Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

БОГДАН БАЈШАНСКИ

УВОЂЕЊЕ ТОПОЛОГИЈЕ ФАМИЛИЈОМ РЕЛАЦИЈА

0. Постоји неколико појмова који се дефинишу у општем метричком простору, али се не могу уопштити на тополошке просторе. То су, на пример, својство низа тачака да буде Кошиев, својство простора да буде потпун, својство функције да буде униформно непрекидна. Та својства се не могу пренети у тополошке просторе, јер — као што је примерима лако показати — нису тополошки инваријантна. Потреба за преношењем тих својстава на просторе општије од метричких, потреба која је била настала у вези са изучавањем тополошких група, навела је Андре Вејла на стварање такозваних униформних простора. Поред Вејловог поступка, постоји низ других поступака (преко генералисаних отстојања, преко фамилија псеудометрика, преко релације близине В. А. Ефремовича итд) који сви имају за циљ да генералишу раније поменуте појмове, дефинисане првобитно у метричким просторима, али сви су ти поступци међусобно еквивалентни, и разлике између њих су углавном терминолошке природе.

Наш циљ је да покажемо да — као што једна произвољна фамилија потскупова скупа X на природан начин може да индуцира тополошку структуру на скупу X, на пр., ако се скупови дате фамилије схвате као суббаза једне топологије — да слично томе произвољна фамилија потскупова скупа $X \times X$, или, друкчије речено, једна фамилија релација дефинисаних над истим скупом X на природан начин генерише извесне тополошке структуре на скупу X.

Најпре, на један сасвим тривиалан начин свака фамилија релација дефинисаних над истим скупом генерише једну фамилију рефлексивних и симетричних релација. Филтар релација који има добијену фамилију за суббазу зваћемо генералисаном униформном структуром. Свака генералисана униформна структура на један природан начин, као што ћемо то показати, генерише једну униформну структуру.

У вези са појмом генералисане униформне структуре појављује се неколико питања.

Прво, постоје свакако два природна начина на који једна генералисана униформна структура генерише једну тополошку структуру. Једну генерише директно, а другу посредно, као тополошку структуру униформне структуре коју генерише. Показаћемо да су у општем случају те две тополошке структуре различите. Одговорићемо и на извесна питања у вези односа тих двеју топологија.

Друго, поставља се питање која је класа тополошких простора чија се топологија може непосредно генерисати једном генералисаном униформном структуром. (Питање која је класа тополошких простора чија се топологија може посредним путем генералисати једном генералисаном униформном структуром решено је познатом теоремом о потребним и довољним условима за један тополошки простор да би се у њега могла увести униформна топологија.)

Нагласимо, на крају, да се у овом раду не даје никаква генерализација теорије униформних простора. Ми можемо дефинисати, на пример, Кошиеве низове тачака у сваком скупу који је снабдевен једном генералисаном униформном структуром. Да бисмо могли формулисати ставове о Кошиевим низовима, на пример да бисмо могли одговорити на питање да ли је сваки конвергентан низ Кошиев, потребно је снабдети простор топологијом. Можемо га снабдети или топологијом коју дата генералисана униформна структура посредно генерише — и добијена теорија у том случају претставља само други вид излагања Вејлове теорије, или топологијом непосредно генерисаном, али у том случају основни ставови — као, исти пример, да је сваки конвергентан низ Кошиев — без изузетка престају да важе.

Ради прегледнијег излагања ми ћемо најпре дефинисати неколико појмова и увести неколико ознака.

1. Композицијом двеју релација ρ_1 и ρ_2 дефинисаних на скупу X називамо релацију ρ дефинисану на следећи начин:

$x\rho y$ онда и само онда кад постоји елемент z скупа такав да је истовремено $x\rho_1 z$ и $z\rho_2 y$.

Уобичајено је композицију релација означавати кружићем, писати, например, $\rho=\rho_1\circ\rho_2$. Ми ћемо отступити од те ознаке и писаћемо $\rho=\rho_1+\rho_2$, да бисмо јаче истакли аналогију метричких и униформних простора.

Дефинисана композиција релација јесте, што је једноставно показати, асоцијативна. Наиме, за сваке три релације ρ_1, ρ_2, ρ_3 важи

$$(\rho_1+\rho_2)+\rho_3=\rho_1+(\rho_2+\rho_3).$$

Даље, писаћемо $1\cdot\rho=\rho$

$$(k+1)\,\rho=k\rho+\rho \text{ за сваки природан број } k.$$

Дакле, $x\,k\rho\,y$ значи да постоји $k-1$ елемената $z_1, z_2\ldots, z_{k-1}$ у скупу над којим је релација ρ дефинисана, таквих да је $x\rho z_1$, $z_1\rho z_2,\ldots$, $z_{k-1}\rho y$.

Пресеком релација ρ_1 и ρ_2 називамо, као што је уобичајено, релацију ρ дефинисану на следећи начин: $x\rho y$ еквивалентно је са исказом да је истовремено $x\rho_1 y$ и $x\rho_2 y$. Пишемо $\rho=\rho_1\cap\rho_2$.

Рећићемо да релација ρ има за последицу релацију ρ' и писаћемо $\rho \Longrightarrow \rho'$ ако из $x\rho y$ увек следи $x\rho' y$.

Ако је F фамилија релација, са $\overline{F}$ означавамо фамилију свих последица релација из F, то јест

$$\overline{F}=\left\{\pi \mid \exists \rho \,.\, \rho \in F,\ \rho \Longrightarrow \pi\right\}.$$

За једну фамилију F релација ρ дефинисаних над истим скупом X рећи ћемо да образује филтар релација ако су испуњена следећа два услова

i) ако је $\rho \in F$ и $\rho \Longrightarrow \rho'$ тада је $\rho' \in F$,

ii) из $\rho_1 \in F$, $\rho_2 \in F$ следи $\rho_1 \cap \rho_2 \in F$.

За један потскуп B филтра релација F рећи ћемо да претставља базу филтра F ако свака релација из F јесте последица неке релације из B.

Потребан и довољан услов да би дата фамилија B релација образовала базу филтра релација јесте, очигледно, да кад год две релације припадају скупу B да тада њихов пресек буде последица неке релације из B.

За један потскуп S филтра релација F рећи ћемо да претставља суббазу филтра F ако свака релација из F јесте последица неког пресека коначно много релација из S.

Очигледно је да свака фамилија релација дефинисаних над истим скупом претставља суббазу неког филтра релација.

Нека је F једна фамилија релација које су све дефинисане над истим скупом. Са F_k, k природан број, означићемо фамилију свих релација облика $k\rho$, тојест

$$F_k=\left\{k\rho \mid \rho \in F\right\}.$$

Са P^k, k природан број, означићемо фамилију свих релација облика $\rho_1+\rho_2 \ldots +\rho_k$, то јест

$$P^k=\{\pi \mid \pi=\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_k,\ \rho_i \in P,\ i=1,2,\ldots k\}.$$

Навешћемо неколико тврђења о овим изведеним скуповима релација, да би разлика у дефиницији униформних и генералисаних униформних структура била јаснија.

Увек је $P_k \subset P^k$.

Ако је P база једног филтра релација, P_k и P^k претстављају базе једног истог филтра релација. Довољно је показати да је P_k база једног филтра релација. Нека $\pi_1, \pi_2 \subset P_k$. Тада у P постоје релације ρ_1, ρ_2 такве да је $\pi_1=k\rho_1$, $\pi_2=k\rho_2$. Пошто је P база филтра, P садржи релацију ρ такву да $\rho \Longrightarrow \rho_1 \cap \rho_2$. Стога релација $k\rho=\pi$ припада P_k. Како $\rho \Longrightarrow \rho_1$, $\rho \Longrightarrow \rho_2$, то $k\rho \Longrightarrow k\rho_1$, $k\rho \Longrightarrow k\rho_2$, па према томе $\pi=k\rho \Longrightarrow k\rho_1 \cap k\rho_2=\pi_1 \cap \pi_2$, дакле P_k је база једног филтра релација.

Нека су све релације фамилије F рефлексивне. Тада је $F_{k+1} \subset \overline{F}_k$, $F^{k+1} \subset \overline{F}^k$ за сваки природан број k. Доказ. Нека је ρ произвољна релација из F. Тада $k\rho$ припада F_k. Због рефлексивности релације ρ, релација $k\rho$ има за последицу релацију $(k+1)\rho$. Како $\overline{F}_k$ садржи релацију $k\rho$ и сваку њену последицу, $\overline{F}_k$ садржи и релацију $(k+1)\rho$. Слично се доказује и друга инклузија.

Ако је F један филтар релација и ако је $F \subset \overline{F_2}$, тада је $\overline{F_k} \subset \overline{F_{k+1}}$, $\overline{F^k} \subset \overline{F^{k+1}}$. Доказ. Нека је ρ произвољна релација из F. Пошто она припада $\overline{F_2}$, постоји релација ρ' у F таква да је $2\rho' \Longrightarrow \rho$. Према томе, релација $k\rho = (k-1)\rho + \rho$ последица је релације $(k-1)\rho + 2\rho'$ која следи из релације $(k+1)(\rho \cap \rho')$. Последња релација, међутим, припада F_{k+1}, јер $\rho \cap \rho'$ припада F. Стога релација $k\rho$ припада $\overline{F}_{k+1}$. Свака релација из $\overline{F_k}$ као последица неке релације $k\rho$ припада зато скупу $\overline{F_{k+1}}$. Друга инклузија доказује се слично.

Последња два закључка дају следећу последицу:

Ако је F филтар рефлексивних релација и $F \subset \overline{F_2}$, тада је $F = \overline{F_k} = \overline{F^k}$ за сваки природан број k.

2. Дефиниција 1. Генералисаном униформном структуром на скупу X називамо филтар G рефлексивних и симетричних релација дефинисаних на X.

Да бисмо показали што јасније разлику између униформних и генералисаних униформних структура, навешћемо и дефиницију униформних структура стилизовану на исти начин:

Униформном структуром на скупу X називамо филтар U рефлексивних и симетричних релација дефинисаних на X, ако је $U \subset \overline{U_2}$.

Сваку базу (суббазу) поменутог филтра називаћемо у ова два случаја базом (суббазом) генералисане униформне, односно униформне структуре.

Нека је G произвољна фамилија рефлексивних релација. Тада постоји фамилија F, садржана у $\overline{G}$, која има особину да је $F \subset F_k$ за сваки природан број k. Таква је, на пример, фамилија која се састоји од једине релације ρ дефинисане помоћу: $x\rho y$ за свако x и y. Нека је U унија свих фамилија F. Тада је $U \subset U_k$ за сваког k и U је максимална од свих фамилија са поменутим својством које су садржане у $\overline{G}$.

На сличан начин свакој генералисаној униформној структури G може се коренспондирати једна униформна структура U, при чему у специјалном случају кад је G униформна структура, добијамо да је $U = G$.

Међутим, дата дефиниција униформне структуре U кореспондиране генералисаној униформној структури G разликује се од ефективне конструкције структуре U. У првоме случају U је дефинисано помоћу U, наиме, дефинисано је дескриптивно, помоћу својстава која има, те стога да бисмо одговорили које релације припадају U треба да познајемо U. У другом случају U ће бити дефинисано конструктивно и да бисмо одговорили на питање да ли одређена релација припада или не структури U, биће довољно познавање структуре G. На тај начин смо у стању да све резултате о униформним структурама изразимо у терминима генералисаних униформних структура, и да дамо једно алтернативно излагање теорије униформних простора. Конструкција коју ћемо дати нема за нас других интереса осим поменутих и неће бити коришћена даље.

Постављени задатак може се решити на два начина: директно се свакој генералисаној униформној структури конструише одговарајућа униформна структура, или индиректно, произвољној бази генералисане униформне структуре кореспондира се фамилија релација која претставља суббазу једне генералисане униформне структуре. Ми ћемо дати другу конструкцију, јер је она једноставнија, и доказаћемо да је резултат једнозначно одређен, то јест да не зависи од изабране базе генералисане униформне структуре.

Конструкцију ћемо извршити за један случај који је општији од нашег, наиме произвољној фамилији F рефлексивних релација формираћемо максималну фамилију U садржану у F која има својство да је садржана у U_k за свако k.

Ради ове конструкције потребна су нам два нова појма, појам нормалног низа и појам редукције фамилије релација.

Дефиниција 2. Нека је F произвољна фамилија релација дефинисаних над истим скупом. За низ $\{\rho n\}$ релација из F рећи ћемо да је нормалан низ релација ако за свака два природна броја k и p важи да

(1) $$\rho_p \Longrightarrow k\rho_{kp}.$$

Очигледно је да се у свакој фамилији F рефлексивних релација дефинисаних над истим скупом могу образовати нормални низови релација. На пример, нека је δ произвољна релација из F. Тада је низ $\{\delta_n\}$, $\delta_n = \delta$ за свако n, један нормалан низ релација.

Дефиниција 3. Нека је F произвољна фамилија релација дефинисаних над истим скупом X. Нека је сваком нормалном низу $\{\delta_n\}$ релација F кореспондирана релација ε дефинисана на X помоћу

(2) $x\varepsilon y$ онда и само онда кад постоји n такво да је $xn\delta_n y$.

Скуп тако дефинисаних релација ε називамо редукцијом $R(F)$ фамилије F.

Став 1. *Нека су G, H произвољне фамилије рефлексивних релација дефинисаних над истим скупом, и нека је $G = \overline{G}$. Тада је*

(i) $R(G) \subset G$,

(ii) $R(G) \subset [R(G)]_k$ *за сваки природан број* k,

(iii) *из* $H \subset G$, $H \subset H_k$ *следи* $H \subset R(G)$.

Доказ. (i) Свака релација ε из $R(G)$ последица је неке релације из G, дакле припада $\overline{G} = G$.

Релација ε дефинисана је неким нормалним низом релација $\{\delta_n\}$. Из $x\delta_1 y$ следи да постоји n такво да је $xn\delta_n y$, дакле $x\varepsilon y$.

(ii) Пошто је G фамилија рефлексивних релација, дефиниција релације ε која је дата у (2) еквивалентна је следећој дефиницији

(3) $x\varepsilon y$ онда и само онда кад постоји N такво да је $xn\delta_n y$ за све n који су мултипли од N.

Довољно је да покажемо да су искази $xn\delta_n y$ за све n који су мултипли од N и $xN\delta_N y$ еквивалентни.

Пошто је низ релација $\{\delta_n\}$ нормалан, из (1) следи да за $n=kN$ $\delta_N \Longrightarrow k\delta_{kN}$. Како су релације δ_n рефлексивне, биће $N\delta_N \Longrightarrow Nk\delta_{kN} \equiv n\delta_n$, што је требало доказати.

Нека је ρ једна релација из $R(G)$. Потребно је да докажемо да ρ припада скупу $[R(G)]_k$, то јест да постоји релација ρ' у $R(G)$ таква да је $k\rho'=\rho$.

Релација ρ дефинисана је неким нормалним низом $\{\pi_n\}$ релација из G. Према (1) $\pi_p \Longrightarrow l\pi_{kp}$ што даје специјално $\pi_{kp} \Longrightarrow l\pi_{klp}$ за све k, l, p. Стога је низ $\{\pi_{kn}\}$ такође нормалан. Означимо релацију редукције дефинисану тим низом са ρ'. Тада $xk\rho' y$ значи да постоји $k-1$ тачака $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}$ таквих да је истовремено $x\rho' z_1, z_1\rho' z_2, \ldots, z_{k-1}\rho' y$. Међутим, $z_i\rho' z_{i+1}$, $i=0,1,\ldots,k-1$, где смо ставили $z_0=x$, $z_k=y$, значи, према (3), да постоје N_i такви да за све n који су мултипли од N_i, $z_i n\pi_{kn} z_{in}$ за свако $i=0,1,\ldots,k-1$. Дакле, ако ставимо $N=\prod_{i=0}^{k-1} N_i$, имаћемо, за свако $i=0,1,\ldots,k-1$, $z_i N\pi_{kN} z_{i+1}$. Одателе следи $xkN\pi_{kN}y$. Према дефиницији (2) релације ρ доказано је да је $x\rho y$, дкале, $k\rho' \Longrightarrow \rho$. Из $x\rho y$ следи, према (3), да постоји N такво да је $xn\pi_n y$ за све n који су мултипли од N. Специјално $xkN\pi_{kn}y$, одакле следи да постоји $k-1$ тачака z_i, $i=1,2,\ldots,k-1$ таквих да је $xN\pi_{kN}z_1, \ldots, z_{k-1}N\pi_{kN}y$. Према (2) $x\rho' z_1, z_1\rho' z_2, \ldots, z_{k-1}\rho' y$, одакле следи $xk\rho' y$. Дакле $\rho \Longrightarrow k\rho'$.

Из $k\rho' \Longrightarrow \rho$ и $\rho \Longrightarrow k\rho'$ следи $\rho = k\rho'$.

(iii) Нека је $h \in H$. Због $h \in H_k$ постоји за свако k релација h_k у H таква да је $h = kh_k$.

Могућно је да постоје за исто k различите релације $h_k \in H$ такве да је $h=kh_k$. Да бисмо избегли ту вишезначност која би нам онемогућила да спроведемо доказ, поступићемо на следећи начин.

Изаберимо најпре једну релацији $h_{2!}$ из H такву да је $h=2h_{2!}$. Изаберимо даље једну релацију $h_{3!}$ из H такву да је $h_{2!}=3h_{3!}$ и, уопште, изаберимо релацију $h_{(n+1)!}$ такву да је $h_{n!}=(n+1)\,h_{(n+1)!}$. Ставимо најзад $h_k=(k-1)!\,h_{k!}$ за сваки природан број k, што је лако видети да је у сагласности са претходно датом дефиницијом у случају када је k факторијел.

Формирајмо низ релација $\{h_k\}$. Тај низ је нормалан низ јер је

$$h_k=(k-1)!\,h_{k!}=(k-1)!\,(k+1)(k+2)\ldots(kp)\,h_{(kp)!}=\frac{(kp)!}{k}h_{(kp)!}=$$
$$=p\,(kp-1)!\,h_{(kp)!}=ph_{kp}\,.$$

Како $H \subset G$, то релација $\chi = \{h_n\} \in R(G)$.

С друге стране, $x\chi y$ значи да постоји једно n такво да је xnh_ny, што је еквивалентно са xhy. Дакле, $h \equiv \chi \in R(G)$. Према томе, $H \subset R(G)$.

Као последицу става добијамо следећи резултат.

Нека је G генералисана униформна структура. Тада филтар U чија је суббаза $R(G)$ има својство да је $U \subset \overline{U}_k$. Наиме, нека је π релација из U. Тада постоје релације $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in R(G)$ такве да $\rho_1 \cap \rho_2 \cap \ldots \cap \rho_n \Longrightarrow \pi$. Како је $\rho_i = k\rho_{ik}$, где $\rho_{ik} \in R(G)$, то имамо, стављајући $\rho_{1k} \cap \rho_{2k} \cap \ldots \cap \rho_{nk} = \pi' \in U$,

$$k\pi' = k(\rho_{1k} \cap \rho_{2k} \cap \ldots \cap \rho_{nk}) \Longrightarrow k\rho_{1k} \cap k\rho_{2k} \cap \ldots \cap k\rho_{nk} = \rho_1 \cap \rho_2 \ldots \cap \rho_n = \pi,$$

па за свако π из U следи да постоји π' у U такво да је π последица од $k\pi'$.

На основу претходне примедбе, а како из дефиниције 3 следи непосредно да ако је G фамилија рефлексивних, односно симетричних релација, тада је и $R(G)$ фамилија рефлексивних, односно симетричних релација, добијамо да U претставља униформну структуру.

3. Нека је на скупу E дефинисана генералисана униформна структура G.

Посматрајмо фамилију O скупова $X \subset E$ који имају следеће својство: свакој тачки $x \in X$ одговара релација $\varepsilon \in G$ тако да из $x\varepsilon y$ следи $y \in X$.

Да бисмо показали да скупови фамилије O претстављају отворене скупове једне топологије, довољно је да покажемо следеће:

(i) Унија скупова фамилије O јесте један скуп фамилије O.

(ii) Пресек коначно много скупова фамилије O јесте скуп фамилије O.

(i) Нека је $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, нека сваки од скупова X_α, $\alpha \in A$, припада фамилији O, и нека је x произвољна тачка скупа X. Тада постоји $\alpha_0 \in A$ такво да $x \in X_{\alpha_0}$. Како X_{α_0} припада фамилији O, постоји релација ε таква да из $x \varepsilon y$ следи $y \in X_{\alpha_0} \subset X$.

(ii) Нека је $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$, A коначан скуп индекса, нека сваки од скупова X_α, $\alpha \in A$ припада фамилији O, и нека је x произвољна тачка скупа X. Тада x припада свакоме од скупова X_α, $\alpha \in A$. Како ти скупови припадају фамилији O, постоје у G релације ε_α, $\alpha \in A$, такве да из $x \varepsilon_\alpha y$ следи $y \in X_\alpha$. Пошто је A коначан скуп, број релација ε_α је коначан. Како је G филтар релација и садржи све релације ε_α, садржи и њихов пресек, релацију ε, из које следи свака релација ε_α. Посматрајмо скуп тачака y простора X таквих да је $x\varepsilon y$. Свака таква тачка y припада свакоме од скупова X_α, $\alpha \in A$, јер из $x \varepsilon y$ следи $x \varepsilon_\alpha y$, одакле произилази $y \in X_\alpha$. Према томе, свака од тачака y припада скупу X, што значи да скуп X припада фамилији O.

Ако желимо, дакле, да у једном генералисаном униформном простору индуцирамо топологију преко отворених скупова, чинимо то на исти начин као и у униформним просторима.

Међутим, могућно је у униформним просторима генерисати исту тополошку структуру и на други начин, на пример, најуобичајенији начин јесте генерисање тополошке структуре дефиницијом околина у униформном простору.

Посматрајмо фамилију скупова $V_\varepsilon(x) \equiv \{y \mid x\varepsilon y\}$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$. У униформним просторима та фамилија скупова образује један систем околина генерисаног тополошког простора. Код генералисаних униформних структура, у општем случају, то тврђење није тачно. Наиме, фамилија скупова $V_\varepsilon(x)$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$, или претставља систем околина једног тополошког простора (и тада је топологија тог простора идентична са топологијом коју смо увели преко отворених скупова) или не претставља систем околина ниједног тополошког простора. Да бисмо доказали последњу могућност, довољан је један пример. Нека је E скуп реалних бројева, нека генералисана униформна структура G буде дефинисана својом базом која садржи једну једину релацију ε, при чему $x \varepsilon y$ значи $|x-y|<1$. Ако би скупови $V_\varepsilon(x)$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$, образовали систем околина једног тополошког простора, тада би свака околина тачке x садржала једну околину од x која би била околина сваке своје тачке. Пошто релација ε није последица ниједне друге релације из G, скуп бројева y таквих да је $|x-y|<1$ за фиксирано x морао би бити околина сваке своје тачке. Када би то било, из $|x-y|<1$ и $|y-z|<1$ следило би $|x-z|<1$, што очигледно није случај. Општији пример исте врсте: ако база од G садржи само једну релцаију, да би фамилија скупова $V_\varepsilon(x)$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$, претстављала систем околина једног тополошког простора потребно је и довољно да релација ε буде транзитивна.

Поставља се питање шта у простору E у који је топологија уведена на описани начин претстављају скупови $V_\varepsilon(x)$, $x \in E$, $\varepsilon \in G$. Лако је показати да систем тих скупова задовољава следеће услове:

a) Сваки скуп фамилије $V_\varepsilon(x)$ садржи тачку x.

b) Пресек два скупа фамилије $V_\varepsilon(x)$ садржи неки скуп фамилије $V_\varepsilon(x)$.

c) Скуп чији потскуп припада фамилији $V_\varepsilon(x)$ и сам припада фамилији $V_\varepsilon(x)$.

d) Сваки отворен скуп тополошког простора E који садржи тачку x припада фамилији $V_\varepsilon(x)$.

e) Скуп који са сваком својом тачком x садржи и скуп фамилије $V_\varepsilon(x)$ јесте отворен скуп тополошког простора.

Сваки систем скупова једног тополошког простора називаћемо системом псеудооколина тог тополошког простора ако задовољава услове a) — e).

Очигледно је из дефиниције да систем околина тополошког простора E јесте специјалан систем псеудооколина простора E. Даље, из c) и d) следи да сваки систем псеудоколина од E садржи систем околина простора E.

Разлику између система околина и система псеудоколина претставља чињеница да у дефиницији последњих не захтевамо да свака псеудоколина садржи псеудоколину која би била псеудоколина сваке своје тачке.

Очигледно је да један тополошки простор може садржати разне системе псеудоколина. Например, посматрајмо простор који садржи бесконачно много тачака и који је снабдевен најгрубљом T_1 топологијом (то јест нека је један скуп тачка у том простору затворен онда и само онда кад је коначан). Нека је x једна произвољна тачка тог простора. Свакој тачки простора коренсподирамо један систем скупова на следећи начин: тачки x све бесконачне скупове који садрже x, свакој другој тачки њен систем околина. Добијени систем скупова не претставља систем околина, већ систем псеудоколина.

Међутим, лако је приметити да је појава система псеудоколина доста изузетна, да се код простора у којима влада јача сепарација не могу појавити системи псеудоколина различити од система околина.

На пример, у једном Хаусдорфовом простору који задовољава прву аксиому пребројивости сваки систем псеудоколина је систем околина. Да бисмо то показали, претпоставимо да је P једна псеудоколина једне тачке x тог простора, и да она није околина тачке x. Тада свака околина тачке x садржи тачке из $\mathbf{C}P$. Према томе, x је тачка нагомилавања за $\mathbf{C}P$. Пошто, на основу прве аксиоме пребројивости, тачка x има пребројиву околинску базу, то $\mathbf{C}P$ садржи низ $\{x_n\} = M$ који конвергира ка x. Пошто је простор Хаусдорфов, тај низ нема других тачака нагомилавања. Стога је скуп $M \cup \{x\}$ затворен. Према томе $\mathbf{C}M \setminus \{x\}$ је отворен скуп. Скуп $\mathbf{C}M$ садржи псеудоколину P тачке x и околину $\mathbf{C}M \setminus \{x\}$ сваке друге своје тачке. Стога је отворен. Онда је скуп M затворен. Али скуп M не садржи x иако му је x тачка нагомилавања. Стога у посматраном простору не могу постојати системи псеудоколина различити од система околина.

4. Да бисмо показали да топологија T индуцирана генералисаном униформном структуром G на начин описан у тачки 3 и топологија T' на истом скупу индуцирана униформном структуром која је генерисана помоћу G, нису у општем случају идентичне, довољан је пример. Пример који дајемо показаће знатно више: топологија T у општем случају може бити таква да — не само униформна структура генерисана помоћу G — већ ниједна униформна структура не може генерисати T.

Дефинишимо на скупу реалних бројева следећи низ $\{\rho_n\}$ релација

$$x\rho_i y = \begin{cases} x=0, \quad y = \text{скуп природних бројева} \geqq 2\,, \\ x=n, \quad i \geqq n, \quad y \in \left(n-\dfrac{1}{n},\ n+\dfrac{1}{n}\right), \\ x=n, \quad i < n, \quad y \in \left(n-\dfrac{1}{i},\ n+\dfrac{1}{i}\right), \\ x \neq 0,\ n, \dfrac{3}{2}, \quad y = x. \end{cases}$$

Помоћу низа $\{\rho_n\}$ дефинишимо низ $\{\varepsilon_n\}$ релација на следећи начин: $x\varepsilon_n y$ онда и само онда кад је бар један од следећих исказа тачан $x\rho_n y$, $y\rho_n x$, $x=y$. Релације ε_n су рефлексивне, симетричне и, пошто $\varepsilon_n \Longrightarrow \varepsilon_m$ за $m < n$, претстављају базу једне генералисане униформне структуре G, чију ћемо топологију, непосредно индуцирану, означити са T.

Сваки отворен скуп O топологије T који садржи тачку 0 мора садржати све тачке које су у једној ε релацији са 0. Међутим за свако ε, тачка 0 је у релацији са свим тачкама n. Према томе скуп O мора садржати све тачке n. Пошто садржи тачку n, он мора садржати и све тачке $(n-{}^1/_n,\ n+{}^1/_n)$, јер за свако ε те су тачке у ε релацији са n. Међутим, скуп који се састоји од тачке 0 и свих тачака интервала $(n-{}^1/_n,\ n+{}^1/_n)$ јесте отворен скуп, пошто са тачком O садржи и све тачке које су с њом у ε_1 релацији, са сваком тачком n све тачке које су са њом у релацији ε_n, и најзад, са сваком тачком x из $(n-{}^1/_n,\ n+{}^1/_n)$ све тачке које су с њом у релацији ε_{n+t}, $t=2(2x-3)^{-1}$. Дакле, скуп O је најмањи отворен скуп који садржи тачку 0.

Међутим, $\mathbf{C}O$ није отворен скуп, јер свака околина тачке ${}^3/_2$ садржи тачке које не припадају $\mathbf{C}O$. Посматрајмо затворен скуп $\mathbf{C}O$ и тачку O. Кад би постојале дисјунктне околине O_1 и O_2 тога скупа и те тачке, тада би $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Међутим, O_2 садржи скуп O, као најмањи отворен скуп који садржи тачку O. Стога би $O_1 \subset \mathbf{C}O$, па би било $O_1 = \mathbf{C}O$, што није могућно јер $\mathbf{C}O$ није отворен скуп. Према томе, посматрани тополошки простор није регуларан, па утолико пре ни комплетно регуларан те његова топологија не може бит генерисана ниједном униформном структуром.

5. Став 2. *Потребан и довољан услов да би постојала генералисана униформна структура која би индуцирала дату топологију тополошког простора T, јесте да постоји систем псеудоколина P простора T такав да, ако је F произвољни затворен скуп из T, x произвољна тачка из $\mathbf{C}F$, да тада у P постоји псеудоколина скупа F која не садржи тачку x.*

Последица. *Свака T_1-топологија може се индуцирати једном генералисаном униформном структуром.*

Доказ. (i) Услов је потребан. Претпоставимо да постоји генералисана униформна структура $G=\{\varepsilon\}$ која индуцира једну топологију која не задовољава поменути услов. Тада за сваки систем псеудооколина P постоји затворен скуп F, и тачке $x\in \complement F$, $y\in F$, такве да свака псеудооколина тачке y садржи x. Тада за сваку релацију ε из G важи да $y\varepsilon x$, јер би у супротном случају G индуцирало систем псеудооколина P' у коме y има псеудоколину која не садржи x. Пошто су релације ε симетричне важило би за свако y, $x\varepsilon y$. Према томе, свака псеудооколина од x садржала би y. Специјално, сваки отворен скуп који садржи x садржао би y, па би $y\in \complement F$, што је у контрадикцији са претпоставком.

(ii) Услов је довољан. Постоји по претпоставци један систем псеудооколина P такав да — ако је F затворен скуп и x тачка ван тог скупа — тада постоји у P псеудоколина од F која не садржи x. Радићемо непрекидно у једном таквом, унапред фиксираном, систему псеудоколина P.

Помоћу система псеудооколина P дефинисаћемо један скуп релација, за које ћемо показати да претстављају једну генералисану униформну структуру G. Затим ћемо показати да је топологија генерисана помоћу G идентична топологији простора T.

Посматрајмо једну фамилију C псеудооколина из P која садржи псеудоколину сваке тачке простора T. Такву фамилију називаћемо покривањем простора T. Свако покривање генерише на једноставан начин једну рефлексивну и симетричну релацију ε дефинисану на следећи начин: $x\varepsilon y$ значи да y припада унији псеудооколина из C које садрже x. Пресеком C два покривања C_1 и C_2 назовимо онај скуп псеудоколина који садржи сваки пресек сваке псеудоколине из C_1 са сваком псеудоколином из C_2. Очигледно је да пресек C претставља једно покривање простора T, јер пресек две псеудоколине исте тачке у истом систему псеудоколина претставља псеудоколину те тачке. Релација ε коју C дефинише има за последицу релацију $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2$. Да бисмо то доказали, приметимо да из $x\varepsilon y$ следи да y припада унији псеудоколина из C које садрже x. Значи да y припада једној псеудоколини O из C која садржи x. Тада је O пресек двеју псеудоколина O_1 и O_2 из C_1, односно C_2. Стога је $O\subset O_1$, $O\subset O_2$. Према томе, и O_1 и O_2 су псеудоколине и садрже x и y. Стога је $x\varepsilon_1 y$, $x\varepsilon_2 y$. Дакле $\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon_1\cap\varepsilon_2$. Значи, ако посматрамо скуп свих покривања простора T, он генерише једну фамилију G рефлексивних и симетричних релација која претставља базу једног филтра, дакле базу једне генералисане униформне структуре.

Потребно је да покажемо да је топологија простора T идентична топологији генерисаној помоћу G, то јест да сваки отворен скуп прве топологије јесте отворен скуп друге топологије, и обратно.

Покажимо да сваки отворен скуп O из T јесте отворен скуп топологије генерисане помоћу G. За то је довољно да покажемо да сваком x из O одговара једна релација ε из G таква да из $x\varepsilon y$ следи $y\in O$. Конструисаћемо ту релацију ε. Постоји по претпоставци псеудоколина P_1 затвореног скупа CO која не садржи x. На основу дефиниције псеудоколине скупа тачака и на основу чињенице да сваки скуп који садржи псеудоколину неке тачке јесте псеудоколина те тачке следи да је P_1 псеудоколина сваке тачке из CO. Даље, отворен скуп O је псеудоколина сваке своје тачке. Стога скупови P_1 и O образују једно покривање простора T. Релација дефинисана тим покривањем је таква да из $x\varepsilon y$ следи $y\in O$, јер у супротном случају постојала би нека тачка y из CO чија би псеудоколина P_1 садржала x, што је супротно дефиницији скупа P_1.

Најзад, да сваки отворен скуп генерисан помоћу G јесте отворен скуп топологије T, очигледно је. Јер, ако сваком x из O одговара ε из G такво да O садржи све y који се налазе у ε релацији са x, онда O садржи све y који припадају некој унији псеудоколина једног покривања које садрже x, па O садржи утолико пре све y који припадају једној псеудоколини тачке x, па је отворен скуп топологије T.

Учинимо на крају још једну напомену.

Услов сепарације T_1 — наиме услов да, ако су x и y две произвољне тачке простора, да тада постоји околина од x која не садржи y и околина од y која не садржи x — еквивалентан је привидно општијем услову — да постоји псеудоколина од x која не садржи y, и псеудоколина од y која не садржи x, што је лако видети. Могло би се поверовати стога да је услов нашег става еквивалентан следећем, на изглед јачем, услову: ако је F затворен скуп који не садржи тачку x, тада постоји отворен скуп који садржи F, а не садржи x. Међутим, овај услов није еквивалентан услову става. Например, овај услов не задовољава простор наведен као пример у тачки 4, али тај простор очигледно задовољава услов нашег става.

6. У услову става 2 јавља се појам псеудоколине. Да бисмо, тај појам избегли преформулисаћемо став 2. Доказаћемо, наиме, да важи

Став 2'. *Потребан и довољан услов да би постојала генералисана униформна структура која би индуцирала дату топологију тополошког простора T јесте да сваки коначан скуп у T који је пресек неке фамилије отворених скупова буде затворен.*

Доказ. Довољно је, очигледно, да докажемо еквивалентност услова у ставовима 2 и 2', то јест да покажемо да су следећа два тврђења еквивалентна:

(a) Постоји систем псеудоколина P у простору T такав да ако је F произвољан затворен скуп из T, x произвољна тачка из T, која не припада F, да тада у систему P постоји псеудоколина скупа F која не садржи x.

(d) Сваки коначан скуп који је пресек фамилије отворених скупова јесте затворен.

Увешћемо, ради прегледности доказа, и ознаке за следећа два тврђења:

(*b*) Постоји систем псеудооколина P у простору T такав да ако је x произвољна тачка из T која има околину која не садржи тачку y, тада у P постоји псеудоколина од y која не садржи x.

(*c*) Ако са T' означимо тополошку структуру генерисану на простору E помоћу његове топологије T на следећи начин

T' је топологија директно генерисана системом псеудооколина чију суббазу претстављају сви скупови који се могу приказати као $V(x)\setminus\{y\}$, при чему је $V(x)$ нека околина тачке x у топологији T, и y нека тачка из E која у топологији T има околину која не садржи x, тада је

$$T' \subset T.$$

Еквиваленцију тврђења (a) и (d) доказаћемо тиме што ћемо установити да важе следеће импликације

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a).$$

$(a) \Longrightarrow (b)$. Нека је $V(x)$ околина од x која не садржи y. Тада постоји отворен скуп O који садржи x али не и y. Комплемент тог скупа је затворен, садржи y и не садржи x. Према (*a*) постоји у P псеудооколина тог скупа $\complement O$ која садржи y, али не и x. Та псеудооколина од $\complement O$ је и псеудооколина од y.

$(b) \Longrightarrow (d)$. Претпоставимо да је K коначан скуп који се може приказати као пресек фамилије отворених скупова. Показаћемо да је при услову (*b*) скуп $\complement K$ отворен. Ради тога је довољно да покажемо да у систему псеудооколина P из услова (*b*) скуп $\complement K$ са сваком тачком садржи и једну њезину псеудооколину. Нека су елементи од K, $x_1, x_2, \dots, x_k$. Нека је y произвољна тачка из $\complement K$. Постоји отворен скуп који садржи K а не садржи y. (У супротном случају пресек свих отворених скупова који садрже K садржао би и y, те K не би био пресек фамилије отворених скупова.) Према услову (*b*), пошто постоји околина тачака x_i, $i = 1, 2, \dots, k$ која не садржи y, постоје у P псеудоколине од y, $P_i(y)$, које не садрже x_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Пресек $\bigcap_{i=1}^{k} P_i(y)$ је псеудооколина од y која не садржи ни један од елемената из k, те према томе лежи у $\complement K$. Дакле, $\complement K$ је отворен, па је K затворен скуп.

$(d) \Longrightarrow (c)$. Нека је O' произвољан отворен скуп топологије T'. Тада је $O' = \bigcup_{x\in O'} P(x)$ где се свако $P(x)$ може приказати у облику

$$P(x) = O(x) \setminus W(x),$$

при чему је $O(x)$ отворен скуп топологије T који садржи x, а $W(x) \subset O(x)$ коначан скуп такав да за свако $y \in W(x)$ постоји у топологији T околина од y која не садржи x. Означимо са $W_y(x)$ скуп свих оних елемената из $W(y)$ који имају особину да се око њих могу описати отворени скупови који не садрже x. Можемо писати

$$O' = \bigcup_{y \in O} \bigcup_{x \in P(y)} (O(y) \setminus W_y(x))$$

Потребно је да покажемо да је скуп O' отворен скуп топологије T. Ради тога је довољно да покажемо да је за свако y скуп

$$Q(y) = \bigcup_{x \in P(y)} (O(y) \setminus W_y(x))$$

отворен скуп топологије T.

Приметимо, најпре, да је $O(y) \supset Q(y) \supset O(y) \setminus W(y)$. Стога је $Q(y) = O(y) \setminus Z(y)$, при чему је $Z(y) \subset Q(y)$, $Z(y) \cap \mathbf{C} W_y(x) = \emptyset$ за свако $x \in O(y) \setminus W(y)$ и $Z(y)$ коначан скуп. Међутим, из $\emptyset = Z(y) \cap \mathbf{C} W_y(x)$ за свако $x \in O(y) \setminus W(y)$, следи $Z(y) \subset W_y(x)$ за све $x \in O(y) \setminus W(y)$.

Покажимо да за свако $x \in \mathbf{C} Z(y)$ постоји отворен скуп топологије T који садржи $Z(y)$ а не садржи x. Разликоваћемо три случаја

(i) $x \in \mathbf{C} O(y)$,

(ii) $x \in O(y) \setminus W(y)$,

(iii) $x \in W(y) \setminus Z(y)$.

(i) $O(y)$ је отворен скуп, садржи $Z(y)$, не садржи x.

(ii) Како је $Z(y)$ коначан скуп, нека су његови елементи $z_1, z_2, \ldots, z_k$. За произвољно $x \in O(y) \setminus W(y)$ имаћемо да је $z_i \in W_y(x)$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Стога, према дефиницији скупа $W_y(x)$, постоје отворени скупови O_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ који садрже z_i а не садрже x. Унија тих k отворених скупова јесте отворен скуп који садржи $Z(y)$ а не садржи x.

(iii) Претпоставимо да у овом случају наше тврђење није тачно. Тада би постојало $z_1 \in Z(y)$ и $x_0 \in W(y) \setminus Z(y)$ такви да би сваки отворени скуп који садржи z_1 садржао и x_0. Пошто x_0 не припада $Z(y)$, постојало би једно $u \in P(y) = O(y) \setminus W(y)$ такво да x_0 не би припадало $W_y(u)$. То значи да би сваки отворен скуп који садржи x_0 садржао u. Тада би, дакле, сваки отворен скуп који садржи z_1 садржао u, па z_1 не би припадало $W_y(u)$, што је у контрадикцији са чињеницом да је $Z(y) \subset W_y(x)$ за све $x \in O(y) \setminus W(y)$.

Пошто за свако $x \in \mathbf{C} Z(y)$ постоји отворен скуп који садржи $Z(y)$ а не садржи x, $Z(y)$ је пресек једне фамилије отворених скупова. Пошто је скуп $Z(y)$ такође и коначан, то је он према услову (d) затворен у топологији T. Стога је скуп $O(y) \setminus Z(y) = Q(y)$ отворен у топологији T, што је и требало доказати.

$(c) \Longrightarrow (b)$. Ако са P означимо систем псеудооколина чију суббазу претстављају скупови $V(x) \setminus \{y\}$, где је $V(x)$ нека околина тачке x а y нека ачка која има околину која не садржи x, тада је тај систем псеудооколина O према (c) — један систем псеудооколина простора T. Нека је y тачка која има околину која не садржи x. Тада у P постоји псеудооколина од x која не садржи y — то је, например, произвољно $V(x)\setminus\{y\}$.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Нека је F произвољан затворен скуп простора T, x тачка ван скупа F. За свако $y \in F$ постоји околина $\complement F$ од x која не садржи y. Стога према (b) постоји систем псеудооколина P такав да свако $y \in F$ има псеудоколину која не садржи x. Унија тих псеудооколина јесте псеудоокoлина затвореног скупа F и она не садржи x.

(Саопштено 11. II. 1959)

L'INTRODUCTION DE TOPOLOGIE PAR UNE FAMILLE DE RELATIONS

BOGDAN BAJŠANSKI (BELGRADE)

Soit F une famille de relations réflexives et symmétriques qui sont toutes définies sur un même ensemble X, telle que si $\varepsilon_1 \in F$, $\varepsilon_2 \in F$, alors il existe une relation $\varepsilon \in F$ telle que $\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon_1$, $\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon_2$.

Un sousensemble O de X est un ensemble F-ouvert si pour $x \in O$ existe une relation $\varepsilon = \varepsilon(x) \in F$ telle que $x \varepsilon y$ implique $y \in O$. On démontre que l'ensemble des F-ouverts satisfait aux axiomes topologiques, c. à. d. que les F-ouverts sont des ouverts au sens topologique. La famille de relations F sur X engendre donc une topologie dans X.

Théorème. *Soit X un espace topologique, muni de la topologie τ. Pourqu'il existe une famille de relations F sur X qui engendre la topologie τ dans X, il est nécessaire et suffisant que dans X chaque ensemble fini qui est l'intersection d'une famille d'ensembles ouverts est un ensemble fermé.*

Corrollaire. *Chaque T_1-topologie peut être engendrée par une famille de relations.*