Зборник радова Математичког института, Нова серија, књ. 1 (9), 1976.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, № 1 (9), 1976.

Симпозијум КВАЗИГРУПЕ И ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
Symposium en QUASIGROUPES ET EQUATIONS FONCTIONNELLES
Београд—Нови Сад, 18—21. 9. 1974.

ÜBER EINIGE FORMALE ASPEKTE DER DYNAMIK (DIVIDIERBARKEIT UND ANALYTISCHE ITERATION KONTRAHIERENDER BIHOLOMORPHER ABBILDUNGEN)

Ludwig Reich

§ 1. Einleitung. Zusammenstellung bekannter Ergebnisse

In meiner Arbeit [1] habe ich einen Zusammenhang zwischen der Existenz m-ter Wurzeln einer kontrahierenden biholomorphen Abbildung F (vgl. die Definitionen in [1] oder [2]) und der Existenz einer analytischen Iteration von F hergestellt. Dieser Zusammenhang konnte gewonnen werden mittels der Methode der sogenannten vollständigen Linearisierung von F (vgl. [1], [3]). m-te Wurzel von F war dabei eine formal-biholomorphe Abbildung G (— die sich als eo ipso lokal-biholomorph herausstellt —) für deren m-te Iterierte G^m gilt $F = G^m$. Für diese *Funktionalgleichung* und ihre lange Geschichte vgl. etwa [4]. Unter einer analytischen Iteration von F versteht man die Einbettung von F in einen einparametrigen Lie'schen Gruppenkeim

$$F_t = x \to x(t) = A(t)\,x + \mathfrak{R}(t, x)$$

mit dem additiven Gruppenparameter t, der Substitution als Gruppenoperation und den Randbedingungen

$$F_0 = id, \quad F_1 = F.$$

Der in [1] ausgesprochene Zusammenhang zwischen der Existenz m-ter Wurzeln und der Existenz analytischer Iteration von F lautet nun;

Satz: (i) *Es mögen für unendlich viele $m \in \mathrm{N}$ m-te Wurzeln $F^{\frac{1}{m}}$ von F existieren.*

(ii) *Die vollständigen Linearisierungen von $F^{\frac{1}{m}}$, $L(F^{\frac{1}{m}})$ mögen alle ein und derselben analytischen Iteration $L(F)$ angehören.*

Behauptung: Dann existiert eine analytische Iteration $F(t)$ von F, für die außerdem gilt $F\left(\frac{1}{m}\right) = F^{\frac{1}{m}}$.

Es ist nun zunächst das Ziel der vorliegenden Arbeit, in einer Reihe von Sätzen zu untersuchen, wie weit die Voraussetzungen dieses Satzes abgeschwächt oder durch andere ersetzt werden können. Im einzelnen: Es wird z.B. in Satz 1 (§ 2) gezeigt, daß man u.U. die Voraussetzung der Existenz m-ter Wurzeln durch die Voraussetzung der Existenz „$^{l}/_{m}$-ter Wurzeln“, d.h. von Abbildung $F^{l/m}$ für die $(F^{l/m})^m = F^l$, $l \in \mathbf{N}$, gilt, ersetzen kann. Hingegen geht es in Satz 2 (§ 1) darum, die Voraussetzung (ii) abzuändern. Hier kann z.B. die mehr algebraische Voraussetzung getroffen werden, daß für jedes U aus dem Kommutator von $L(F)$ (in der Gruppe der linearen Automorphismen) jedes $U^{-1} \circ L(F^{1/m}) \circ U$ die Varietät der vollständigen Linearisierung, $L(\mathbf{C}^n)$, als ganzes invariant läßt.

In einigen weiteren Sätzen (§ 3) wird das Verfahren der vollständigen Linearisierung dazu benutzt, zu untersuchen, was die Existenz stetiger Flüsse oder stetig differenzierbarer Flüsse, in die F eingebettet ist, für die Existenz analytischer Iterationen impliziert, (Satz 3, Satz 4). Z.B. impliziert die Einbettbarkeit von F in einen einparametrigen, stetig differenzierbaren Fluß die Existenz einer analytischen Iteration (Satz 3).

Die Einbettbarkeit in eine kontinuierliche einparametrige Gruppe F_r hat die Existenz einer analytischen Iteration zur Konsequenz, wenn z.B. noch gefordert wird, daß für eine in $\mathbf{R}$ dicht liegende Menge von ρ die Linearisierungen $L(F_\rho)$ alle ein und derselben analytischen Iteration von $L(F)$ angehören (Satz 4).

In § 4 werden wir uns schließlich der Frage zuwenden, wann es m-te Wurzeln $F^{1/m}$ von F gibt zu vorgegebenen Bestimmungen $\rho_i^{1/m}$ der Eigenwerte des Linearteils von $F^{1/m}$ (Satz 5). Auch dies geht über das Verfahren der vollständigen Linearisierung, und man erhält ein algebraisches Existenzkriterium. Schließlich werden wir zeigen, daß es genügt, die Existenz von hinreichend, aber *endlich vielen* m-ten Wurzeln von F vorauszusetzen, wenn es um die Frage geht, ob eine vorgegebene analytische Iteration $\mathfrak{F}_t$ von $L(F)$ aus linearen Abbildungen das Bild einer analytischen Iteration F_t von F ist:

$$\mathfrak{F}_t = L \circ F_t \circ L^{-1}, \quad \text{ob also } \mathfrak{F}_t$$

eine analytische Iteration von F „fortsetzt“. Das wird in Satz 8, Satz 9 behandelt.

Wir beenden diesen Paragraphen mit einer Zusammenstellung der wichtigsten Tatsachen über die vollständige Linearisierung.

Die vollständige Linearisierung einer kontrahierenden Abbildung F bedeutet (vgl. [3]): Es existiert eine biholomorphe, sogar birationale, überall bireguläre Abbildung L des $\mathbf{C}^n$ auf eine analytische (sogar algebraische Varietät $L(\mathbf{C}^n) = \mathfrak{R} \subset \mathbf{C}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $L \circ F \circ L^{-1}$ ist die Einschränkung genau eines linearen Automorphismus $L(F)$ von $\mathbf{C}^N$ auf $\mathfrak{R}$, bei dem $\mathfrak{R}$ invariant bleibt.

2) Ist G eine mit F kommutierende formal-biholomorphe Abbildung mit Fixpunkt $x = 0$, dann ist auch $L \circ G \circ L^{-1}$ die Einschränkung genau eines linearen Automorphismus $L(G)$ des $\mathbf{C}^N$ auf $\mathfrak{R}$, bei dem $\mathfrak{R}$ invariant bleibt.

3) Die Koeffizienten der Matrix $M(L(G))$, falls dabei die gegeben kontrahierende Abbildung G in halbkanonischer vorliegt, sind Polynome in den Koeffizienten der Potenzreihe G, d.h. ihrer polynomialen halbkanonischen Formen; ebenso sind die Koeffizienten der Potenzreihen in G Polynome in den Elementen von $M(L(G))$. Die Eigenwerten von F und $L(F)$ stimmen überein, abgesehen von den Multiplizitäten.

4) Einer analytischen Iteration von F entspricht durch den Übergang $F_t \to L(F_t)$ eine eineindeutig bestimmte analytische Iteration der linearen Abbildung $L(F)$, dabei sind die $L(F_t)$ lineare Abbildungen, sie lassen $\mathfrak{R}$ fest (F_t, vgl. [1], ist nämlich mit F vertauschbar, also vollständig linearisierbar).

Wir zeigen noch, daß jede formale m-te Wurzel $F^{1/m}$ eines lokalbiholomorphen kontrahierenden F lokal biholomorph ist:

Jede formale m-te Wurzel eines lokal-biholomorphen kontrahierenden F ist eo ipso konvergent. Jede rationale Iterierte $F^{l/m}$, d.h. eine formal-biholomorphe Abbildung $F^{l/m}$ mit $(F^{l/m})^m = F^l$, $l \in \mathbf{Z}$, ist eo ipso konvergent.

Beweis: Es gilt $F^{-1/m} \circ F \circ ^{1/m} = F^{-1/m} \circ (F^{1/m})^m \circ F^{1/m} = F$, also ist $F^{1/m}$ mit F vertauschbar. Es sei nun T eine konvergente Transformation von F auf halbkanonische Form. Dann ist $T^{-1} \circ F^{1/m} \circ T$ m-te Wurzel von $T^{-1} \circ F \circ T$, also nach [5], bzw. [1], selbst polynomial, also konvergent. Da T konvergent ist, trifft dies auch für $T \circ (T^{-1} \circ F^{1/m} \circ T) \circ T^{-1} \doteq F^{1/m}$ zu. Da nun F^l ebenfalls mit F vertauschbar ist, so wird es durch das obige T auf polynomisch vereinfachte Gestalt transformiert, und es folgt auch für $F^{l/m}$ analog, da es mit F^l vertauschbar ist, daß es durch T auf polynomische Gestalt transformiert wird. Somit ist auch $F^{1/m}$ konvergent.

Im übrigen sei ausdrücklich darauf verwiesen, daß wir hier den Inhalt und die Methoden der Arbeit [1] als bekannt voraussetzen werden und sets auf die von uns benötigten Stellen verweisen werden.

§ 2. Dividierbarkeit uud analytische Iteration

Als Verallgemeinerung des in der Einleitung zitierten Satzes aus der Arbeit [1] beweisen wir zunächst:

Satz 1: a) *Es mögen für unendlich viele rationale mod 1 inkongruente l/m ($l>0$, $m>0$) rationale Iterierte $F^{l/m}$ existeren.*

b) *Für $l>1$ seien dieses $F^{l/m}$ mit F vertauschbar, und die dann eo ipso existierenden $L(F^{1/m})$ mögen einer und derselben analytischen Iteration von $L(F)$ angehören.*

Dann existiert eine analytische Iteration $F(t)$ von F und es ist $F(l/m) = F^{l/m}$.

Beweis: Es existiere für ein $l/m\, F^{l/m}$, und es sei $l/m = [l/m] + k/m$, $0 \leqslant k/m < 1$. Nach Voraussetzung bilden die k/m eine unendliche Menge. Wir setzen $F^{k/m} = F^{l/m} \circ F^{-[l/m]}$. Es gilt mit der Bezeichnung $F^{-k/m} = (F^{k/m})^{-1}$:

$$F^{-k/m} \circ F \circ F^{k/m} = F^{-l/m} \circ F^{[l/m]} \circ F \circ F^{-[l/m]} \circ F^{l/m} = F^{-l/m} \circ F \circ F^{l/m} = F,$$

also existiert auch $L(F^{k/m})$, und diese $L(F^{k/m})$ gehören ebenfalls der analytischen Iteration an, zu der die $L(F^{1/m})$ gehören, wegen

$$L(F^{k/m}) = L(F^{l/m - [l/m]}) = L(F^{l/m}) \circ$$
$$L(F^{-[l/m]}) = L(F^{l/m}) \circ \left(L(F^{[l/m]})^{-1}\right).$$

Wir gehen von einer halbkanonischen Form von F aus, und nehmen an, die Elemente der analytischen Iteration von $L(F)$, $\mathfrak{F}_t$, seien gegeben durch $\xi \to M(t)\xi$. Dabei sind die Elemente von $M(t)$, wie aus [1] bekannt, ganze Funktionen von t. Es seien $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_s = 0$ die Gleichungen der algebraischen

Varietät $\mathfrak{R}$, ξ sei ein allgemeiner Punkt von $\mathfrak{R}$. Auf Grund von [2] bedeutet dies, daß die Koordinaten ξ_i von ξ Potenzprodukte der Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ sind. Nun hat $L(F^{k/m})$ als Element der analytischen Iteration die Darstellung $\xi \to M(k/m)\xi$, wie man leicht nachrechnet, $L(F^{k/m})$ läßt $\mathfrak{R}$ invariant, und wir haben wie in [1], für den allgemeinen Punkt ξ von $\mathfrak{R}: \Phi_1(M(k/m)\xi) = 0, \ldots, \Phi_s(M(k/m)\xi) = 0$ für die unendlich vielen k/m mit $0 \leqslant k/m < 1$. Wie in [1], p. 13—19, schließen wir nun daraus mit Hilfe des Identitätssatzes für analytische Funktionen, daß die Varietät $\mathfrak{R}$ auch bei der allgemeinen Abbildung $\xi \to M(t)\xi$ der analytischen Iteration von $L(F)$ festbleibt. Die Anwendung des Identitätsprinzips beruht dabei auf der Existenz eines Häufungspunktes der Menge der k/m, in dessen Umgebung die Elemente von $M(t)$ holomorph sind. Wie in [1] wird nun geschlossen, daß F in angegebener Weise eine analytische Iteration besitzt.

Die Bedingung, daß alle $F^{l/m}$ einer und derselben analytischen Iteration von $L(F)$ angehören müssen, wird in folgendem Satz durch eine mehr algebraische Bedingung ersetzt werden.

Satz 2: a) *Für unendlich viele* $1/m$ *existieren m-te Wurzeln* $F^{1/m}$ *von F.* b) *Für jedes U aus dem Kommutator von* $L(F)$ *lasse der lineare Automorphismus* $U^{-1} \circ L(F^{1/m}) \circ U \mathfrak{R}$ *invariant.* c) *Die* $L(F^{1/m})$ *mögen analytischen Iterationen von* $L(F)$ *zu den gleichen von m unabhängigen Bestimmungen der Logarithmen* $\ln \rho_i$ *der Eigenwerte von* ρ_i *angehören.*

Dann existiert eine analytische Iteration von F, $F(t)$, *und es gilt* $F(1/m) = F^{1/m}$.

Beweis: Wie in [1] gezeigt wurde, werden sämtliche analytische Iterationen $\mathfrak{F}_t$ von $\mathfrak{F} = L(F)$ zu festen Bestimmungen der $\ln \rho_i$ gegeben durch $U^{-1} \circ \mathfrak{F}_t \circ U$, wobei U die Automorphismen mit $U^{-1} \circ \mathfrak{F} \circ U$, det $U = 1$, durchläuft, und $\mathfrak{F}_t$ eine beliebige feste analytische Iteration zu diesen Bestimmungen $\ln \rho_i$ bezeichnet. Es sei also ein solches $\mathfrak{F}_t$ fest gewählt. Nach Voraussetzung gehört $L(F^{1/m})$ einer analytischen Iteration ${}_{1/m}\mathfrak{F}_t$ von $L(F)$ zu den fest gewählten Bestimmungen $\ln \rho_i$ an. Somit existiert ein ${}_{1/m}U$ aus dem Kommutator mit $({}_{1/m}U)^{-1} \circ {}_{1/m}\mathfrak{F}_t \circ {}_{1/m}U = \mathfrak{F}_t$. Dies bedeutet, daß $({}_{1/m}U^{-1}) \circ L(F^{1/m}) \circ {}_{1/m}U$ der fest gewählten analytischen Iteration $\mathfrak{F}_t$ angehört. Außerdem läßt nach Voraussetzung $({}_{1/m}U^{-1}) \circ L(F^{1/m}) \circ {}_{1/m}U$ invariant. Mit der schon in [1] verwendeten Schlußweise, ergibt sich also die Existenz einer analytischen Iteration $\mathfrak{F}_t$ von $L(F)$, die $\mathfrak{R}$ invariant läßt, somit existiert auch die angegebene analytische Iteration von F.

§ 3. Kontinuierliche Gruppen und analytische Iteration

Dieser § ist der Frage gewidmet, was die Einbettbarkeit von F in einparametrige stetig differenzierbare oder gar nur kontinuierliche Gruppen für die Existenz analytischer Iterationen impliziert.

Satz 3: $F = F_1$ *besitze eine Einbettung in eine einparametrige reelle additive stetig differenzierbare Gruppe* F_r $(r \in \mathbf{R})$ *von lokalbiholomorphen Abbildungen mit Fixpunkt* $x = 0$.

Dann existiert eine analytische Iteration $F(t)$ *von F, sodaß* F_r *Untergruppe derselben mit* $F(r) = F_r$ *ist.*

Beweis: Da die Gruppe additiv ist, gilt $F \circ F_r = F_{1+r} = F_{r+1} = F_r \circ F$, also existiert $L(F_r)$. Da die Elemente der Matrizen der $L(F_r)$ Polynome in den

Koeffizienten der F_r sind, handelt es sich bei $L(F_r)$ um eine stetig differenzierbare Gruppe von Matrizen. Bezeichnet $\cdot$ die Ableitung nach dem Gruppenparameter r, so folgt

$$\dot{L}(F_r)=\dot{L}(F_r)\Big|_{r=0} L(F_r), \quad r\in\mathbf{R}.$$

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialsysteme folgt aber, daß es sich bei $L(F_r)$ sogar um eine einparametrige Liesche Gruppe handelt, da die Lösungen eo ipso holomorph ausfallen. Ihre Elemente seien mit $\mathfrak{F}_t$, $t\in\mathbf{C}$, bezeichnet. Speziell ist $\mathfrak{F}_r=L(F_r)$ für $r\in\mathbf{R}$. Für unendlich viele $t=r$, die sich etwa in $r=1$ häufen, gilt diese obige Relation. Verwendet man nun wieder die Beweismethode von [1], p. 14—19, d.h. die Betrachtung gewisser die Invarianz von $\mathfrak{R}$ ausdrückender analytischer Gleichungssysteme, so ergibt sich, im wesentlichen mittels des Identitätssatzes für analytische Funktionen, die Existenz einer analytischen Iteration F_t von F, der $\{F_r\,|\,r\in\mathbf{R}\}$ als Untergruppe angehört.

Hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen kontinuierlichen einparametrigen Gruppen (stetigen Flüssen) und analytischen Iterationen zeigen wir:

Satz 4: a) *Es besitze F eine Einbettung in einen stetigen reellen Fluß, d.h. eine einparametrige, additive, reelle, kontinuierliche Gruppe $\{F_r,\ r\in\mathbf{R}\}$. Es sei* P *eine Teilmenge von* $\mathbf{R}$, *sodaß es unendlich viele* mod 1 *inkongruente* $\rho\in$ P *gibt und sodaß* $\{l\rho\,|\,\rho\in \mathrm{P},\ l\in\mathbf{Z}\}$ *dicht in* $\mathbf{R}$ *ist.*

b) *Für unendlich viele* mod 1 *inkongruente* ρ *mögen die* $L(F_\rho)$ *ein und derselben analytischen Iteration* $\mathfrak{F}_t$ *von* $L(F)$ *angehören.*

Dann besitzt F eine analytische Iteration $F(t)$, mit F_r als Untergruppe von $F(t)$.

Beweis: $L(F_r)$ existiert. Denn es ist $F_{1+r}=F_{r+1}=F\circ F_r=F_r\circ F$. Es sei $\{\rho\}=\rho-[\rho]$. Nach Voraussetzung besitzen diese $\{\rho\}$, $\rho\in$ P, einen Häufungspunkt in $[0, 1]$, und es gehören die $L(F_{\{\rho\}})=L(F_\rho)\circ L(F_{-[\rho]})$ alle der analytischen Iteration $\mathfrak{F}_t$ an. Nach der aus [1] übernommenen Beweismethode, das analytische Gleichungssystem zu betrachten, das die Invarianz von $\mathfrak{R}$ ausdrückt, und den Identitätssatz anzuwenden, ergibt sich wieder, daß eine analytische Iteration $F(t)$ von F existiert, mit $F(\rho)=F_\rho$, $\rho\in$ P, somit auch $F(\{\rho\})=F_{\{\rho\}}$, $F(l\rho)=F_{l\rho}$. Es sei $r\in\mathbf{R}$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Folge ρ_k, $\rho_k\in$ P, und zugehörige $l_k\in\mathbf{Z}$, sodaß $r=\lim\limits_{k\to\infty} l_k\rho_k$. Da die Gruppe der F_r kontinuierlich ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} F(l_k\rho_k)=F(r).$$

Da aber $F_{r_{k\rho k}}=F(l_k\rho_k)$, so folgt $F(r)=F_r$. W.z.bw.

Wir halten noch fest:

Folgerung: a) *Es besitze F eine Einbettung in einen stetigen Fluß F_r.* b) *Für ein irrationales ρ möge $L(F\rho)$ einer analytischen Iteration $\mathfrak{F}_t$ von $L(F)$ angehören.*

Dann existiert eine analytische Iteration $F(t)$ von F, und es gilt $F(\rho)=F_\rho$.

Beweis: Für irrationales ρ sind die Zahlen $\{m\rho\}$ dicht in $[0, 1]$, (vgl. [6]), und es gehören auch alle $L(F_{\{m\rho\}}) = L(F_{m\rho}) \circ L(F_{-[m\rho]})$ der analytischen Iteration $\mathfrak{F}_t$ an. Außerdem ist $\{l\{m\rho\} \mid l \in \mathbf{Z},\ m \in \mathbf{Z}\}$ dicht in $\mathbf{R}$. Somit sind auch die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt, und die Folgerung ist bewiesen.

§ 4. Existenz m-ter Wurzeln

Wir behandeln hier die in der Theorie der Funktionalgleichungen seit langem studierte Funktionalgleichung von BABBAGE für kontrahierende biholomorphe Abbildung F. Gesucht ist eine lokal biholomorphe Abbildung G mit

$$G^m = F.$$

Es ist nicht bekannt, ob jedes F für jedes m eine m-te Wurzel besitzt. Die Eigenwerte des Linearteils von $F^{1/m}$ sind $\rho_1^{1/m}, \dots, \rho_n^{1/m}$, mit gewissen Bestimmungen der m-ten Wurzeln der Eigenwerte $\rho_1, \dots, \rho_n$ von F. Es zeigt nun ein einfaches Beispiel, auf dessen Detaildiskussion wir verzichten dürfen, daß es Abbildungen F gibt, daß nicht für jedes m und jede Wahl der $\rho_1^{1/m}, \dots, \rho_n^{1/m}$ eine m-te Wurzel $F^{1/m}$ existiert. Sind nämlich μ_1, μ_2 komplexe Zahlen mit $0 < |\mu_i| < 1$ und der Relation $\mu_2 = -\mu_1^{\nu}$, und setzen wir $\rho_1 = \mu_1^2$, $\rho_2 = \mu_2^2$, so liegt

$$F: \quad \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \rho_1 x_1 \\ x_1^{(2)} &= \rho_2 x_2 + a x_1^{\nu}, \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

in Normalform vor, und es zeigt sich, daß keine Abbildung $F^{1/2}$ existiert, deren Linearteil die Eigenwerte $\rho_1^{1/2} = \mu_1$, $\rho_2^{1/2} = \mu_2$ aufweist.

Wir beginnen mit folgenden Bemerkungen, deren Beweis auf Grund von [1], § 3, fast trivial ist, und daher ausgelassen werde.

1) Die Eigenwerte von $F^{1/m}$ sind Bestimmungen $\rho_1^{1/m}, \dots, \rho_n^{1/m}$.

2) Jede lineare Abbildung $A: x \to Ax$, $\det A \neq 0$, besitzt für jedes $m \in \mathrm{N}$, m-te Wurzeln und diese ergeben sich, indem man in einer geeigneten analytischen Iteration A_t von A für $t = 1/m$ das Element $A_{1/m}$ herausfaßt.

Es sei nun $L(F) = \mathfrak{F}$ die vollständige Linearisierung von F. $\mathfrak{F}_t$ sei eine analytische Iteration von $L(F)$, zu den Bestimmungen $(\ln \rho_1)_0, \dots, (\ln \rho_n)_0$ der Logarithmen $\rho_1, \dots, \rho_n$ und zu einem Parameter η der irreduziblen Parametermannigfaltigkeit (vgl. [1], § 3). Falls F die m-te Wurzel $F^{1/m}$ besitzt, dann ist, da L ein Isomorphismus ist, $L(F^{1/m})$ m-te Wurzel von $L(F)$, und es ist nach Bemerkung 2.) in einer analytischen Iteration $\mathfrak{F}_t$ von $\mathfrak{F}$, etwa der gegebenen, als $\mathfrak{F}_{1/m}$ enthalten. Wir werden dann sagen: $F_{1/m}$ gehöre zu $(\ln \rho_1)_0, \dots, (\ln \rho_n)_0; \eta$. Es gilt nun aber $\mathfrak{F}_{1/m} = L(F^{1/m})$ für ein $F^{1/m}$ genau dann, falls $\mathfrak{F}_{1/m}$ die Varietät $\mathfrak{R}$ der Linearisierung als ganzes invariant läßt. Es sei nun ξ ein allgemeiner Punkt von $\mathfrak{R}$. Drückt man es durch Gleichungen aus, daß auch $\mathfrak{F}_{1/m}\ \xi$ ein Punkt von $\mathfrak{R}$ ist, so erhält wie in [1], p. 14—19, ein System von ganz rationalen Relationen

$$\psi_1(\varphi) = 0, \dots, \psi_\sigma(\varphi) = 0,$$

wo bei $\varphi_{\alpha\beta}$ die Elemente der Matrix $\mathfrak{F}_{1/m}$ bezeichnet. Aus [1], § 3, folgt daß die $\varphi_{\alpha\beta}$ ihrerseits Polynome in den Elementen von $L(F)$, also auch den Koeffizienten von F und außerdem in Parametern $(\eta_1, \ldots, \eta_l)$ aus der Parametermannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ sind. Die

$$(1) \qquad \psi_1(p, \eta) = 0, \ldots, \psi_N(p, \eta) = 0$$

und $\mathfrak{M}$ hängen dabei von $(\ln \rho_1)_0, \ldots, (\ln \rho_n)_0$ allein ab. Für die Existenz eines $F^{1/m}$ zu $(\ln \rho_1)_0, \ldots,) \ln \rho_n$, η erhalten wir daher als notwendige und hinreichende Bedingung das Bestehen ganz-rationaler Relationen, wobei p die Koeffizienten von F (bis zur maximalen Ordnung des Zusatzmonoms) bezeichnet und $\eta \in \mathfrak{M}$ ist. Somit

Satz 5: *Notwending und hinreichend für die Existenz eines $F^{1/m}$ zu $1/m(\ln \rho_1)_0, \ldots, 1/m(\ln \rho_n)_0$ ist das Bestehen der Relationen* (1) *mit einem geeigneten $\eta \in \mathfrak{M}$. Die $\psi_1, \ldots, \psi_N$ und $\mathfrak{M}$ hängen nur ab von den gewählten Bestimmungen der Logarithmen von $L(F)$.*

Daraus ergibt sich unmittelbar.

Satz 6: *Es gibt kontrahierende Abbildungen F mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Wahl von $(\ln \rho_1)_0, \ldots, (\ln \rho_n)_0$ und zu jedem $\mathring{\eta} \in \mathfrak{M}$ existieren höchstens für endlich viele $m \in \mathbf{N}$ m-te Wurzeln $F^{1/m}$ zu $(\ln \rho_1)_0, \ldots, (\ln \rho_n)$, $\mathring{\eta}$.*

Satz 7: *Es gibt Normalformen $\mathcal{G}$ linearer Abbildungen und natürliche Zahlen m, daß die Polynome* (1) *nicht identisch verschwinden, u.zw. für jede Wahl von $(\ln \rho_1)^0, \ldots, (\ln \rho_n)^0$.*

Der Beweis dieser Sätze ergibt sich unmittelbar aus dem Einleitung zitierten Satz über den Zusammenhang der unendlichen Dividierbarkeit mit der analytischen Iteration.

Wir kommen nun nochmals auf diesen Zusammenhang zurück, insbesondere auf den zitierten Satz. Die Voraussetzung (ii) dieses Satzes besagt in der Sprechweise dieses Paragraphen, daß alle $F^{1/m}$ zu einer und derselben Bestimmung $(\ln \rho_1)^0, \ldots, (\ln \rho_n)^0$ und einem η gehören, eben zu diesen, die die analytische Iteration von $L(F)$ gemäß [1] festlegen. Es ist also das in diesem § konstruierte Gleichungssystem, das ja auch von $1/m$ abhängt, für unendlich viele $m_1, m_2 \ldots$ richtig. Mit $\mathfrak{a}_{m_i}$ bezeichne ich nun das von den Polynomen von (1) für $1/m_i$ erzeugte Ideal und betrachte die aufsteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_{m_1} \subseteq (\mathfrak{a}_{m_1}, \mathfrak{a}_{m_2}) \subseteq (\mathfrak{a}_{m_1}, \mathfrak{a}_{m_2}, \mathfrak{a}_{m_3}) \subseteq \ldots .$$

Diese ist stationär, d.h. es existiert ein k_0, sodaß

$$\mathfrak{a}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{m_{k_0}}) = (\mathfrak{a}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{m_{k_0}+l})$$

für alle $l > 0$. Das bedeutet aber, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen für die Existenz der m_{k+l_0}-ten Wurzeln F^{1/m_0} erfüllt sind, sobald $F^{1/m_1}, \ldots, F^{1/m_{k_0}}$ existieren. m_{k_0} ist dabei abhängig von $\mathcal{G}$, $(\ln \rho_1)_0, \ldots, (\ln \rho_n)_0$, η, d.h. von der analytischen Iteration von $L(F)$, $\mathfrak{F}_t$, und von der Folge $m = (m_1 < m_2 < \cdots)$. Wir können daher formulieren:

Satz 8: *Es sei* $\mathfrak{F}_t$ *eine gegebene analytische Iteration von* $L(F)$, $m=(m_1<m_2<\cdots)$ *eine unendliche Folge natürlicher Zahlen. Dann existiert eine natürliche Zahl* $n_0(\mathfrak{F}_t, m)$, *sodaß* $\mathfrak{F}_t$ *das L-Bild einer analytischen Iteration von F ist* $\mathfrak{F}_t = L \circ F_t \circ L^{-1}$, *falls nur Wurzeln* $F_{1/m_1}, \ldots, F_{1/m_k}$ *mit* $k>n_0$ *existieren, deren* $L(F_{1/m_j})$ *zu* $\mathfrak{F}_t$ *gehört.*

Speziell:

Satz 9: *Es sei* $\mathfrak{F}_t$ *eine gegebene analytische Iteration von* $L(F)$. *Dann existiert eine natürliche Zahl* $n_0(\mathfrak{F}_t)$ *so daß* $\mathfrak{F}_t$ *das L-Bild einer analytischen Iteration von F,* $F(t)$ *ist, sofern nur Wurzeln* $F_{1/2}, \ldots, F_{1/k}$ *für* $k>n_0$ *existieren, deren* $L({}_{1/m})$ *zu* $\mathfrak{F}_t$ *gehört.*

LITERATUR

[1] Reich, L.: *Über analytische Iteration linearer und kontrahierender biholomorpher Abbildungen*, Ber. Ges. Math. Datenverarb. Bonn, Nr. 42 (1971).

[2] Peschl E., Reich L.: *Beispiel einer kontrahierenden biholomorphen Abbildung ohne Einbettung in eine einparametrige Liesche Transformationsgruppe*, Sitz.—ber. Bayer. Akad. Wiss. Math. — Naturw. Klasse 1971. 82—93 (1971).

[3] Peschl E., Reich L.: *Eine Linearisierung kontrahierender biholomorphe Abbildungen und damit zusammenhängender analytischer Differentialsysteme*, Monatsh. für Math. 75, 153—162 (1971).

[4] Ware B.: *The Siegel Centerstable Theorem in Hilbert Space*, University of California, Santa Cruz 1973 (vgl. insbesondere den historischen Überblick). Auch erschienen als: Ber. d. Math. — Stat. Sektion, Farschungszentrum Graz, N. , 1975.

[5] Peschl E., Reich L.: *Kanonische Normalformen biholomorpher Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt des 3*, Math. Z. 111, 333—349, 1969.

[6] Hardy G. H., Wright E. M.: *Einführung in die Zahlentheorie*, München, Oldenbourg 1958.

Anschrift des Verfassers:
Ludwig Reich
II. Mathematisches Institut
der Universität Graz
A-8010 Graz
Steyrergasse 17