Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

ВЕЉКО А. ВУЈИЧИЋ

ИДЕНТИФИКОВАЊЕ ТРАЈЕКТОРИЈА ТАЧКЕ ПРОМЕНЉИВЕ МАСЕ СА АУТОПАРАРЕЛАМА

Е. Клаузер је показао [2] да је могуће у општем случају идентификовати динамичке трајекторије са аутопаралелама простора одређене опште повезаности. Ти радови се односе на динамичке системе са константном масом. Наш циљ је да у овом раду покажемо да се трајекторије тачке променљиве масе могу идентификовати са аутопаралелама линеарно повезаних простора.

1. Опште једначине кретања тачке променљиве масе у односу на Декартов систем координата (како се још често називају опште једначине Мешчерског[5]) гласе:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}^{\alpha}) = Y^{\alpha} + \frac{dm_{(1)}}{dt}u^{\alpha}_{(1)} + \frac{dm_{(2)}}{dt}u^{\alpha}_{(2)} \tag{1}$$

или

$$m\ddot{y}^{\alpha} = Y^{\alpha} + \Phi^{\alpha}$$

гдје су $u^{\alpha}_{(1)}$ и $u^{\alpha}_{(2)}$ апсолутне брзине отпадајућих и припајајућих честица, $\dot{y}^{\alpha} = \frac{dy}{dt}$ су координате вектора брзине тачке, Y^{α} координате резултанте активних, а $\Phi^{\alpha} = \frac{dm_{(1)}}{dt}(u^{\alpha}_{(1)} - \dot{y}^{\alpha}) + \frac{dm_{(2)}}{dt}(u^{\alpha}_{(2)} - \dot{y}^{\alpha})$ одговарајуће координате реактивних сила. Маса m је одређена као функција времена у сваком тренутку времена обрасцем [4]

$$m = m_0 - \int_0^t \left|\frac{dm_{(1)}}{dt}\right| dt + \int_0^t \frac{dm_{(2)}}{dt}\,dt.$$

Умјесто правоулих Декартових координата, као и посматрања у еуклидском просторгу E_3, можемо посматрати неки n-димензиони еуклидски просто E_n, у коме ће једначине (1) задржати своју форму, а индекси $i, j, k, \ldots$ ће узимати вредности од 1 до n (реално до 3); такође можемо увести неки систем од n генералисаних координата $x^1, x^2, x^3, \ldots$, везаних за Декартове релацијама

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n),$$

па се једначине Мешчерског своде аналогно оном за једначине кретања тачке непроменљиве масе (1) на облик

$$\frac{\delta \dot{x}^i}{\delta t} = \ddot{x} + \left\{ {i \atop kl} \right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = Q^i + P^i \tag{2}$$

гдје Q^i и P^i претстављају координате активне X^i и реактивне силе Z у генералисаним координатама, подељеним са масом, тј.

$$Q^i = \frac{X^i}{m}; \quad P^i = \frac{Z^i}{m}.$$

Кристофелови симболи друге врсте $\left\{ {i \atop kl} \right\}$ написани су у односу на метрички тензор a_{ij} форме

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j = \frac{2T}{m} dt^2 \tag{3}$$

гдје је T кинетичка енергија посматране тачке, а m њена маса у тренутку t. Можемо претпоставити да метрика није само еуклидска, већ општија, риманска.

2. Једначине аутопаралела у линеарно повезаном простору L_n [3] са коефицијентима повезаности Γ_{kl}^i су

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l = \varphi \dot{x}^i \tag{4}$$

гдје је φ нека функција параметра t, таква да задовољава диференцијалну једначину

$$\ddot{s} - \varphi \dot{s} = 0 \quad \left(\dot{s} = \frac{ds}{dt} \right), \tag{5}$$

при чему је s лук у E_n и истовремено афини параметар у L_n [3].

Ако поставимо захтјев да симетрични тензор a_{ij}, дефинисан метричком формом (3) у E_n, буде фундаментални тензор у L_n, коефицијенти повезаности морају имати облик [3]

$$\Gamma_{kl}^i = \left\{ {i \atop kl} \right\} + T_{kl}^i \quad . \tag{6}$$

тако да упоређивањем једначина кретања (2) и једначина аутопаралела (4) сада добијамо да мора бити

(7) $$T^i_{kl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l = \varphi\dot{x}^i - (Q^i + P^i)$$

ако желимо да трајекторије идентификујемо са аутопаралелама у L_n.

С друге стране због (5) и (3) можемо ставити

$$\varphi = \frac{1}{2T}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{2m}\frac{dm}{dt}.$$

А како из закона кинетичке енергије за тачку променљиве масе [4] имамо

$$\frac{dT}{dt} = m(Q_r + P_r)\dot{x}^r + \frac{T}{m}\frac{dm}{dt}$$

то је

$$\varphi = \frac{m}{2T}(Q_r + P_r)\dot{x}^r = \frac{m}{2T}S^r\dot{x}_r; \quad (S_r = Q_r + P_r),$$

па (7) коначно можемо написати у облику, у коме множитељ φ има познату вредност

(8) $$T^i_{kl}\,\dot{x}^k\dot{x}^l = \frac{m}{2T}S^r\dot{x}_r\dot{x}^i - S^i = \left(\frac{m}{2T}\dot{x}_r\dot{x}^i - \delta^i_r\right)S^r.$$

Једначине (8) претстављају систем од n једначина са $^1/_2\, n^2(n+1)$ непознатих. Једно од могућих решења је да сведемо задатак на то да број непознатих буде једнак броју једначина, тј. да симетрични тензор T^i_{kl} изразимо помоћу само једног непознатот вектора, на пр. у облику

$$T^i_{kl} = G^i a_{kl}$$

одакле лако добијамо

(9) $$G^i = \frac{m}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^i\dot{x}_r - \delta^i_r\right\}S^r$$

односно

$$T^i_{kl} = G^i a_{kl} = \frac{m}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^i\dot{x}_r - \delta^i_r\right\}S^r a_{kl}.$$

Ради одређивања периоде коефицијената повезаности (6), што се своди на одређивање природе вектора G^i, раставимо векторе Q^i и P^i на по двије компоненте, једну у правцу тангенте на трајекторији, а другу у равни нормалној на трајекторији, тј.:

(10) $$Q^i = a\dot{x}^i + b\mu^i; \quad P = \alpha\dot{x}^i + \beta\mu^i$$
$$S^i = (\alpha + a)\dot{x}^i + (b + \beta)\mu^i = \lambda\dot{x}^i + N\mu^i$$

гдје је

$$\mu^i\mu_i = 1 \quad \text{и} \quad \dot{x}^k\mu_k = 0.$$

Замјеном (10) у (9) слиједи:

$$G^i = \frac{m}{2T}N\mu^i \equiv R\mu^i$$

па коефицијенти повезаности (6) коначно добијају вредност

$$\Gamma_{kl}^{i} = \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} + R\mu^i a_{kl}. \tag{10'}$$

Они заједно са метриком (3) одређују тражени простор у коме се трајекторије тачке промењљиве масе поклапају са аутопаралелама. Из тог слиједи теорема:

— Динамичке трајекторије тачке промењљиве масе, која се креће под дејством активних и реактивних сила, изазваних отпадањем и припајањем честица, јесу аутопаралеле у простору са симетричном повезаношћу

$\Gamma_{kl}^{i} = \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} + R\mu^i a_{kl}$ одређеном фундаменталним тензором a_{ij} и силама које дјелују на тачку.

Кретање тачке константне масе под дејством активних сила само је посебан случај овог проблема.

Лако се уочава из (6) да су коефицијенти повезаности једнаки Кристофеловим симболима друге врсте $\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix}$ ако је T_{kl}^{i} једнако нули. У том случају мора бити

$$G^i = \frac{m}{2T} N\mu^i = \frac{m}{2T}(b+\beta)\mu^i = 0 \tag{11}$$

па је простор L_n Риманов V_n са метриком (3).

Услов (11) је задовољен у два случаја и то:

1° — кад $T \to \infty$, а маса m и нормалне компоненте активних и реактивних сила имају коначну величину, што није предмет разматрања у овом раду.

2° — кад кинетичка енергија има коначну вредност а нормална компонента активне и реактивне силе $N = b + \beta$ једнака је нули, што може бити под условом

a) да је $b = -\beta$ нормална компонента активне силе по интензитету и правцу једнака, а по смјеру супротна нормалној компоненти реактивне силе и

b) да уопште нема нормалне компоненте сила.

Из овога на основу (6) и закључака из (11) слиједи:

— Динамичке трајекторије тачке промењљиве масе, која се креће под дејством активних и реактивних сила, изазваних отпадањем и припајањем честица, јесу геодезиске линије у риманском простору ако се компоненте сила које дјелују нормално на правац кретања узајамно поништавају, или ако те компоненте уопште не постоје.

Такође имамо:

— Трајекторије тачке промењљиве масе под дејством само реактивних сила, када је апсолутна или релативна брзина отпадајућих и припајајућих честица једнака нули увијек је геодезиска линија риманског простора.

4. Решење система (8) може се написати у облику

$$2T._{kl}^{\;i} = 2G^i a_{kl} = \delta_r^i \psi_l + \delta_l^i \psi_k - 2a_{kl}\psi^i \tag{12}$$

гдје су ψ^i координате неком арбитрерног вектора, а δ_l^i Кронекерови симболи. Заиста, композиција (12) са $\dot{x}^k \dot{x}^l$ доводи до

$$G^i = \frac{m}{2T}\left(\dot{x}^i \dot{x}^l \psi_l - \frac{2T}{m}\psi^i\right).$$

односно, ако вектору ψ^i дамо вредност

$$\psi^i = \frac{m}{2T} S^i = \frac{1}{2}\Phi^i$$

до

$$G^i = \frac{m}{2T}\left\{\frac{m}{2T}\dot{x}^i \dot{x}_l - \delta_l^i\right\} S^l$$

што је идентично са (9).

Повезаност дефинисана са (12) може се измијенити додавањем члана $^1/_2(\delta_k^i \psi_l + \delta_l^i \psi_k)$, а да се при том аутопаралеле не промијене. Тада за $\Gamma._{kl}^{\;i}$ добијамо

$$\Gamma._{ke}^{\;i} = \left\{\begin{matrix} i \\ kl \end{matrix}\right\} + \frac{1}{2}\left(\delta_k^i \Phi_l + \delta_l^i \Phi_k - a_{kl}\Phi^i\right).$$

За услов да нормалне компоненте генералних сила не зависе од брзина важи $\Delta_j a_{kl} + a_{kl}\Phi_j = 0$ (Δ_j — оператор за коваријантни извод) што са (13) дефинише линеарну повезаност сличну Вајловој. Одавде слиједи:

— Трајекторије тачке променљиве масе која се креће под дејством активних и реактивних сила, условљених одвајањем и припајањем честица очувавају својство аутопаралела у простору повезаности сличне Вајловој кад се за арбитрерни вектор узме количник силе и кинетичке енергије.

На крају напомињемо да о повезаности линеарних простора има смисла говорити ако она не зависи од брзина, те се због тога задржавамо на третирање само оних кретања под дејством сила независних од брзина кад те силе улазе у објект повезаности.

(Саопштено 11-III-1959)

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Анђелић, Т. — Тензорски рачун, Београд, 1952

[2] Clauzer, E. — Instituto di matematica del politecnico di Milano, Pubblicazioni №№ 157, 165, (1955).

[3] Eisenhart, L. P. — Non riemannian Geometry, New York, 1927.

[4] Космодемянский, А. А. — Курс теоретической механики, Москва, 1955

[5] Мещерский, И. В. — Работы по механике тел переменной масы. Москва, 1952.

[6] Synge, I. L. and Schild A. — Tensor calculus, Toronto, 1949.

IDENTIFICATION OF DYNAMICAL TRAJECTORIES OF A PARTICLE OF VARIABLE MASS AS AUTOPARALLELS

Veljko A. Vujičić (Belgrade)

Comparison of t.nsorial equations of motion (2) of a particle of variable mass with equations (4) of autoparallels in an L_n furnishes the coefficients of connection of L_n such that the autoparallels are trajectories of the particle. Analysis of (11) gives the conditions under which trajectories of the particle are geodesics in a riemannian space. Trajectories are identified, too, as autoparallels in a Weyl space. The forces considered in the paper are independent of velociti s.