L,d)}(a_1^d) = A_1(a_1, \overset{n-d}{k}, a_2^d), \; A_1^{(R,d)}(a_1^d) = A_1(a_1^d, \overset{n-d}{k}), \\ A_2^{(L,d)}(a_1^d) = A_2(\overset{n-d}{k}, a_1^d), \; A_2^{(R,d)}(a_1^d) = A_2(a_1^d, \overset{n-d}{k}). \end{cases}$$

(Оказалось полезным, что „левую“ ретракцию операции $A_1 - A_1^{(L,d)}$ — надо определить фиксированием переменных слева, начиная с второй переменной, а для операции A_2 начиная с первой переменной.)

Шаг 2. Утверждается что

$$(d)\qquad (\forall i \in \{2, \ldots, n\}) \big(A_2^{(R,i)}(a_1^i) = T_1^{(1)^{-1}} A_1^{(R,i)(L,2)}[A_2^{(R,i-1)}(a_1^{i-1}), T_{2i}^{(n)^{-1}} T_{2i}^{(1)} a_i] \wedge$$
$$\wedge A_1^{(R,i)(L,2)}(x, y) = B(T_1^{(1)} x, T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(n)} y)\big),$$

где B одна и та же группа для всех $i \in \{2, \ldots, n\}$, построена через формулы теоремы Белоусова о четирех квазигруппах, на пример из равенства

$$A_1^{(L,2)}[A_2^{(L,2)}(x, y), z] = A_{2n-1}[\overset{n-2}{k}, x, A_{2n}(y, \overset{n-2}{k}, z)].$$

Шаг 3. Учитывая (d), впервые, получаем (a) для $\underline{A_2}$, A_{2n-1}, $\underline{A_1}$ и A_{2n} (в том же порядке).

Шаг 4. Доказывается что справедливо

$$(\forall i \in N_n)(T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(n)} k = T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(1)} k = e);$$

e — единица группы B из (d), $k \in Q$ — в доказательстве Т. 1. используется один и тот же k.

Шаг 5. Из формул для A_1 и A_2 (полученне в 3. шаге), учитывая результат из 4. шага, впервые получаем формулы для

$$A_1^{(L,d)}, A_1^{(R,d)}, A_2^{(L,d)}, A_2^{(R,d)},$$

а затем, так как

$$A_{2j-1}(a_1^n) = A_1^{(L,n-j+1)}[A_2^{(R,j)}(a_1^{j-1}, T_{2j}^{(1)^{-1}} a_j), a_{j+1}^n]$$

и подобно для A_{2j}, получаем формулы (a).

Учитывая Т. 1,, находим, что справедлива и

Т. 2. Координаты любого решения системы (A) получаются через формулы

$$A_{2j-1}(a_1^n)=A(\alpha_1^{j-1}a_1^{j-1},\ \beta_j a_j,\ \alpha_{j+n}^{2n-1}a_{j+1}^n),$$
$$A_{2j}(a_1^n)=\beta_j^{-1}A(\alpha_j^{j+n-1}a_1^n);$$

$\alpha_i,\ \beta_j\in Q$! A — n-группа обладающая единицей, определена через некоторую группу B образом

$$A(a_1^n)=B[B(\ldots(B(a_1,\ a_2),\ a_3),\ldots),\ a_n].$$

3. Случай B*) ([8])

Система (B), как уже упомянуто, это система (D) в которой все операции с четным индексом имеют арность

$$n+d\in N\setminus\{1\},\quad d\in N,$$

а операции с нечетным индексом имеот арность $n\in N\setminus\{1\}$. Задача решить эту систему. В этом направлении доказываются две теоремы. Первой теоремой является Т. 1′, т. е. следующее положение:

Т. 1′. Если квазигруппы A_i, $i\in N_{2n}$, удовлетворяют системе

$$(B)\qquad \bigwedge_{j\in\{2,\ldots,n\}} X_1[X_2(a_1^{n+d}),\ a_{n+d+1}^{2n+d-1}]=X_{2j-1}[a_1^{j-1},\ X_{2j}(a_j^{j+n+d-1}),\ a_{j+n+d}^{2n+d-1}],$$

то

$$(\overline{a}_1)\qquad A_{2j-1}(a_1^n)=A(\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_1\}_{i=1}^{j-1},\ T_{2j-1}^{(j)}a_j,\ \{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(n+d)}a_i\}_{i=j+1}^{n}),$$

$$(\overline{a}_2)\qquad A_{2j}(a_1^{(n+d)})=T_{2j-1}^{(j)-1}A(\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_{i-j+1}\}_{i=j}^{n-1},$$
$$T_1^{(1)}D(a_{n-j+1}^{n-j+1+d}),\ \{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(n+d)}a_{n+(i-j)+d}\}_{i=2}^{j}),$$

где A построена через группу B как в Т. 1., B построена как в Т. 1.**), а

$$D(a_1^{d+1})=A_2(\overset{n-1}{k},\ a_1^{d+1}).$$

(Т. 1′., как и Т. 1., является одним из полиадических аналогонов теоремы Белоусова о четырех квазигруппах.)

Примечание 1.

Если в (B) положим $d=0$, то (B) превращается в (A) и ($\overline{a}_1$) в первую из формул (a) — непосредственно. Факт, что при $d=0$ ($\overline{a}_2$) превращается в вторую из формул (a), получим следующим образом. Для $d=0$

$$D(a_1^{d+1})=A_2(\overset{n-1}{k},\ a_1^{d+1})$$

превращается в $T_2^{(n)}a_1$, Отсюда, так как

$$T_1^{(1)}T_2^{(n)}=T_{2n-1}^{(n)}T_{2n}^{(1)},$$

---

*) Самое первое внимание на систему (B) и систему (C) мне обращено от Г. Чупона.

**) См. опись доказательства — шаг 2.

последовательность

$$\{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(1)} a_{i-j+1}\}_{j=1}^{n-1}$$

продолжается с членом $T_{2n-1}^{(n)} T_{2n}^{(1)} a_n$, т. е. превращается в первую последовательность из второй формулы (a). Последняя последовательность в $(\overline{a_2})$ при $d=0$ превращается в последнюю (вторую) последовательность второй формулы (a).

Опись доказательства

Шаг 1. Если в $(\overline{B})$ — (B) в которую положены A_i — положим $a_{n+1} = \cdots = a_{n+d} = k$, учитывая, что, в только что построеной системе $(\bar{A})$, $T_{2j}^{(t)}$ является $T_{2j}^{(t+d)}$ если $t > n-(j-1)$, находим формулы $(\overline{a_1})$; на оснований Т. 1.

Шаг 2. Если в $(\overline{B})$ положим

$$a_1 = \cdots = a_{j-1} = a_{j+n+d} = \cdots = a_{2n+d-1} = k,$$

учитывая формулу для A_1 и результат 4. шага из доказательства Т. 1., получаем

$$(\bar{c}) \qquad A_{2j}(a_1^{n+d}) = T_{2j-1}^{(j)-1} \overset{j-1}{B} [T_1^{(1)} A_2^{(L,n+d-j+1)}(a_1^{n+d-j+1}), \{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(n+d)} a_{n+d+(i-j)}\}_{i=2}^{j}],$$

где

$$\overset{j-1}{B}(a_1^j) = B[B(\ldots(B(a_1^2), a_3), \ldots), a_j];$$

B — группа, построена способом из доказательства Т. 1.

Шаг 3. Если положим $(\bar{a}_1)$ и $(\bar{c})$ в $(\overline{B})$, а затем

$$a_{n+d+1} = \cdots = a_{2n+d-1} = k,$$

учитывая результат 4. шага из доказательства Т. 1., получаем

$$(\bar{\bar{c}}) \qquad T_1^{(1)} A_2(a_1^{n+d}) = \overset{j-1}{B} [\{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(1)} a_i\}_{i=1}^{j-1}, T_1^{(1)} A_2^{(L,n+d-j+1)}(a_j^{n+d})].$$

Если в $(\bar{\bar{c}})$ положим $j=s$ и $j=s+1$, можно получить

$$(d) \qquad A_2^{(L,n+d-j+1)}(a_1^{n+d-j+1}) = $$
$$= T_1^{(1)-1} \overset{n-j}{B} [\{T_{2i-1}^{(i)} T_{2i}^{(1)} a_{i-j+1}\}_{i=j}^{n-1}, T_1^{(1)} A_2^{(L,d+1)}(a_{n-j+1}^{n+d-j+1})].$$

Шаг 4. Если (d) положим в $(\bar{c})$, находим формулы для $A_{2j}, j \in \{1, \ldots, n\}$. Учитывая Т. 1'., находим, что справедливо и положение:

Т. 2'. Координаты любого решения системы (B) получаем из формул

$$A_{2j-1}(a_1^n) = A(\alpha_1^{j-1} a_1^{j-1}, \beta_j a_j, \alpha_{j+n}^{2n-1} a_{j+1}^n),$$
$$A_{2j}(a_1^{n+d}) = \beta_j^{-1} A[\alpha_j^{n-1} a_1^{n-j}, D(a_{n-j+1}^{n-j+1+d}), \alpha_{n+1}^{j+n-1} a_{n-j+d+2}^{n+d}];$$

$\alpha_i, \beta_j \in Q!$, A—любая n-арная группа обладающая единицей (определена через некоторую группу B), D—любая квазигруппа арности $d+1$.

4. Случай C ([9])

Система (C), как уже упомянуто, это система (D)-в которой все операции с нечетным индексом имеют арность

$$n+d\in N\diagdown\{1\},\ d\in N,$$

а операции с четным индексом имеют арность $n\in N\diagdown\{1\}$. Задача решить эту систему. В этом направлении доказываются две теоремы. Первой теоремой является Т. 1.″, т.е. следующее положение:

Т. 1″. Если квазигруппы A_i, $i\in N_{2(n+d)}$, удовлетворяют

$$\text{(C)}\qquad \widehat{j\in\{2,\ldots,n+d\}}\ X_1[X_2(a_1^n),\ a_{n+1}^{2n+d-1}] = X_{2j-1}[a_1^{j-1},\ X_{2j}(a_j^{j+n-1}),\ a_{j+n}^{2n+d-1}],$$

то

$$(\bar{\bar{a}}_1)\qquad A_{2j-1}(a_1^{n+d}) = \overset{n+d-1}{B}\left(\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_i\}_{i=1}^{j-1},\ T_{2j-1}^{(j)}a_j,\ \{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(n)}a_i\}_{i=j+1}^{n+d}\right),$$

$$(\bar{\bar{a}}_2)\qquad A_{2j}(a_1^n) = T_{2j-1}^{(j)^{-1}}\overset{n-1}{B}\left(\{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(1)}a_{i-j+1}\}_{i=1}^{n},\ \{T_{2i-1}^{(i)}T_{2i}^{(n)}a_{n+(i-j)}\}_{i=2}^{j}\right),$$

где B онда и та же группа, построена как в Т. 1*.

(Т. 1., Т. 1.′ и Т. 1.″ являются, отдельно, полиадическими аналогонами теоремы Белоусова о четырех квазигруппах).

Примечание 2.

Если в (C) положим $d=0$, то (C) непосредственно превращается в (A), а $(\bar{\bar{a}}_1)$ и $(\bar{\bar{a}}_2)$, таким же образом, в формулы (a).

Опись доказательства

Шаг 1. Построены s-ретракции системы равенств $(\bar{C})$ (—это (C) в которую положени A_i):

$$(\bar{b})\qquad \widehat{i\in N/\{1\}}\ A_{2s-1}[\overset{s-1}{k},\ A_{2s}(a_s^{s+n-1}),\ a_{s+n}^{s+2n-2},\ \overset{d-s+1}{k}] = A_{2(s+i-1)-1}[\overset{s-1}{k},\ a_s^{s+i-2},\ A_{2(s+i-1)}\,a_{s+i-1}^{s+i+n-2},\ a_{s+i+n-1}^{s+2n-2},\ \overset{d-s+1}{k}],$$

s-фиксированный элемент множества $\{1,\ldots,d+1\}$.

Системы $(\bar{b})$ являются системами случая (A). Учитывая Т. 1., доказывается, что

$$(\forall s\in\{1,\ldots,d+1\})\ ({}^{(s)}\overset{n-1}{B} = \overset{n-1}{B}),$$

и отсюда, учитывая связ между главноизотопними группами и результат из 4. шага доказательства Т. 1., что

$$(\forall s\in\{1,\ldots,d+1\})\ ({}^{(s)}B = B);$$

${}^{(s)}B$ — группа, построена образом из 2. шага описи доказательства Т. 1., принадлежащая к s-ретракции $(\bar{b})$.

(Этим создана возможность получения формул $(\bar{\bar{a}}_2)$.)

---

*) См. опись доказательства — шаг 2.

Ш а г 2. Утверждается, что все A_{2j-1} изотопны между собой.

Ш а г 3. Определяется ретракция

$$A^{(R,i)}_{2i-1}(\overset{i}{a_1}) = A_{2i-1}(\overset{i}{a_1}, \overset{n+d-i}{k}).$$

Ш а г 4. Из $(\bar{b})$ для $s=1$, на основании Т. 1., получаем формулы (a) для $A^{(R,n)}_{2n-1}$.

Ш а г 5. В последовательности

$$(\bar{\bar{d}}) \qquad A^{(R,n)}_{2n-1}, A^{(R,n+1)}_{2(n+1)-1}, \ldots, A^{(R,n+d)}_{2(n+d)-1} = A_{2(n+d)-1},$$

начиняя с $A^{(R,n)}_{2n-1}$ (формула полученная в 4. шаге), впервые получается формула для $A^{(R,n+1)}_{2(n+1)-1}$, а затем, таким же образом получаются (по очереди) формулы для всех операций из $(\bar{\bar{d}})$.

Ш а г 6. Так как в 5. шаге получена формула для

$$A_{2(n+d)-1},$$

учитывая 2. шаг, получаются и формулы $(\bar{\bar{a}}_1)$.

Вот на примере.

$$\boxed{\mathrm{I}}$$

$$A_1[A_2(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5, x_6, x_7] =$$

$$\boxed{\mathrm{II}}$$

$$A_3[x_1, A_4(x_2, x_3, x_4), x_5, x_6, x_7] =$$

$$\boxed{\mathrm{III}}$$

$$A_5[x_1, x_2, A_6(x_3, x_4, x_5), x_6, x_7] =$$

$$A_7[x_1, x_2, x_3, A_8\ x_4, x_5), x_6)\ x_7] =$$

$$A_9[x_1, x_2, x_3, x_4, A_{10}(x_5, x_6)\ x_7)] =$$

1—ретракция получается из I рамки, для $x_6 = x_7 = k$;

2—ретракция получается из II рамки, для $x_1 = x_7 = k$;

3—ретракция получается из III рамки, для $x_1 = x_2 = k$.

Формула для $A^{(R,3)}_5$ получается из 1—ретракции (на основании Т. 1.), а для $A^{(R,4)}_7$ из равенства

$$A^{(R,4)}_7[x_1, x_2, x_3, A_8(x_4, x_5, k)] = A^{(R,3)}_5[x_1, x_2, A_6(x_3, x_4, x_5)].$$

Так как формулы для A_6, A_8 и $A^{(R,3)}_5$ уже получены, отсюда, поставляя по очереди формулы для A_6, A_8 и $A^{(R,3)}_5$ и $x_5 = k$, учитывая и 4. шаг из описи доказательства Т. 1, получаем формулу для $A^{(R,5)}_9 = A_9$.

Учитывая Т. 1''., находим, что справедлива и

Т. 2''. Координаты любого решения системы (C) получается из формул

$$A_{2j-1}(a_1^{n+d}) = \overset{n+d-1}{B}\left(\{\alpha_i a_i\}_{i=1}^{j-1},\ \beta_j a_j,\ \{\alpha_{i+n} a_{i+1}\}_{i=j}^{n+d}\right),$$
$$A_{2j}(a_1^n) = \beta_j^{-1}\ \overset{n-1}{B}\left(\{\alpha_i a_{i-j+1}\}_{i=j}^{j+n-1}\right);$$

$\alpha_i,\ \beta_j \in Q!$, B—любая группа.

5. О общих формулах для (a), ($\bar{a}$) и ($\bar{\bar{a}}$)

Интересным является следующий факт: формулы ($\bar{a}_1$) и ($\bar{a}_2$) могуть стать формулами ($\bar{\bar{a}}_1$) и ($\bar{\bar{a}}_2$), если положим:

$$(n) \qquad E\,[a_1^{j-1},\ F(a_j^{j+d}),\ a_{j+d+1}^{p+d}] \underset{=}{\overset{\text{def}}{=}} \bar{E}\,(a_1^{j+d},\ a_{j+d+1}^{p+d}),$$

когда $d<0$; E и $\bar{E}$, по очереди, арности p и $p+d$, являются суперпозициями одной и той же группе B. В самом деле:

1°. из $m=n+d<n\in N$ следует, что система (B) превращается в систему (C), а ($\bar{a}_1$) превращается в ($\bar{\bar{a}}_1$); и

2°. Учитывая (n) и $m=n+d<n\in N$, из ($\bar{a}_2$) получаем ($\bar{\bar{a}}_2$) – $T_1^{(1)}\,D\,(a_{n-j+1}^{n-j+1+d})$ превращается в пустую последовательность, а первая последовательность из ($\bar{a}_2$) превращается в первую последовательность из ($\bar{\bar{a}}_2$).

Что формулы ($\bar{a}$)—могут стать формулами (a)—это уже рассмотрено в Примечании 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоусов В. Д., *Ассоциативные системы квазигрупп*, УМН 13 (1958), 243.

[2] Белоусов В. Д., *Системы квазизрупп с обобщенными тождествами*, Т. 20, вып. 1 (121), 1965, 75—146.

[3] Белоусов В. Д., *n-Арные квазигруппы*, „Штиница", Кишинев, 1972.

[4] Belousov V. D., *Balanced identities in algebra of quasigroups*, University of Waterloo, Canada 1971.

[5] Ушан Я., *n-Арный аналогон теоремы Белоусова о четырех квазигруппах*, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од СР Македонија, кн. XXI, 5—17.

[6] Ушан Я., *Об одной системе функциональных уравнений общей n-арной ассоциативности на алгебре n-арных квазигрупп*, Math. Balk., 2 (1972), 288—295.

[7] Ушан Я., *Об точности с которой определены группа и подстановки в решении системы функциональных уравнений*

$$\underset{j\in\widehat{\{2,\dots,n\}}}{} X_1\,[X_2(a_1^n),\ a_{n+1}^{2n-1}] = X_{2j-1}\,[a_1^{j-1},\ X_{2j}(a_1^{j+n-1}),\ a_{j+n}^{2n-1}],$$

Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 17 (31), 1974, pp. 173—182.

[8] Ушан Я., Дйонин В., *Решение системы фенкциональных уравнений на алгебре квазигрупп*,

$$\underset{j\{\widehat{\in 2,\dots,n}\}}{} X_1\,[X_2(a_1^{n+d}),\ a_{n+d+1}^{2n+d-1}] = X_{2j-1}\,[a_1^{j-1},\ X_{2j}(a_j^{j+n+d-1}),\ a_{j+n+d}^{2n+d-1}].$$

Мат. весник 11 (26), св. 3, 1974.

[9] Дйонин В., *Решение системы функаиональных уравнений.*

$$\underset{j\in\widehat{\{2,\dots,n+d\}}}{} X_1\,[X_2(a_1^n),\ a_{n+1}^{2n+d-1}] = X_{2j-1}\,[a_1^{j-1},\ X_{2j}(a_j^{j+n-1}),\ a_{j+n}^{2n+d-1}].$$

Мат. весник, 12 (27), св. 2, 1975.