Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

Д. М. СИМЕУНОВИЋ

О КРИТЕРИЈУМИМА ЗА РЕШАВАЊЕ RICCATI-ЕВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПОМОЋУ КВАДРАТУРА

Прво, D. Bernoulli, а затим Euler, показали су да се специјална Riccati-ева једначина

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\lambda x^{\alpha} \tag{1}$$

може решити квадратурама ако је у њој

$$\alpha=-\frac{4k}{2k\pm 1}\quad (k=0,1,2,\ldots)\quad \text{или}\quad \alpha=-2\quad (k\to+\infty). \tag{2}$$

Liouville је доказао да се за вредности параметра α различите од (2) решење једначине (1) не може добити помоћу квадратура нити да га је могуће изразити у коначном облику помоћу елементарних функција.

Што се тиче опште Riccati-еве једначине

$$\frac{dy}{dx}+Py^2+Qy+R=0,\quad (P\neq 0,\quad R\neq 0) \tag{3}$$

где су P, Q, R произвољне функције од x, познато је да се она може свести на линеарну једначину, па према томе и решити помоћу квадратура, ако јој се зна један, ма који, партикуларни интеграл.

Међутим, у литератури се могу наћи и многи специјални критеријуми када је могуће општу Riccati-еву једначину решити квадратурама. Ти критеријуми своде се на одређене релације које морају постојати између коефицијената P, Q, R Riccati-еве једначине (3).

Наводимо неке од тих критеријума:

$$R=CPe^{-2\int Q dx}\left(\int Pe^{-\int Q dx}\,dx\right)^{-\frac{4k}{2k\pm 1}},\quad (C\ \text{константа}); \tag{4}$$

специјално, за $k=0$, следи одавде

$$R=CPe^{-2\int Q dx}, \tag{5}$$

$$4R=\frac{Q^2}{P}+2\left(\frac{Q}{P}\right)'+CP; \tag{6}$$

$$R=S^{-\frac{p}{2p+1}}\left(\frac{QS^{\frac{p}{2p+1}}+pPS^{-\frac{p+1}{2p+1}}}{2P}\right)'+PS^{-\frac{2p}{2p+1}}\left(\frac{QS^{\frac{p}{2p+1}}+pPS^{-\frac{p+1}{2p+1}}}{2P}\right)^2+ \tag{7}$$

$$+CPS^{-\frac{2p}{2p+1}}, \qquad [S=-(2p+1)\int Pdx\,,\ p \text{ константа}];$$

$$\left\{\begin{aligned} &P=\frac{1}{a}e^{-\int\frac{b}{a}dx},\quad Q=\frac{1}{a}\left(b-2e^{\int\frac{b}{a}dx}\cdot\int\frac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}dx}dx\right),\\ &R=\frac{1}{a}\left[c+C-\left(\int\frac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}dx}dx\right)^2\right].\end{aligned}\right. \tag{8}$$

(a, b, c произвољне функције од x, а C константа);

(9) $P+Q+R=0$ и општије $a^2P+abQ+b^2R=0$, (a и b константе);

(10) $\Psi'-P\Psi^2-\Phi\Psi+R=0$, где je $\Phi=-(Q+2P\Psi)$,

$\left(\text{специјално са } \Phi=0,\ \ \Phi=-Q+2\sqrt{PR},\ \Phi=-\frac{P'}{P}\right)$;

(11) $P(a'+Pa^2+Qa+R)-\left(Q+2Pa-\frac{P'}{P}\right)'=0$, ($a$ функција од x).

Критеријум (4) потиче од Пејовић-а [1], (7) и (8) од Карапанџић-а [2], (6) од Бугаев-а [2], (5) од Abel-а [3], (9) од Kurenskog [3 стр. 23—24], (10) од Митриновић-а [3 стр. 23—24], док критеријум (11) потиче од Abdelkader-а [4].

У овом раду дајемо много општији критеријум, који наведене садржи као специјалне случајеве. Ипак, основни циљ нам je да укажемо да je сваки такав критеријум еквивалентан захтеву да општа Riccati-ева једначина има партикуларни интеграл одређеног типа; у суштини, дакле, једино познавање партикуларног интеграла омогућује интеграцију квадратурама.

II

Показаћемо сада да се сви горе наведени критеријуми могу добити као специјални случајеви једног општијег критеријума, из којег се може извести специјализацијом још бесконачно много других разних специјалних критеријума. При томе се нећемо обазирати на услове о егзистенцији интеграла, jep je извођење чисто формалног карактера.

Узећемо произвољну функцију $u(x)$ и извршити замену променљивих

$$\xi=\int Pe^{-\int(Q+2Pu)dx}\,dx,\quad y=u+\eta e^{-\int(Q+2Pu)dx}. \tag{α}$$

На тај начин ће се општа Riccati-ева једначина свести на канонички облик

$$(\beta) \qquad \frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=F(\xi),$$

где је

$$(\gamma) \qquad F(\xi)=-\frac{1}{P}\left(\frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R\right)e^{2\int(Q+2Pu)dx}.$$

Функцији $F(\xi)$ у (β) може се дати облик какав се хоће, одакле с обзиром на (α) и (γ) имамо

$$(\gamma') \qquad \frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=-Pe^{-2\int(Q+2Pu)dx}\cdot F\left\{\int Pe^{-\int(Q+2Pu)dx}dx\right\}.$$

Видимо да се из (γ') може наћи произвољно много веза за P, Q, R при којима се функцији $F(\xi)$ у (β) може дати унапред одређен облик. За то је довољно да се произвољној функцији $u(x)$ дају разне одређене вредности.

Ми ћемо се овде задржати на једном специјалном случају функције $F(\xi)$ у једначини (β). Према напред реченом, једначина (β) моћи ће се решити квадратурама ако је у њој

$$F(\xi)=\lambda\xi^{-\frac{4k}{2k\pm1}},$$

па ће се тада и дата општа Riccati-ева једначина моћи решити квадратурама.

Можемо, дакле, рећи: *ако постоји функција* $u(x)$, *константа* λ *и цео позитиван број* k, *тако да је*

$$(12) \qquad \frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=-\lambda Pe^{-2\int(Q+2Pu)dx}\cdot\left[\int Pe^{-\int(Q+2Pu)dx}dx\right]^{-\frac{4k}{2k\pm1}},$$

општа Riccati-ева једначина може се решити квадратурама; при томе долази у обзир и $k=0$ *и* $k\to+\infty$.

III

Узимајући специјалне u, k и λ, добићемо из (12) разне специјалне критеријуме. Тако за $u=0$ добијамо критеријум (4)

$$(A) \qquad R=-\lambda Pe^{-2\int Qdx}\cdot\left(\int Pe^{-\int Qdx}dx\right)^{-\frac{4k}{2k\pm1}}.$$

За $k=0$ излази одавде критеријум (5) док за свако друго $k=1,2,\dots$ и $k\to+\infty$ добија се други.

Десна страна у (12) упростиће се ако у њој узмемо $u=-Q/2P$. Тада добијамо, извршивши све рачуне,

$$(B) \qquad 4R=\frac{Q^2}{P}+2\left(\frac{Q}{P}\right)'-4\lambda P\left(\int Pdx\right)^{-\frac{4k}{2k\pm1}}.$$

За $k=0$ имамо одавде критеријум (6), но за свако друго $k=1,2,\ldots$ и $k\to+\infty$ добиће се други.

Специјално за $k=0$, релација (12) гласи

$$\text{(C)}\qquad \frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=-\lambda Pe^{-2\int(Q+2Pu)dx}.$$

Критеријум (7) ће се добити кад се узме $u=-\dfrac{Q}{2P}-\dfrac{p}{2S}$, а критеријум (8) кад се узме $u=-e^{-\int\frac{b}{a}dx}\cdot\displaystyle\int\frac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}dx}dx$. Уосталом, може се у (C) узети за u шта се хоће; свако ново u даће и нови критеријум.

Узмемо ли у (12) $\lambda=0$, добићемо

$$\text{(D)}\qquad \frac{du}{dx}+Pu^2+Qu+R=0,$$

што значи да за u треба узети ма какав партикуларни интеграл дате Riccati-еве једначине, што је позната ствар. У критеријуму (9) узето је да она има константу $y=a/b$ за партикуларни интеграл, специјално $y=1$. У (10) је узето да је партикуларни интеграл $y=-(Q+\Phi)/2P$, док је у (11) узет партикуларни интеграл $y=-a(x)-Q/P+P'/P^2$.

IV

На основи (D), јасно се види да критеријуми (9), (10) и (11) оперишу са унапред датим партикуларним интегралима опште Riccati-еве једначине: унапред дата функција $y=\varphi(x,P,Q,R)$ прогласи се партикуларним интегралом опште Riccati-еве једначине, па се онда добију услови за P,Q,R под којима ће то бити (критеријум). Пошто је једном један партикуларни интеграл познат, она се може свести на линеарну, тј. решити квадратурама.

Показаћемо да је у основи ово принцип и у критеријумима (5) до (8). Тада се општа Riccati-ева једначина своди на канонички облик

$$\frac{d\eta}{d\xi}+\eta^2=\lambda,$$

за коју је лако уочити партикуларни интеграл. На тај начин критеријуми (5) до (8) не значе ништа друго него да су општој Riccati-евој једначини наметнути редом ови партикуларни интеграли:

$$\sqrt{\lambda}e^{-\int Qdx};\quad -Q/2P+\sqrt{\lambda};\quad -Q/2P+p/2S+\sqrt{\lambda}S^{-\frac{p}{2p+1}};$$

$$e^{-\int\frac{b}{a}dx}\left(\sqrt{\lambda}-\int\frac{c}{a}e^{\int\frac{b}{a}dx}dx\right).$$

Слично се може показати и за општије критеријуме (A), (B) и (C).

V

Р. Кашанин [5] у једном свом раду испитивао је да ли се може помоћу партикуларног интеграла диференцијалне једначине

$$\frac{du}{dx} = M_1 y^{m_1} + M_2 y^{m_2} + \cdots + M_k y^{m_k}, \quad 0 \leqq m_1 < m_2 \cdots < m_k \tag{13}$$

снизити степен полинома на десној страни; овде су m_i цели бројеви, а M_i ма какве функције од x, но које нису идентички једнаке нули. При томе се може претпоставити да бројеви $m_i - 1$ немају заједничког делитеља (редукована једначина) јер, ако имају заједнички делитељ ν онда већ супституција $y = Y^{-\nu}$ смањује степен.

Резултат, до кога је дошао Р. Кашанин, је ово: да би, не претпостављајући ништа о функцијама M_i, постојала за сваки партикуларни интеграл y_1 супституција $y = \varphi(y_1, Y)$ којом ће се смањити степен полинома у редукованој једначини (13), потребно је и довољно да буде $m_k \leqq 2$, тј. да једначина буде или Riccati-ева или линеарна. Иначе је то могуће постићи само код извесних специјалних једначина тога типа, и то са нарочитим партикуларним интегралима, а не са сваким.

Због свега овога је јасно откуда толики разноврсни и многобројни критеријуми за решавање опште Riccati-еве једначине помоћу квадратура: од свих редукованих једначина облика (13) само се код Riccati-еве партикуларни интеграл може употребити за снижавање степена полинома по y који у њој долази, тј. за свођење на линеарну једначину, тј. за решавање помоћу квадратура. Сви до сада дати критеријуми, ма којим начином да су добијени, нису ништа друго него везе између P, Q, R које се добијају када се извесна функција од x, P, Q, R прогласи партикулирним интегралом опште Riccati-еве једначине.

(Саопштено 7-X-1959)

БИБЛИОГРАФИЈА

[1] Т. Пејовић — Диференцијалне једначине. Егзистенција решења, Београд 1958.

[2] Ђ. Карапанџић — Примена трансформација додира на интеграцију обичних диференцијалних једначина (теза). Посебно издање „Гласника" Шумарског факултета у Београду, 1958.

[3] E. Kamke — Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Chelsea Publishing Company, New York, 1948.

[4] M. A. Abdelkader — Solutions by quadrature of Riccati and second-order linear differential equations. *American Math. Monthly* **66**, No 10 (1959).

[5] Р. Кашанин — О упрошћавању диференцијалних једначина првог реда помоћу њихових партикуларних интеграла. *Глас Српске краљевске академије наука*, **CXXXIV** (1929).

SUR LA SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DE RICCATI A L'AIDE DE QUADRATURES

Par D. M. SIMEUNOVIĆ (Belgrade)

La transformation

$$(a) \qquad \xi = \int P e^{-\int (Q+2Pu)dx} dx, \quad y = u + \eta\, e^{-\int (Q+2Pu)dx},$$

où u représente une fonction arbitraire de x, réduit l'équation générale de Riccati

$$(b) \qquad \frac{dy}{dx} + Py^2 + Qy + R = 0,$$

à la forme

$$(c) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = F(\xi),$$

où $F(\xi)$ est donnée par

$$(d) \qquad F(\xi) = -\frac{1}{P}\left(\frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R\right) e^{2\int (Q+2Pu)dx}.$$

Etant donné que $F(\xi)$ est complètement arbitraire, on obtient, en tenant compte de (a), (b) et (d)

$$(e) \qquad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -Pe^{-2\int (Q+2Pu)dx} F\left\{\int Pe^{-\int (Q+2Pu)dx} dx\right\}.$$

En particulier, si $F(\xi) = \lambda \xi^\alpha$, $\lambda = \text{const}$, $\alpha = -\dfrac{4k}{2k \pm 1}$, $k = 0, 1, \ldots$ (même pour $k = \infty$, c. à. d. $\alpha = -2$), l'équation (c) se réduit à l'équation particulière de Riccati résoluble par quadratures. Dans ce cas la relation (e) prend la forme

$$(f) \qquad \frac{du}{dx} + Pu^2 + Qu + R = -\lambda P e^{-2\int (Q+2Pu)dx}\left[\int P e^{-(Q+2Pu)dx} dx\right]^{-\frac{4k}{2k\pm 1}}.$$

Autrement dit: s'il existe la fonction u, la constante λ et un entier positif k tel que la condition (f) soit satisfaite, l'équation générale de Riccati (b) peut-être resolue par quadratures (les valeurs $k = 0$ et $k = \infty$ sont aussi admises).

De cette manière la relation (f) est un critère général donnant la solution de l'équation de Riccati par quadratures. En choisissant u, k et λ d'une manière convenable, on obtient divers critères connus[1]: de Peyovitch (4), d'Abel (5), de Bougaeff (6), de Karapandžitch (7), (8), de Kurensky (9), de Mitrinovitch (10) et d'Abdelkader (11).

Notre procédé général met en evidence que tout critère résulte en imposant à l'équation de Riccati une intégrale particulière. Autrement dit, si l'on impose une fonction donnée à l'avance $\varphi(x, P, Q, R,)$ comme l'intégrale particulière de l'équation de Riccati, on obtient une relation entre P, Q et R et cette relation est le critère en question.

[1] Voir le texte en serbe.