Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

РАСТКО СТОЈАНОВИЋ

О КРЕТАЊУ НЕПРЕКИДНИХ ДЕФОРМАБИЛНИХ МАТЕРИЈАЛНИХ СИСТЕМА СА КОНАЧНИМ БРОЈЕМ ПАРАМЕТАРА

1. УВОД

При проучавању кретања недеформабилног материјалног система (т.зв. чврстог тела) унапред уводимо претпоставку да су растојања међу тачкама система за време кретања непромењлива. Увођењем двају координантних система, рецимо x^i и $\overline{x}^i$ $(i=1,2,3)$, уз претпоставку да је за време кретања $\overline{x}^i=\text{const.}$ за сваку тачку система, проучавање кретања недеформабилног система је еквивалентно са проучавањем групе изометриских трансформација

$$x^i=f^i(\overline{x}^1,\overline{x}^2,\overline{x}^3;\ a^1,a^2,\ldots,a^6),\equiv f^i(\overline{x},a); \tag{1.1}$$

$$\overline{x}^i=\varphi^i(x^1,x^2,x^3;\ a^1,a^2,\ldots,a^6),\equiv \varphi^i(x,a), \tag{1.2}$$

где су a^α $(\alpha=1,2,\ldots,6)$ параметри трансформационе групе и играју улогу координата чврстог тела. Како су $\overline{x}^i$ при кретању непромењливе величине, то ће x^i зависити од времена преко параметара a^α и

$$a^\alpha=a^\alpha(t) \tag{1.3}$$

јесу коначне једначине кретања. Познато је да групе изометриских трансформација у тродимензионом еуклидском простору E_3 зависе од шест међусобно независних параметара, чији се број може смањити само ограничењем слободе покретног триједра (односно тела) везама.

Ако су g_{ij} и $\overline{g}_{ij}$ координате метричког тензора у E_3 у односу на координантне системе x^i и $\overline{x}^i$, респективно, потребан и довољан услов да трансформације (1.1) и (1.2) одре уују надеформабилно кретање јесте

$$2\overline{e}_{ij}=g_{kl}\{f(\overline{x},a)\}\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^j}-\overline{g}_{ij}=0, \tag{1.4}$$

или

$$2e_{ij}=\overline{g}_{kl}\{\varphi(x,a)\}\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^j}-g_{ij}=0. \tag{1.5}$$

Међутим, ако горњи услови нису задовољени, кретање одређено једначинама (1.1) и (1.2) није недеформабилно, а величине e_{ij} и $\bar{e}_{ij}$ одређују Green-St. Venant-ову меру деформације при таквом кретању.

Циљ овог рада је проучавање кретања непрекидног материјалног система под дејством датих сила, а под претпоставком да је кретање одређено неком непрекидном трансформационом r-параметарском групом G_r која, у општем случају, није група изометрије, тј. $e_{ij} \neq 0$. Природно, можемо допустити да групе изометрије буду подгрупе опште G_r. Општа расуђивања ћемо применити на случај када је посматрани материјални систем еластичан, при чему ћемо се ограничити на мале деформације како би веза између напона и деформације била линеарна и тиме у примерима избегнуте небитне тешкоће аналитичке природе.

2. ОПШТА ТЕОРИЈА

Свако кретање непрекидног материјалног система можемо посматрати као непрекидну трансформацију неког подручја S_0 (почетна конфигурација система) у неко друго које се мења са временом (конфигурација $S(t)$). Нека је x^i у E_3 неки непроменљив систем координата. Свакој тачки P_0 у конфигурацији S_0 одговара тачка P у S и обрнуто, тако да између тачака у S_0 и S постоји обострано једнозначна коресподенција са пунктуалном трансформацијом $x^i_{P_0} \to x^i_P$:

$$x^i_P = f^i(x_{P_0}), \tag{2.1}$$

и обрнуто

$$x^i_{P_0} = \varphi^i(x_P). \tag{2.2}$$

Овој пунктуалној трансформацији можемо асоциирати координатну увођењем превученог[1] (в. [1], стр. 102) координатног система $\bar{x}^i$ на тај начин што претпостављамо да је у односу на нови систем координата $\bar{x}^i$:

$$\bar{x}^i_P \overset{def}{=} x^i_{P_0} = \varphi^i(x_P). \tag{2.3}$$

Како овај израз вреди за све тачке подручја S_0 и S, то је $\bar{x}^i$ превучени координатни систем — превучен пунктуалном трансформацијом — а одговарајуће координатне трансформације су

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x) \qquad \mathrm{Det}\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \tag{2.4}$$

и инверзне

$$x^i = f^i(\bar{x}). \tag{2.5}$$

[1] Бројеви у угластим саградама [ ] односе се на списак литературе приложен на крају.

Из дефиниције превученог координатног система произилази да за сваку тачку P у S и за сво време кретања јесте $\bar{x}^i = \mathrm{const}$. Једначине (2.5) и (2.6) претстављају везу између *материјалних* координата $\bar{x}^i$ тачака у S и *просторних* координата x^i истих материјалних тачака.

Наша основна претпоставка је сада да *трансформације* (2.5) *образују неку непрекидну коначну r-параметарску групу* G_r. Тада је кретање у општем случају одређено једначинама

$$
(2.6)\qquad
\begin{aligned}
x^i &= f^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3;\ a^1, a^2, \ldots, a^r) \equiv f^i(\bar{x}, a),\\
\bar{x}^i &= \varphi^i(x^1, x^2, x^3;\ a^1, a^2, \ldots, a^r) \equiv \varphi^i(x, a),
\end{aligned}
$$

при чему су

$$
(2.7)\qquad a^\alpha = a^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)
$$

непрекидне функције времена и претстављају коначне једначине кретања; вредности параметара a^α у датом тренутку времена одређују у потпуности конфигурацију S. За неке вредности a_0^α трансформације (2.6) су идентичне,

$$
(2.8)\qquad x^i = f^i(\bar{x}, a_0) \equiv \bar{x}^i; \quad \bar{x}^i = \varphi^i(x, a_0) \equiv x^i
$$

и одговарају почетној конфигурацији S_0.

За материјалне системе чије је кретање у потпуности одређено неком групом G_r, где је r коначан цео број, казаћемо да имају r степени слободе.

Брзина тачке P у S је

$$
v^i \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{dx^i}{dt} \equiv x'^i.
$$

Међутим, просторне координате у (2.6) зависе од времена преко a^α, па је[2]

$$
(2.10)\qquad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} a'^\alpha \equiv F_\alpha^i(\bar{x}, a)\, a'^\alpha, \qquad \left(a'^\alpha \equiv \frac{da^\alpha}{dt}\right)
$$

или, према првој Lie-овој основној теореми теорије непрекидних трансформационих група ([2], стр. 376) $\dfrac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} = \xi^i_{(\lambda)}(x) A_\alpha^{(\lambda)}(a)$ и

---

[2] Користећи се у овом раду елементима тензорског рачуна доследно ћемо користити и конвенцију за сабирање по два пута поновљеним индексима. Уколико у тексту не буде другачије назначено латински индекси ће узимати вредности 1, 2, 3, а грчки 1, 2, ..., r. Индекси који нису тензорског карактера биће стављени у заграду да бисмо избегли нејасности. На пример, $\xi^i_{(\lambda)}$ значи i-ту контраваријанту координату вектора $\vec{\xi}_{(\lambda)}$ а индекс λ означава редни број вектора, којих је укупно r: $\vec{\xi}_{(1)}, \vec{\xi}_{(2)}, \ldots, \vec{\xi}_{(r)}$.

(2.11) $$v^i = \xi^i_{(\lambda)}(x)\, A^{(\lambda)}_\alpha(a)\, a'^\alpha,$$

где $\xi^i_{(\lambda)}$ претстављају основе векторе померања групе, контраваријантне при координатним трансформацијама у E_3. Изрази (2.10) и (2.11) нам смогућују да напишемо израз за живу силу система S.

Нека је g_{ij} основни метрички тензор и нека је m_p маса везана за тачку (делић) P; имамо

(2.12) $$2T = \sum_P m_p\, g_{ij}\, \xi^i_{(\lambda)}\, \xi^j_{(\mu)}\, A^{(\lambda)}_\alpha\, A^{(\mu)}_\beta\, a'^\alpha\, a'^\beta,$$

односно

(2.13) $$2T = \sum_P m_p\, g_{ij}\, F^i_\alpha(\bar{x}, a)\, F^j_\beta(\bar{x}, a)\, a'^\alpha\, a'^\beta.$$

Конфигурација $S(t)$ и кинетичка енергија посматраног материјалног система су потпуно одређени параметрима a^α групе G_r. Стога можемо посматрање материјалног система у E_3 да сведемо на посматрање кретања *једне* тачке у групном простору Π_r у коме су координате $a^1, \ldots, a^r$ а риманска метрика је одређена кинематичким линиским елементом

(2.14) $$ds^2 = 2T\, dt^2 \equiv h_{\alpha\beta}\, da^\alpha\, da^\beta,$$

где је

(2.15) $$h_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \sum_P m_p g_{ij}\, \xi^i_{(\lambda)}\, \xi^j_{(\mu)}\, A^{(\lambda)}_\alpha\, A^{(\lambda)}_\mu = \sum_P m_p\, g_{ij} F^i_\alpha\, F^j_\beta.$$

Π_r је конфигурациони простор система S. Свакој тачки у Π_r одговара једна потпуно одређена конфигурација S и обрнуто.

Величине

(2.16) $$J_{\lambda\mu} \overset{def}{=} \sum_P m_p\, g_{ij}\, \xi^i_{(\lambda)}\, \xi^j_{(\mu)} = J_{\mu\lambda}$$

зваћемо коефицијентима инерције посматраног система у односу на параметре a^λ и a^μ.

Термин „коефицијенти инерције" смемо да уведемо овде стога што претстављају непосредну генерализацију онога што у теорији недеформабилног кретања називамо коефицијентима инерције, премда се обично другачије нешто дефинишу.

У E_3, у односу Декартове правоугле координате, вектори $\xi^i_{(\lambda)}$ имају за групу изометриских трансформација (т. зв. групу кретања) координате

$$\vec{\xi}_{(1)} = \{1, 0, 0\};\ \vec{\xi}_{(2)} = \{0, 1, 0\};\ \vec{\xi}_{(3)} = \{0, 0, 1\};$$

$$\vec{\xi}_{(4)} = \{0, x^3, -x^2\};\ \vec{\xi}_{(5)} = \{-x^3, 0, x^1\};\ \vec{\xi}_{(6)} = \{x^2, -x^1, 0\}.$$

Изрази за коефицијенте инерције $J_{\lambda\mu}$, одређени са (2.16), пошто је $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

(Kronecker-ови симболи), дају

$$J_{11}=J_{22}=J_{33}=\Sigma\, m_P \equiv M \text{ (укупна маса система)}$$

$$J_{44}=\sum_P m_P\,[(x_P^2)^2+(x_P^3)^2];\; J_{55}=\sum_P m_P\,[(x_P^3)^2+(x_P^1)^2];\; J_{66}=\sum_P m_P\,[(x_P^1)^2+(x_P^2)^2];$$

$$J_{12}=J_{13}=J_{14}=J_{23}=J_{25}=J_{36}=0;$$

$$J_{15}=-\sum_P m_P\,x_P^3;\; J_{16}=\sum_P m_P\,x_P^2;\; J_{24}=\sum_P m_P\,x_P^3;\; J_{26}=-\sum_P m_P\,x_P^1;$$

$$J_{34}=-\sum_P m_P\,x_P^2;\; J_{35}=\sum_P m_P\,x_P^1;$$

$$J_{45}=-\sum_P m_P\,x_P^1\,x_P^2;\; J_{56}=-\sum_P m_P\,x_P^2\,x_P^3;\; J_{64}=-\sum_P m_P\,x_P^3\,x_P^1.$$

Према томе, матрица $\{J_{\lambda\mu}\}$ је идентична са матрицом инерције чврстог тела ([4], стр. 5).

Сада за живу силу деформабилног материјалног система S можемо писати

$$2T=h_{\alpha\beta}\,a'^{\alpha}\,a'^{\beta};\quad h_{\alpha\beta}=J_{\lambda\mu}\,A_{\alpha}^{(\lambda)}\,A_{\beta}^{(\mu)}, \tag{2.17}$$

при чему коефицијенти $J_{\lambda\mu}$ не зависе од параметара a^{α}.

Нека на тачке P система S делују *силе* ${}_P X_i$. Према (2.11) је

$$\delta x_P^i=\left(\frac{\partial x^i}{dx^{\alpha}}\right)_P \delta a^{\alpha}=\xi_{(\lambda)}^i\,A_{\alpha}^{(\lambda)}\,\delta a^{\alpha}, \tag{2.18}$$

па за рад сила X_i на померањима δx^i можемо писати

$$\delta A=\sum_P {}_P X_i\,\delta x_P^i=\sum_P {}_P X_i\,\xi_{(\lambda)}^i\,A_{\alpha}^{(\lambda)}\,\delta a^{\alpha}.$$

Величине

$$X_{\alpha} \overset{def}{=} \sum_P {}_P X_i\,\xi_{(\lambda)}^i\,A_{\alpha}^{(\lambda)} \tag{2.19}$$

очигледно зависе само од координата репрезентативне тачке у групном простору Π_r у коме претстављају координате коваријантног вектора и зваћемо их генералисаним координатама силе у Π_r.

Полазећи од d'Alembert-овог принципа, можемо сада извести *диференцијалне једначине кретања*. Нека је ${}_P X_i$ сила која делује на тачку P, нека су x_P^i координате те тачке и нека је $2T_P$ њена жива сила; укупна жива сила читавог система S износи $2T=2\sum_P T_P$, где се збир протеже на све тачке система. D'Alembert-ов принцип гласи

$$\sum_P [X_i(x_P)-m_P W_{Pi}]\,\delta x_P^i = 0, \tag{2.20}$$

где је m_P маса тачке P, а W_{Pi} њено убрзање, док је δx_P^i виртуелно померање. Како је

$$m_P W_{Pi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i},$$

и

$$2\,T_P = m_P g_{ij}(x_P)\,x_P'^i\,x_P'^j,$$

за (2.20) можемо писати

$$\sum_P\left[X_i(x_P) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i}\right)\right]\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha}\right)_P \delta a^\alpha = 0. \tag{2.21}$$

Већ смо у (2.19) ставили да је

$$\sum_P X_i\,\delta x^i = X_\alpha\,\delta a^\alpha.$$

За виртуелни рад инерционих сила имамо

$$\sum_P\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i}\right)\delta x_P^i = \sum_P\left[\frac{d}{dt}(g_{ij}\,x'^j) - g_{kl}\,\Gamma_{ij}^k\,\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^l}{dt}\right]_P\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha}\right)_P \delta a^\alpha, \tag{2.22}$$

где је Γ_{ij}^k Christoffel-ов симбол друге врсте формиран с обзиром на g_{ij}. Развијањем десне стране израза (2.22), узимајућу у обзир (2.16) и (2.17), добићемо да је

$$\sum_P\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_P}{\partial x_P'^i} - \frac{\partial T_P}{\partial x_P^i}\right)\delta x_P^i = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial a^\alpha}\right)\delta a^\alpha.$$

Заменом овога у (2.20) коначно за d'Alembert-ов принцип следи израз

$$\left[X_\alpha - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'^\alpha}\right)\right]\delta a^\alpha = 0.$$

Како су варијације δa^α потпуно произвољне и слободне, добивамо диференцијалне једначине кретања у облику

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial a^\alpha} = X_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.23}$$

Интеграли $a^\alpha = a^\alpha(t, a_0, a_0')$, где је $a_0'^\alpha$ почетна брзина репрезентативне тачке у конфигурационом групном простору, у потпуности одређују кретање непрекидног материјалног система S, ако је кретање дато групом G_r.

3. ГРУПЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛНИХ ТРАНСФОРМАЦИЈА

У многим механичким процесима су отступања конфигурације S од почетне S_0 довољно мала да трансформације (2.6) смемо сматрати линеарним. Развијањем трансформационих једначина у ред у околини a_0^α добивамо

$$(3.1)\quad x^i=\bar{x}^i+(a^\alpha-a_0^\alpha)\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha}\right)_0+\frac{1}{2}(a^\alpha-a_0^\alpha)(a^\beta-a_0^\beta)\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial a^\alpha\,\partial a^\beta}\right)_0+\cdots$$

Сматрајмо сада разлике $a^\alpha-a_0^\alpha$ довољно малим тако да све чланове реда у којима се те разлике јављају на степену вишем од првог смемо занемарити; тада је

$$(3.2)\qquad x^i=\bar{x}^i+(a^\alpha-a_0^\alpha)\,\xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})\,A_\alpha^{(\lambda)}(a_0)\,,$$

јер за $a^\alpha=a_0^\alpha$ имамо $x^i\equiv\bar{x}^i$ и

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha}\right)_0=\xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})\,A_\alpha^{(\lambda)}(a_0)\,.$$

Како је $A_\alpha^{(\lambda)}(a_0)=\mathrm{const.}$, можемо ставити да су

$$c^\lambda\equiv(a^\alpha-a_0^\alpha)\,A_\alpha^{(\lambda)}(a_0)$$

сада нови параметри трансформационе групе и

$$(3.3)\qquad x^i=\bar{x}^i+c^\lambda\,\xi^i_{(\lambda)}(\bar{x}).$$

Ове трансформације су, очигледно, идентичне за $c_0^\lambda=0$.

Вектори $\xi^i_{(\lambda)}$ одређују r једнопараметарских трансформација из којих се састоји наша посматрана G_r. У односу на сваку од ових трансформација можемо одредити одговарајућу инфинитезималну еф[illegible]рм[illegible] $_{ij}$ према (1.4), што се своди на

$$(3.4)\qquad \bar{e}_{(\lambda)ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i\xi_{(\lambda)j}+\nabla_j\xi_{(\lambda)i})\,,$$

где је ∇_i симбол коваријантног диференцирања по координати x^i а у односу на метрику g_{ij}. Укупна деформација система ће сада бити дата са

$$(3.5)\qquad \bar{e}_{ij}=c^\lambda\,\bar{e}_{(\lambda)ij}\,,$$

а $\bar{e}_{(\lambda)ij}$ су компонеталне деформације у одговарајућим правцима $\xi^i_{(\lambda)}$.

Из (3.3) за брзину система S имамо

$$v^i=\frac{dx^i}{dt}=\xi^i_{(\lambda)}\,c'^\lambda$$

па ће, према (2.13), жива сила бити

$$2T = \bar{J}_{\lambda\mu} c'^{\lambda} c'^{\mu},$$

при чему су

$$\bar{J}_{\lambda\mu} = \sum_P m_P \bar{g}_{ij} \xi^i_{(\lambda)} \xi^j_{(\mu)} \tag{3.6}$$

коефицијенти инерције за померања у правцима $\xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})$ и $\xi^i_{(\mu)}(\bar{x})$, тј. у односу на координате c^{λ} и c^{μ} система у групном конфигурационом простору.

Како су виртуелна померања сада

$$\delta x^i = \xi^i_{(\lambda)}(\bar{x})\, \delta c^{\lambda}, \tag{3.7}$$

за елементарни рад можемо писати

$$\delta A = \sum_P {}_P X_i\, \xi^i_{(\lambda)}(\bar{x}_P)\, \delta c^{\lambda}, \tag{3.8}$$

па су генералисане силе

$$X_{\alpha} = \sum_P {}_P X_i\, \xi^i_{(\alpha)}(\bar{x}_P). \tag{3.9}$$

У случају инфинитезималних трансформација диференцијалне једначине кретања ће имати једноставнији облик

$$\bar{J}_{\lambda\mu} c''^{\lambda} = X_{\mu}. \qquad \left(c''^{\lambda} \equiv \frac{d^2 c^{\lambda}}{dt^2}\right) \tag{3.10}$$

4. ПРИМЕНА НА ЕЛАСТИЧНЕ СИСТЕМЕ

Диференцијалне једначине (2.23) могу обухватити најопштији случај сила. Међутим, овде ћемо посматрати случај када је посматрани метеријални систем S_0 еластичан: при кретању $S_0 \to S$ јављају се унутрашње силе — напони — који са своје стране утичу на кретања. Претпоставићемо да је систем S_0 хомоген и изотропан и да су померања довољно мала, тако да за везу између напона и деформације можемо узети Hooke-ов закон

$$\bar{t}_{ij} = C_{ij..}{}^{kl} \bar{e}_{kl} = \lambda \bar{\mathbf{I}}_1 \delta_{ij} + 2\mu\, \bar{e}_{ij} \tag{4.1}$$

где су λ и μ Lamé-ове константе еластичности, а $\bar{\mathbf{I}}_1$ прва инваријанта тензора деформације $\bar{e}_{ij}$.

Ако са dV_0 обележимо запремински елемент посматраног еластичног тела у конфигурацији S_0, за рад еластичних сила на виртуелним померањима имамо познати израз

(4.2) $$\delta A' = \int\limits_{V_0} \bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\,\bar{t}_{ij}\,\delta\,\bar{e}_{kl}\,dV_0\,.$$

Како је према (3.5)

(4.3) $$\delta\bar{e}_{kl} = \bar{e}_{(\lambda)kl}\,\delta c^{\lambda},$$

јер су у (3.5) само параметри c^{λ} променљиви, добивамо

(4.4) $$\delta A' = \int\limits_{V_0} \bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\,\bar{t}_{ij}\,\bar{e}_{(\lambda)kl}\,dV_0\,\delta c^{\lambda}\,.$$

За генералисане еластичне силе можемо сада писати

(4.5) $$X'_{\lambda} \stackrel{def}{=} \int\limits_{V_0} \bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl}\,c_{ij..}{}^{rq}\,\bar{e}_{rq}\,\bar{e}_{(\lambda)kl}\,dV_0\,.$$

Опште диференцијалне једначине кретања сада ће гласати

(4.6) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial a'^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial a^{\alpha}} = X_{\alpha} + X'_{\alpha}\,,$$

где су X_{α} генералисане запреминске силе, а X'_{α} генералисане еластичне силе.

Ако се посматрани материјални систем креће под једновременим дејством и запреминских и еластичних сила није нужно да трансформације које карактеришу то кретање буду у потпуности инфинитезималне. Ово у толико пре што спољне запреминске силе, према томе каквим је везама ограничена слобода кретања посматраног тела, могу довести до једновременог — у односу на известан број параметара — деформабилног и — у односу на остале параметре — недеформабилног кретања. За параметре у односу на које је кретање деформабилно претпостављаћемо да се мало разликују од вредности које имају у почетном положају, док остали могу имати произвољне вредности.

За примену на конкретне проблеме потребно је одредити — или на ма који начин унапред познавати — трансформациону групу G_r која одређује карактер посматраног кретања. Док у случају недеформабилног кретања знамо да је то 6-параметарска група изометриских трансформација еуклидског простора, чији нам је аналитички облик добро познат, за деформабилно кретање *a priori* не можемо рећи ништа.

За известан број проблема, међутим, потребне податке може да да еластостатика. Претпоставимо ли да се посматрани еластични систем (ограничавамо се на хомогене изотропне системе) креће под дејством запреминских сила X_i и да су дати гранични услови, померања $c^{\lambda}\,\xi^{i}_{(\lambda)}$ морају у положају равнотеже да задовољавају систем Lamé-ових једначина

$$c^{\alpha}\lambda\,\Delta\,\xi_{(\alpha)i} + (\lambda+\mu)\,c^{\alpha}\frac{\partial \mathbf{I}_{(\alpha)1}}{\partial x^{i}} + X_i = 0,$$

где су $\xi_{(\alpha)i}$ коваријантне координате вектора компоненталних померања, а $\mathbf{I}_{(\alpha)1}$ је прва инваријанта тензора $\bar{e}_{(\alpha)ij}$ компоненталне деформације.

Нека је решење статичког проблема облика

$$u_i^* = c_*^\alpha \Psi_{(\alpha)i}(x),$$

где су $\Psi_{(\alpha)i}$ међусобно независне функције положаја. Ако се решење може изразити помоћу коначног збира тога облика, онда је кретање истог тела у истом пољу сила и са истим граничним условима карактерисано групом инфинитезималних трансформација

$$x^i = \bar{x}^i + u^i \equiv \bar{x}^i + c^\lambda \xi^i_{(\lambda)}\,; \qquad \xi^i_{(\lambda)} \equiv \bar{g}^{ij} \Psi_{(\lambda)j}$$

при чему су c_*^λ вредности параметара групе у равнотежном положају.

5. ПРИМЕРИ

Напред изложена општа разматрања применићемо на два елементарна примера. Један пример ће садржати једновремено деформабилно кретање и недеформабилно, док ће се други односити искључиво на деформабилно.

I. *Раван хомогени кружни еластични диск обрће се око осе кроз средиште, управне на диск.*

Нека су (r, φ) у равни диска непокретне поларне координате (просторне координате) тачака диска. Сматрајући центрифугалну силу за запреминску, Lamé-ове једначине дају за координате вектора померања

$$u_r \equiv u = ar^3 + br\,; \quad u_\varphi = 0.$$

Положај тачака диска (тј. конфигурација S за време кретања) одређен је помоћу три параметра — a и b који одређују дилатацију полупречника и α — угао обртања диска. Ако као материјалне координате тачака диска уведемо поларне координате $(\bar{r}, \bar{\varphi})$ које се неће мењати за време кретања, имамо

$$r = \bar{r} + u(\bar{r}); \quad \varphi = \bar{\varphi},$$

па је, ако је $0xy$ Descartes-ов систем координата у равни диска, са почетком у непомичном средишту 0 диска,

$$x = r\cos(\varphi + \alpha); \quad y = r\sin(\varphi + \alpha).$$

Жива сила диска је (ρ је густина диска)

$$2T = \rho \int_{V_0} (x'^2 + y'^2)\, dV_0 =$$

$$\frac{1}{4} MR^6 a'^2 + \frac{1}{2} MR^2 [b'^2 + (1+2b)\alpha'^2] + \frac{2}{3} MR^4 (a'b' + a\alpha'^2).$$

За поларне координате је $\bar{g}_{rr} = 1$, $\bar{g}_{\varphi\varphi} = \bar{r}^2$, тако да за координате тензора деформације добивамо према (3.4) и (3.5):

$$\bar{e}_{rr} = 3a\bar{r}^2 + b; \quad \bar{e}_{r\varphi} = 0; \quad \bar{e}_{\varphi\varphi} = \bar{r}^2 (a\bar{r}^2 + b).$$

Из (4.1) следи да су коваријантне координате напона

$$\bar{t}_{rr} = 2a\bar{r}^2(2\lambda + 3\mu) + 2b(\lambda + \mu); \quad \bar{t}_{r\varphi} = 0; \quad \bar{t}_{\varphi\varphi} = 2\bar{r}^2(\lambda + \mu)(2a\bar{r}^2 + b),$$

а контраваријантне координате $\bar{t}^{ij} = \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} \bar{t}_{kl}$ ће бити

$$\bar{t}^{rr} \equiv \bar{t}_{rr}; \quad \bar{t}^{r\varphi} = 0; \quad \bar{t}^{\varphi\varphi} = \frac{2}{\bar{r}^2} (\lambda + \mu)(2a\bar{r}^2 + b).$$

Према (4.3) имамо за виртуалне деформације

$$\delta\bar{e}_{rr} = 3\bar{r}^2 \delta a + \delta b; \quad \delta\bar{e}_{r\varphi} = 0; \quad \delta\bar{e}_{\varphi\varphi} = \bar{r}^2(\bar{r}^2 \delta a + \delta b),$$

па из (4.5) добивамо изразе за генералисане еластичне силе

$$X'_a = -2\pi R^4 \left[\frac{1}{3} R^2 a (8\lambda + 11\mu) + 2b(\lambda + \mu)\right],$$

$$X'_b = -2\pi R^2 \left[\frac{1}{2} R^2 a (4\lambda + 5\mu) + 2b(\lambda + \mu)\right],$$

$$X'_\alpha \equiv 0.$$

Пошто се диск обрће по инерцији, координате спољних сила су

$$X_a = X_b = X_\alpha \equiv 0.$$

Диференцијалне једначине кретања (4.6) сада ће гласити

(5.1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4} MR^6 a' + \frac{1}{3} MR^4 b'\right) - \frac{1}{3} MR^4 \alpha'^2 = X'_a,$$

(5.2) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} MR^4 a' + \frac{1}{2} MR^2 b'\right) - \frac{1}{2} MR^2 \alpha'^2 = X'_b.$$

Ове се једначине односе на параметре a и b у односу на које је кретање деформабилно. Трећи параметар α претставља цикличку координату са одговарајућим интегралом

(5.3) $$\alpha' \left[\frac{1}{2} MR^2 (1 + 2b) + \frac{2}{3} MR^4 a\right] = \text{const.} = \frac{1}{2} MR^2 \alpha'_0.$$

Из диференцијалних једначина кретања другог реда *добићемо услове равнотеже ако претпоставимо да нема убрзања*, тј. $a'' = b'' = 0$. Ако обележимо угаону брзину обртања диска са $\alpha' = \omega$, из (5.1) и (5.2) добићемо вредности параметара у равнотежној конфигурацији:

$$a_* = -\frac{1}{2}\frac{\rho\omega^2}{4\lambda+7\mu}; \quad b_* = \frac{1}{2}R^2\rho\omega^2\frac{2\lambda+3\mu}{(\lambda+\mu)(4\lambda+7\mu)}.$$

Ако уведемо ознаку

$$\frac{2\lambda+3\mu}{4\lambda+7\mu} \equiv \frac{3+\xi}{8},$$

коваријантне координате тензора напона у равнотежној конфигурацији ће бити

$$\bar{t}_{rr} = \frac{3+\xi}{8}\rho\omega^2(R^2-\bar{r}^2), \qquad \bar{t}_{\varphi\varphi} = \frac{3+\xi}{8}\rho\omega^2 R^2\bar{r}^2 - \frac{1+3\xi}{8}\rho\omega^2\bar{r}^4,$$

док су физичке координате

$$\bar{t}_r = \bar{t}_{rr}; \; \bar{t}_\varphi = \frac{3+\xi}{8}\rho\omega^2 R^2 - \frac{1+3\xi}{8}\rho\omega^2\bar{r}^2.$$

Ови изрази су идентични са одговарајућим изразима које даје еластостатика (в. на пример [5], стр. 98).

Једначина (5.3) даје везу између параметара a и b, почетне угаоне брзине α_0' и угаоне брзине α':

$$\alpha' = \frac{\alpha_0'}{1+2b+\frac{4}{3}R^2 a},$$

одакле следи да угаона брзина не може бити константна ако се плоча деформише, сем уколико нису вредности параметара a и b довољно мале да смемо сматрати бројитељ да је једнак јединици. Бројитељ је једнак јединици кад између параметара a и b постоји веза

$$6b + 4R^2 a = 0,$$

која у статичком случају није задовољена идентички, па a и b приближно морају бити једнаки нули.

II. *Тежак хомоген еластичан кружни ваљак са вертикалном осом слободно са деформише услед сопствене тежине.*

Нека је M маса ваљка, γ специфична тежина материјала, $\rho = \gamma/g$ густина, R полупречник основе и L дужина ваљка. z-оса се поклапа са осом ваљка и оријентисана је вертикално навише.

Под претпоставком да је тачка $A(0,0,L)$ ваљка непомична у простору и да ваљак не може да се обрће око те тачке, Lamé-ове једначине дају два вектора померања,

$$\vec{\xi}_{(a)}=\left\{0,0,\frac{1}{2}(\bar{z}^2-L^2)\right\};\ \vec{\xi}_{(b)}=\left\{-\bar{z}\bar{x},-\bar{y}\bar{z},\frac{1}{2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\right\},$$

па је кретање одређено 2-параметарском групом инфинитезималних трансформатија

$$G_2:\quad x^i=\bar{x}^i+a\xi^i_{(a)}+b\xi^i_{(b)},$$

где је

$$x\equiv x^1,\ y\equiv x^2;\ z\equiv x^3.$$

Жива сила ваљка је

$$2T=\rho\int_{V_0}(x'^2+y'^2+z'^2)\,dV_0=$$

$$=\frac{2}{15}ML^2a'^2-\frac{2}{3}ML^2R^2a'b'+\frac{1}{3}MR^2(2L^2+R^2)\,b'^2.$$

Пошто је систем координата $0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ортогоналнн Descartes-ов, непосредним диференцирањем координата вектора померања добивамо за тензор деформације према (3.5)

$$\{\bar{e}_{ij}\}=\{a\bar{e}_{(a)ij}+b\bar{e}_{(b)ij}\}=\begin{Bmatrix}-b\bar{z} & 0 & 0\\ 0 & -b\bar{z} & 0\\ 0 & 0 & a\bar{z}\end{Bmatrix}.$$

За напоне имамо из Hooke-овог закона

$$\bar{t}_{11}=\bar{t}_{22}=\frac{E(a\sigma-b)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\bar{z};\ \bar{t}_{33}=\frac{E[a-\sigma(a+2b)]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)};\ \bar{t}_{ij}=0,\ i\neq j$$

где је E Young-ов модуо, а σ Poisson-ова константа еластичности.

Запреминска сила $\vec{F}=-\gamma\vec{k}=-\rho g\vec{k}$ је константна и делује само у правцу осе ваљка; како је

$$\delta z=\frac{1}{2}(\bar{x}^2+\bar{y}^2)\,\delta b+\frac{1}{2}(\bar{z}^2-L^2)\,\delta a,$$

за рад запреминске силе на померању δz добивамо

$$\delta A=\int_{V_0}-\gamma\,dV_0\,\delta z=-\gamma\left(\frac{1}{4}VR^2\delta b+\frac{1}{3}VL^2\delta a\right).$$

Коефицијенти уз δa и δb јесу генералисане координате запреминске силе:

$$X_a = -\frac{1}{3}\gamma VL^2, \qquad X_b = -\frac{1}{4}\gamma VR^2.$$

Из израза за рад еластичних сила

$$\delta A' = \int\limits_{V_0} \sum_{i,j=1}^{3} \bar{t}_{ij}\,\delta\bar{e}_{ij}\, dV_0$$

добивамо непосредно и генералисане координате еластичних сила у у односу на параметре a и b:

$$X_a' = -\frac{VL^3}{3}\frac{E[(1-\sigma)a-2\sigma b]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)};$$

$$X_b' = \frac{2V}{3}L^2\frac{E(a\sigma-b)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

Дифернцијалне јадначине кретања су једначине облика (3.10):

$$\frac{2}{15}ML^4a'' - \frac{1}{3}ML^2R^2b'' = X_a + X_a',$$

$$-\frac{1}{3}ML^2R^2a'' + \frac{1}{3}MR^2(2L^2+R^2)b'' = X_b + X_b'.$$

Према томе, ваљак који се деформише услед сопствене тежине кретаће се као материјални систем са два степена слободе.

Равнотежна конфигурација ваљка је одређена са $a''=0$, $b''=0$, па се добивају за равнотежни положај следеће вредности параметара

$$a_* = -\frac{\gamma}{E}\left(1-\frac{3}{4}\frac{\sigma R^2}{L^2}\right);$$

$$b_* = -\frac{\gamma}{E}\left[\sigma - \frac{3}{8}\frac{R^2}{L^2}(1-\sigma)\right],$$

тако да су померања

$$\xi_x \equiv u = -b_*\bar{z}\bar{x}; \quad \xi_y \equiv v = -b_*\bar{y}\bar{z}; \quad \xi_z \equiv w = \frac{1}{2}b_*(\bar{x}^2+\bar{y}^2) + \frac{1}{2}a_*(\bar{z}^2 - L^2).$$

Ови изрази задовољавају идентички услове равнотеже које даје еластостатика, али се разликују од израза који се обично налазе у уџбеницима теорије еластичности (в. на пример [5], стр. 36, или [6], стр. 106). Овде добивени изрази ће се свести на оне које налазимо у уџбеницима ако је полупречник основе цилиндра R довољно мали у поређењу са дужином L.

(Саопштено 10-II-1960)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Schouten, J. A. — Ricci-Calculus. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg (sec. ed. 1954).

[2] Lie, S., — Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Teubner, Leipzig (1893).

[3] Eisenhart, L. P. — Continuous groups of transformations. Princeton Univ. Press (1933).

[4] Билимовић, А. — Динамика чврстог тела. Српска Академија наука, Београд (1955).

[5] Хлитчијев, Ј. — Поглавља из теорије еластичности. Научна књига, Београд (1950).

[6] Sokolnikoff, I. S. — Mathematical theory of elasticity. Mc Graw-Hill, New York (1946).

ON THE MOTION OF CONTINUOUS DEFORMABLE MATERIAL SYSTEMS WITH A FINITE NUMBER OF PARAMETERS

by

RASTKO STOJANOVITCH (Belgrade)

In dynamics of continuous deformable material systems it is in some cases possible to describe the motion by a finite continuous r-parametric group G_r of transformations. In such cases the parameters of the group can be considered as coordinates of the system, and the motion of the system can be interpreted as motion with the finite number of degrees of freedom, equal to the number of essential parameters (r) of the group G_r. The r-dimensional group space Π_r with parameters of the group as cordinates is the space of configurations of the system considered; Π_r is a Riemannian space with the kinematical line-element $ds^2 = 2T\, dt^2$ as a fundamental form, T being the kinetic energy of the system.

The differential equations of motion can be written as Lagrangean equations (2.23), reducing to the equations with constant coefficients (3.10) when the motion is described by a group of infinitesimal transformations; the coefficients represent the generalized coefficients of inertia of the system.

As an ilustration, the differential equations of motion are derived for rotation of a plain circular disk and for vibrations of a circular cylinder strached by its own weight. The disk rotates in the horizontal plane about its fixed centre (the influence of gravity is neglected) and the motion has three degrees of freedom: two parameters are needed for determination of the dilatation of the radius and the third for description of the rigid rotation. The cylinder is supported in a suitable manner at its upper base (with axis vertical) and oscillates with two degrees of freedom about the configuration of elastic equilibrium.