Зборник радова Математичкої института, Нова серија књ. 1 (9), 1976.
Recueil des travaux de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, № 1 (9), 1976.

Симпозијум КВАЗИГРУПЕ И ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ
Symposium en QUASIGROUPES ET EQUATIONS FONCTIONNELLES
Београд—Нови Сад, 18—21. 9. 1974.

NORMENQUADRAT ÜBER GRUPPEN

M. Hosszu, M. Csikós

Beschäftigen wir uns mit der folgenden Funktionalgleichung:

$$f(xy)+f(xy^{-1})=2f(x)+2f(y) \quad x,\ y\in G; \quad f: G\to A \tag{1}$$

wo $G(\cdot)$ ist eine Gruppe, $A(+)$ ist eine Abelsche Gruppe. Das Einheitselement von G ist e, y^{-1} ist das Inverselement von y. Das Nullelement von A ist 0, und nehmen wir an, dass aus $f(x)+f(x)=0$ d. h. aus $2f(x)=0$ $f(x)=0$ folgt.

Die Eigenschaften der Funktion f:

Wenn in der Gleichung (1) $y=e$ gesetzt wird, bekommen wir

$$f(e)=0.$$

Aus $x=e$ folgt, dass

$$f(y)=f(y^{-1}).$$

Setzen wir y statt x und x statt y ein, und auf Grund von $f(xy^{-1})=$ $=f[(xy^{-1})^{-1}]=f(yx^{-1})$ bekommen wir

$$f(xy)=f(yx).$$

Definition: Es sei

$$F(x,\ y)=f(x)+f(y)-f(xy).$$

M. Hosszu hat den folgenden Satz bewiesen

Wenn G eine mit Elementen a und b erzeugbare Gruppe ist, dann die Lösung der Gleichung (1) hat den Gestalt:

$$f(x)=f(a^{l_1}b^{m_1}a^{l_2}b^{m_2}\dots a^{l_p}b^{m_p})=f(a)\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)^2+f(b)\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)^2-$$
$$-F(a,\ b)\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right),$$

wo die Funktionenwerte $f(a)$, $f(b)$ und $f(ab)$ beliebige Elementen der Gruppe A sind.

Jetzt wird die Gruppe G durch drei Elemente a, b und c erzeugt.

D e f i n i t i o n. Es sei

$$F(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z) - f(xy) - f(xz) - f(yz) + f(xyz).$$

H i l f s a t z 1. *Für* $x = a^l b^m c^n$ l, m, n *sind ganze Zahlen* $f(x)$ *hat den Gestalt:*

$$f(x) = f(a^l b^m c^n) = l^2 f(a) + m^2 f(b) + n^2 f(c) - lmF(a, b) - lnF(a, c) - \\ - mnF(b, c) + lmnF(a, b, c). \tag{2}$$

Wir beweisen die Gleichung (2) mit Induktion. Wenn die Werte von l, m, n 0 oder l sind, dann die Gleichung (2) gilt offensichtlich. Nehmen wir an, dass die Gleichung (2) für irgendwelche Werte der Exponenten m, n zusammen mit $l-1$ und auch mit l gilt. Wir beweisen, dass die Gleichung (2) auch für $l+1$ gilt.

Aus (1) folgt

$$f(a^{l+1} b^m c^n) = f(a \cdot a^l b^m c^n) = 2f(a) + 2f(a^l b^m c^n) - f(a c^{-n} b^{-m} a^{-l}) = \\ = 2f(a) + 2f(a^l b^m c^n) - f(a^{l-1} b^m c^n).$$

Wir haben die Eigenschaften der Funktion f benützt. Auf Grund der Induktionsbedingung folgt daraus, dass die Gleichung (2) zusammen mit Exponentenwerten m und n auch für $l+1$ gilt.

Damit sind wir fertig für nichtnegative ganze Exponentenwerten l, m, n, denn wir können mit zyklischer Permutation der Veränderlichen die Exponenten der Elemente b und c vergrössern. Die Induktion ist ganz ähnlich für ganze negative Exponenten.

Wir brauchen mehrere Faktoren mit Form $a^l b^m c^n$ ein beliebiges Element der Gruppe G herzustellen. Für zwei Faktoren es gilt:

$$f(a^{l_1} b^{m_1} c^{n_1} a^{l_2} b^{m_2} c^{n_2}) = 2f(a^{l_1} b^{m_1} c^{n_1}) + 2f(a^{l_2} b^{m_2} c^{n_2}) - \\ - f(a^{l_1-l_2} b^{m_1} c^{n_1-n_2} b^{-m_2}) = 2f(a^{l_1} b^{m_1} c^{n_1}) + 2f(a^{l_2} b^{m_2} c^{n_2}) - \\ - 2f(a^{l_1-l_2} b^{m_1}) - 2f(b^{m_2} c^{n_2-n_1}) + f(a^{l_1-l_2} b^{m_1+m_2} c^{n_2-n_1}).$$

Hieraus bekommen wir auf Grund der Gleichung (2), dass das gleich mit

$$(l_1 + l_2)^2 f(a) + (m_1 + m_2)^2 f(b) + (n_1 + n_2)^2 f(c) - (l_1 + l_2)(m_1 + m_2) F(a, b) - \\ - (l_1 + l_2)(n_1 + n_2) F(a, c) - (m_1 + m_2)(n_1 + n_2) F(b, c) + \\ + [(l_1 + l_2)(m_1 + m_2)(n_1 + n_2) - 2l_1 m_2 n_1 - 2l_2 m_1 n_2] F(a, b, c) \quad \text{ist.}$$

Man kann vom Koeffizient des Gliedes $F(a, b, c)$ sehen, dass die Analogie zur Gruppe mit zwei erzeugenden Elemente nicht vollkommen ist. Man kann auch sehen, dass im Allgemeinen $f(abc) \neq f(acb)$, also wir können die Faktoren im Argument der Funktion f ohne Änderung des Funktionenwertes beliebig nicht vertauschen.

Für $x=a^{l_1}b^{m_1}c^{n_1}a^{l_2}b^{m_2}c^{n_2}\dots a^{l_p}b^{m_p}c^{n_p}$ die Funktion $f(x)$ hat den Gestalt:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)^2 f(a)+\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)^2 f(b)+\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right)^2 f(c)-\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)F(a,b)-\\ &-\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right)F(a,c)-\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right)F(b,c)+\\ &+\left[\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} n_i\right)-2S_p(l_1m_1n_1l_2m_2n_2\dots l_pm_pn_p)\right]F(a,b,c),\end{aligned} \tag{3}$$

wo

$$S_p(l_1m_1n_1l_2m_2n_2\dots l_pm_pn_p)=\sum_{i=1}^{p} l_i\sum_{j=1}^{p-1} m_{i+j}\sum_{k=1}^{j} n_{i+k-1} \qquad p=2,3,\dots$$

Hier soll man die Indexen mod p reduzieren.

Der Beweis geht mit Induktion für p, mit einfacher Rechnung.

Wir haben den Funktionenwert

$$f(a^{l_1}b^{m_1}c^{n_1}a^{l_2}b^{m_2}c^{n_2}\dots a^{l_p}b^{m_p}c^{n_p}),$$

also für beliebige $x\in G$ den Ausdruck des Funktionenwertes $f(x)$ mit Hilfe der sieben Funktionenwerte $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(ab)$, $f(ac)$, $f(bc)$, $f(abc)$ bekommen. Wir beweisen, dass diese sieben Funktionenwerte voneinander unabhängig sind.

Es sei

$$x=a^{l_1}b^{m_1}c^{n_1}\dots a^{l_p}b^{m_p}c^{n_p}$$

und

$$y=a^{r_1}b^{s_1}c^{t_1}\dots a^{r_q}b^{m_q}c^{n_q},$$

wo die Exponenten sind ganze Zahlen, p und q sind positive ganze Zahlen.

Wir substituieren x und y in die Gleichung (1), und zuerst kontrollieren wir die Gleichheit der Koeffizienten von $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $F(a,b)$, $F(a,c)$, $F(b,c)$ an der beiden Seiten der Gleichung (1). Wir bekommen:

$$\begin{aligned}&f(a^{l_1}b^{m_1}c^{n_1}\dots a^{l_p}b^{m_p}c^{n_p}a^{r_1}b^{s_1}c^{t_1}\dots a^{r_q}c^{m_q}c^{n_q})+\\ &+f(a^{l_1}b^{m_1}c^{n_1}\dots a^{l_p}b^{m_p}c^{n_p}c^{-t_q}b^{-s_q}a^{-r_q}\dots c^{-t_1}b^{-s_1}a^{-r_1})=\\ &=2f(a^{l_1}b^{m_1}c^{n_1}\dots a^{l_p}b^{m_p}c^{n_p})+2f(a^{r_1}b^{s_1}c^{t_1}\dots a^{r_q}b^{s_q}c^{t_q})\end{aligned}$$

und mit Hilfe der Gleichung (3) für die Glieder mit $f(a)$:

$$f(a)\left[\left(\sum_{i=1}^{p} l_i+\sum_{j=1}^{q} r_j\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{p} l_i-\sum_{j=1}^{q} r_j\right)^2\right]=f(a)\left[2\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)^2+2\left(\sum_{j=1}^{q} r_j\right)^2\right]$$

Quadrieren wir an der linken Seite! Die Gleichung gilt offensichtlich. Daraus folgt mit den Vertauschungen

$$l_i\to m_i \qquad (i=1,2,\dots,p) \quad \text{und} \quad r_j\to s_j \qquad (j,=1,2,\dots,q),$$

dass die Koeffizienten des Funktionenwertes $f(b)$ an beiden Seiten der Gleichung (1) gleich sind. Mit ähnlichen Vertauschungen folgt, dass auch die Koeffizienten des Funktionenwertes $f(c)$ gleich sind. Noch einmal mit Hilfe der Gleichung (3) bekommen wir:

$$-F(a,b)\left[\left(\sum_{i=1}^{p} l_i+\sum_{j=1}^{q} r_j\right)\left(\sum_{i=1}^{p} m_i+\sum_{j=1}^{q} s_j\right)+\left(\sum_{i=1}^{p} l_i-\sum_{j=1}^{q} r_j\right)\left(\sum_{i=1}^{p} m_i-\sum_{j=1}^{q} s_j\right)\right]=$$

$$=-F(a,b)\left[2\left(\sum_{i=1}^{p} l_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\right)+2\left(\sum_{j=1}^{q} r_j\right)\left(\sum_{j=1}^{q} s_j\right)\right].$$

Multiplizieren wir an der linken Seite! Die Gleichung gilt. Daraus folgt die Gleichheit der Koeffizienten von $F(a, c)$ und $F(b, c)$ mit entsprechenden Vertauschungen an beiden Seiten der Gleichung (1). Die Gleichheit der Koeffizienten von $F(a, b, c)$ kann man auf Grund der Gleichung (3) mit einer Induktion für q kontrollieren.

Der Ausdruck (3) ist also die allgemeinste Lösung der Gleichung (1) mit sieben unabhängigen Konstanten.

Wir suchen jetzt die Lösung der Funktionalgleichung (1), wenn die Gruppe G durch n Elemente erzeugt mird ($u \geqq 4$).

Dazu brauchen wir drei Hilfsätze.

Hilfsatz 2.

$$f(xyz)+f(xzy)=2f(xy)+2f(xz)+2f(yz)-2f(x)-2f(y)-2f(z) \tag{4}$$

gilt für alle $x, y, z \in G$.

Beweis. Wir haben

$$f(xy\cdot z)=2f(xy)+2f(z)-f(x\cdot yz^{-1})=2f(xy)+2f(z)-$$
$$-2f(x)-2f(y\cdot z^{-1})+f(xz\cdot y^{-1})=2f(xy)+2f(z)-2f(x)-4f(y)-4f(z)+$$
$$+2f(yz)+2f(xz)+2f(y)-f(xzy).$$

Daraus folgt der Hilfsatz mit Umordung.

Definition. Es sei

$$F(a,b,c,d)=f(a)+f(b)+f(c)+f(d)-f(ab)-f(ac)-f(ad)-f(bc)-$$
$$f(bd)-f(cd)+f(abc)+f(abd)+f(acd)+f(bcd)-f(abcd).$$

Hilfsatz 3. $F(a, b, c, d)=0$. *Die Verifikation des Hilfsatzes* (3) *geht mit einer ähnlichen Rechnung, wie die Verifikation des Hilfsatzes* (2).

Die Rechnung ist aber ein wenig kompliziert.

Definition. Es sei

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_j\leqq n} f(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_j}).$$

Hilfsatz 4. *Für $n \geq 4$ gilt $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Die Verifikation geht natürlich mit Induktion. Wir nehmen an, dass der Hilfsatz (4) gilt für n ($n \geq 4$). Daraus wird es folgen, dass er auch für $n+1$ gilt.*

Verwenden wir die Definition für $F(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$, und schreiben wir drei Glieder der Summe ausführlich aus!

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n+1} f(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_j}) + \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n) + (-1)^{n+1} f(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_{n+1} + \cdots + \\ &+ (-1)^{n+2} f[a_1 a_2 \ldots a_{n-1} (a_n a_{n+1})]. \end{aligned} \tag{5}$$

Benützen wir für diese Glieder die Induktionsbedingung! Nach der Einsetzung und den Zusammenziehungen bekommen wir 0 an der rechten Seite der Gleichung (5). Es ist sichtbar, wenn wir die Glieder der Summe den Vorkommen von a_n, a_{n+1} und $a_n a_{n+1}$ entsprechend gruppieren.

Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n \geq 4$ die erzeugende Elemente der Gruppe G sind, und $x = a_1^{l_{11}} a_2^{l_{21}} \ldots a_n^{l_{n1}} a_1^{l_{12}} a_2^{l_{22}} \ldots a_n^{l_{n2}} \ldots a_1^{l_{1p}} a_2^{l_{2p}} \ldots a_n^{l_{np}}$ dann ist die Lösung der Gleichung (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} f(a_j) \left(\sum_{i=1}^{p} l_{ji} \right)^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} F(a_i, a_j) \left(\sum_{t=1}^{p} l_{it} \right) \left(\sum_{t=1}^{p} l_{jt} \right) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} F(a_i, a_j, a_k) \cdot \left[\left(\sum_{t=1}^{p} l_{it} \right) \left(\sum_{t=1}^{p} l_{jt} \right) \left(\sum_{t=1}^{p} l_{kt} \right) - S_p (l_{i1} l_{j1} l_{k1} \ldots l_{ip} l_{jp} l_{kp}) \right], \end{aligned}$$

wo die Funktionenwerte

$$\begin{array}{ll} f(a_i) & 1 \leq i \leq n \\ f(a_i a_j) & 1 \leq i < j \leq n \\ f(a_i a_j a_k) & 1 \leq i < j < k \leq n \end{array}$$

sind beliebige Elemente aus A.

Die Funktionalgleichung (1), und die Eigenschaften der Funktion f werden aus dem Werk von S. Kurepa genommen, aber er löst nicht diese Funktionalgleichung.

LITERATUR

[1] Kurepa S., *On Bimorphisms and Quadratic Forms on Groups*, (Aequationes Math. 9. 30—45 (1973).

GAT Egyetem Matematikai intézete
2103 Gödöllö
Hungary