Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

ЗОРА ПЕТРИЋ

О АПСОЛУТНОЈ КОНВЕРГЕНЦИЈИ НЕКИХ ОРТОГОНАЛНИХ РЕДОВА

1. УВОД. Познати су PALEY-еви ставови [2, стр. 72]:

I. *Ако је* $f(\theta)$ *ограничена парна функција, њен Fourier-ов ред дат са*

$$\mathbf{S}[f(\theta)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\theta,$$

и $a_\nu \geqq 0$, *тада је*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < \infty .$$

II. *Ако је* $f(\theta)$ *ограничена непарна функција, њен Fourier-ов ред дат са*

$$\mathbf{S}[f(\theta)] = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\theta,$$

и $b_\nu \geqq 0$, *тада је*

a) *делимична сума*

$$S_n(\theta, f) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu\theta$$

униформно ограничена за свако $\theta \varepsilon [0, \pi]$;

b) *ако је* $f(\theta)$ *непрекидна функција, тада* $S_n(\theta, f)$ *униформно конвергира.*

Предмет овог рада је покушај да се теореме I и II прошире на случај a_ν и b_ν макаквог знака. То се може учинити ако се протпостави да је испуњен услов да је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu}, \text{ где је } \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0, \; b_\nu \geqq 0 \\ -1, & a_\nu < 0, \; b_\nu < 0 \end{cases}$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације. Ставови I и II су тада специјални случајеви, јер је за $\varepsilon_\nu = +1$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < \pi,$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације.

Даљи предмет рада је да се докаже аналоган став Paley-евом ставу I за Fourier-ов ред у односу на Legendre-ове полиноме

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x)$$

и проширени став за исте редове где су a_ν ма каквог знака.

2. СТАВОВИ КОЈИ СЕ ОДНОСЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКЕ FOURIER-ОВЕ РЕДОВЕ

2.1. Уопштење става I гласи:

СТАВ 1. *Ако је $f(x)$ парна и ограничена функција, њен Fourier-ов ред дат са*

$$\mathbf{S}[f(x)] = \frac{a_\nu}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$$

и ако је испуњен услов да је ред

$$\text{(i)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu}, \text{ са } \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0 \\ -1, & a_\nu < 0, \end{cases}$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације, тада је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < \infty .$$

Доказ: По претпоставци је $|f(x)| < M$; тада је, као што је добро познато и Fejér-ова средина Fourier-овог реда функције $f(x)$,

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) a_\nu \cos \nu x$$

ограничена, тј.

$$\sigma_n^*(x) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) a_\nu \cos \nu x < M.$$

Познато је да је услов [4, стр. 82]

$$\int_0^\pi |\rho_m'(\theta)| \, d\theta = O(1),$$

где је

$$\rho_m'(x)=\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(1-\frac{\nu}{m}\right)\varepsilon_\nu\cos\nu x,$$

потребан и довољан да би ред (i) био Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације. Ако се формира израз:

$$T_n=\int_0^\pi \sigma_n^*(x)\,\rho_n'(x)\,dx=\int_0^\pi\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)a_\nu\cos\nu x\right\}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\varepsilon_\nu\cos\nu x\right\}dx,$$

с једне стране је тада

$$|T_n|\leqq \operatorname*{Max}_x|\sigma_n^*(x)|\int_0^\pi|\rho_n'(x)|\,dx=O(1),$$

а са друге стране T_n се може израчунати. Како је

$$\int_0^\pi\cos\nu x\cos kx\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \nu=k\\ 0, & \nu\neq k,\end{cases}$$

добија се

$$T_n=\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|.$$

Значи

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|<M',$$

где M' не зависи од n. За цео број $k<(n-1)/2$ биће отуда

$$\sum_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|\leqq\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^2|a_\nu|<M',$$

тј.

$$\sum_{\nu=1}^{k}|a_\nu|<M''.$$

Како је k произвољан цео број, следи тврђење:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|<\infty.$$

Доказ се може извести много краћим путем ако се користи Paley-ев став I и следећи став M. Fekete-а [4, стр. 100, став A]. Ако је ред

(1) $$\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

Fourier-ов ред ограничене функције $f(x) \leqq M$ и ред

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\sin \nu x}{\nu}$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације, тада је ред

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

Fourier-ов ред једне ограничене функције.

2.2. Уопштење става II дато је следећим ставом:

Став 2: 1) *Ако је $f(x)$ непарна и ограничена функција, њен* ***Fourier-ов ред***

$$(*) \qquad \mathbf{S}[f(x)] = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x,$$

и ако је ред

$$(\text{ii}) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu}, \qquad \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & b_\nu \geqq 0 \\ -1, & b_\nu < 0 \end{cases}$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације, тада је

$$S_n(x, f) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x \ \textit{униформно ограничено}.$$

2) *Ако је $f(x)$ непрекидна функција, тада под претходним условима ред (*) униформно конвергира.*

Доказ: 1) Ако се примени наведени став А из претходног параграфа, добија се да је заједно са редом (*) и ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu b_\nu \sin \nu x \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu| \sin \nu x$$

Fourier-ов ред једне ограничене функције. По наведеном Paley-евом ставу II из увода, тада је

$$S_n^*(x) = \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| \sin \nu x \ \text{униформно ограничено.}$$

Лако се може показати да је $|S_n^*(x)| \leqq K_1 M$, где је K_1 апсолутна константа а M ограничење функције $f(x)$, ако се користи чињеница да је

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_n(x+t)\, dL(t),$$

где је $\sigma_n(x)$ Fejér-ова средина Fourier-ова реда (*), а

$$L(t) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu \sin \nu x}{\nu}.$$

Даље је, ако је испуњен услов (ii), испуњен и услов да је ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_\nu - 1) \sin \nu x}{\nu} = \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu} - \frac{\pi - x}{2} \; (0 < x \leqq \pi)$$

Fourier-ов ред једне функције ограничене варијације. Према томе, користеће став А, следи да је и ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu (\varepsilon_\nu - 1) \sin \nu x$$

Fourier-ов ред ограничене функције, и како је $|b_\nu| - b_\nu \geqq 0$, према ставу II је тада

$$\tilde{S}_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (\varepsilon_\nu - 1) \sin \nu x \text{ униформно ограничено}$$

тј.

$$|\tilde{S}_n(x)| \leqq K_2 M.$$

Како је

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x = \sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu| \sin \nu x - \sum_{\nu=1}^{n} (|b_\nu| - b_\nu) \sin \nu x,$$

следи тврђење става 2. тј.

$$|S_n(x)| \leqq K M.$$

2) $f(x)$ је по претпоставци непрекидна функција, па, по добро познатом ставу, Fejér-ова средина $\sigma_n(x)$ униформно конвергира ка функцији $f(x)$. Значи за довољно велико $n = n(\varepsilon)$ је

$$f(x) = \sigma_n(x) + g(x), \; |g(x)| < \varepsilon$$

за свако x. Ако се примени претходни део 1) овог става на Fourier-ов ред ограничене функције $g(x)$, добија се да је $S_n(x, g)$ униформно ограничено, тј. $|S_n(x,g)| < K\varepsilon$. Према томе је

$$|S_p(x,g) - S_q(x,g)| \leqq 2K\varepsilon \text{ за свако } p > q \geqq n \text{ и свако } x$$

и

$$|S_p(x, \sigma_n) - S_q(x, \sigma_a)| = 0 \text{ за } p > q \geqq n.$$

Значи за $p > q \geqq n$, $|S_p(x,f) - S_q(x,f)| \leqq A\varepsilon$, тј. Fourier-ов ред непрекидне функције $f(x)$ је униформно конвергентан.

Доказ дела 2) се може извести и на основу цитираног става А за класу непрекидних функција.

3. СТАВОВИ КОЈИ СЕ ОДНОСЕ НА FOURIER-ОВЕ РЕДОВЕ У ОДНОСУ НА LEGENDRE-ОВЕ ПОЛИНОМЕ $P_n(x)$ — LAPLACE-ОВЕ РЕДОВЕ

3.1. Аналогно ставу I може се доказати

Став 3. *Функција $f(x)$ је дефинисана у интервалу* $[-1, +1]$. *Ако је*

$$|f(x)| < M, \quad x \varepsilon [-1, +1],$$

и њен формални Laplace-ов ред даш са

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x), \tag{4}$$

где су a_ν Fourier-ови коефицијенши функције $f(x)$ у односу на Legendre-ове йолиноме, шј.

$$a_\nu = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_\nu(x)\, dx,$$

и ако је $a_\nu \geqq 0$, шада је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a_\nu|}{2\nu+1} < \infty.$$

Доказ. На основу једног Fejér-овог става [3] ако је $m \leqq f(x) \leqq M$ за свако $x \varepsilon [-1, +1]$, тада су Cesàro-ве средине другог реда од (4) исто тако ограничене, тј.

$$m \leqq \tau_n(x) \leqq M,$$

где је

$$\tau_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{n\nu} a_\nu P_\nu(x), \quad \text{са } \lambda_{n\nu} = \frac{\binom{n+2-\nu}{2}}{\binom{n+2}{2}}.$$

Израз

$$T_n^1 = \int_{-1}^{+1} \tau_n(x) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x) \right\} dx,$$

се може с једне стране израчунати и имамо

$$T_n^1 = \sum_{\nu=0}^{n} 2\lambda_{n\nu} \frac{|a_\nu|}{2\nu+1},$$

јер за Legendre-ове полиноме

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{d x^n}$$

важи особина ортогоналности

$$\int_{-1}^{+1} P_m(z) P_n(z)\, dz = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

С друге стране, користећи чињеницу да је према L. Fejér-у [3]

$$P_0(\cos\gamma)+P_1(\cos\gamma)+\ \ldots\ +P_n(\cos\gamma)>0\,,$$

за свако n и $0<\gamma<\pi$, може се на T_n^1 применити први став о средњој вредности. Имаћемо тада

$$m\int_{-1}^{+1}\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)\,dx\leqq\int_{-1}^{+1}\tau_n(x)\left\{\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)\right\}dx\leqq M\int_{-1}^{+1}\sum_{\nu=0}^{n}P_\nu(x)\,dx,$$

значи $T_n^1\leqq M_1$, тј.

$$\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{n\nu}\frac{a_\nu}{2_\nu+1}<M.$$

Узимајући $k=[n/2]$ сабирака, добија се

$$\sum_{\nu=0}^{k}\lambda_{n\nu}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{n\nu}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<M$$

и за $n\to\infty$

$$\sum_{\nu=0}^{k}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<M.$$

Пошто ово важи за свако k, следи тврђење става 3.

3.2 Став 3 се може проширити на случај a_ν ма каквог знака, уз претпоставку

$$\text{(iii)}\quad \mathbf{M}[\sigma_n(x)]=\int_{-1}^{+1}\left|\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\varepsilon_\nu P_\nu(x)\right|\leqq V,\ \text{са}\ \varepsilon_\nu=\begin{cases}+1\,, & a_\nu\geqq0\\ -1\,, & a_\nu<0.\end{cases}$$

тако добивамо

Став 4. Ако је $|f(x)|<M$, $f(x)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu P_\nu(x)$ *и ако је испуњен услов* (iii), *тада је*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}<\infty\,.$$

Доказ. У доказу се користи напред наведени став L. Fejér-а [3]. Ако се формира израз

$$A_n=\int_{-1}^{+1}\tau_n(x)\,\sigma_n(x)\,dx\,,$$

добија се с једне стране

$$A_n=\int_{-1}^{+1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu n}\,a_\nu\,P_\nu(x)\right\}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\varepsilon_\nu P_\nu(x)\right\}=\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)2\lambda_{\nu n}\frac{|a_\nu|}{2\nu+1}.$$

С друге стране је

$$|A_n| \leqq \int_{-1}^{+1} |\tau_n(x)| |\sigma_n(x)| \, dx \leqq M \int_{-1}^{+1} |\sigma_n(x)| \, dx = O(1).$$

Према томе

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \lambda_{n\nu} \frac{|a_\nu|}{2\nu+1} < M$$

и аналогним поступком као у ставу 3, следи тврђење става 4.

Може се лако показати да је услов (iii) аналоган условима (i) (ii). Наиме, потпуно аналогно доказу Young-овог става [4, стр. 79], може се показати да је *услов* (iii) *потребан и довољан услов да ред*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu P_\nu(x) \tag{5}$$

буде Fourier-Stieltjes-ов ред.

Доказ: а) *Услов* (iii) *је довољан*. Претпоставља се, значи, да је

$$\mathbf{M}[\sigma_n(x)] = \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \varepsilon_n P_n(x) \right| dx \leqq V.$$

Нека је

$$F_n(x) = \int_{-1}^{x} \sigma_n(t) \, dt.$$

$F_n(x)$ је униформно ограничене варијације у $(-1, +1)$, и како је $F_n(-1) = 0$ за $n = 1, 2, \ldots$ може се применити Helly-ева лема [4, стр. 80] *по којој постоји униформно ограничен подниз* $\{F_{n_j}(x)\}$ *који конвергира функцији* $F(x)$ *ограничене варијације.*

Према томе

$$\left(1 - \frac{\nu}{n_j+1}\right) \varepsilon_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n_j} \left(1 - \frac{\nu}{n_j+1}\right) \varepsilon_\nu P_\nu(x) \right\} P_\nu(x) \, dx$$

$$= \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} \sigma_{n_j} P_\nu(x) \, dx = \frac{2\nu+1}{2} \left[F_{n_j}(x) \cdot P_\nu(x) - \int_{-1}^{+1} F_{n_j} P'_\nu(x) \, dx \right].$$

За $j \to \infty$ добивамо

$$\varepsilon_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \left[F(x) P_n(x) - \int_{-1}^{+1} F(x) P'_\nu(x) \, dx \right] = \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_\nu(x) \, dF(x).$$

b) *Услов* (iii) *је потребан.* Ако је ред (5) Fourier-Stieltjes-ов, тј.

$$a_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} P_\nu(t)\, d\,F(t),$$

тада је

$$\sigma_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\frac{2\nu+1}{2}\left\{\int_{-1}^{+1} P_\nu(t)\, d\,F(t)\right\} P_\nu(x),$$

$$|\sigma_n(x)| \leqq \int_{-1}^{+1} |d\,F(t)| \sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\frac{2\nu+1}{2} |P_\nu(t)\, P_\nu(x)|\,.$$

Отуда је

$$\mathbf{M}\,[\sigma_n(x)] = \int_{-1}^{+1} |\sigma_n(x)|\, dx \leqq \int_{-1}^{+1} |d\,F(t)| \sum_{\nu=0}^{n}\frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)|P_\nu(t)\cdot P_\nu(x)|\, dx\,.$$

Како је по једном ставу A. Haar-а [1]

$$\int_{-1}^{+1}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)|P_\nu(t)\, P_\nu(x)|\, dx < G,$$

следи из последње неједначине

$$\mathbf{M}\,[\sigma_n(x)] < V.$$

Примедба. Познат је Paley-ев став [4, стр. 202]:

Став C. Ако је $f \varepsilon L^p$ и ако су $c_1, c_2, \ldots$ Fouier-ови коефицијенти од f у односу на неки ортогонални и нормални систем униформно ограничених функција $\varphi_n(x)$, тада је

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p\, n^{p-2} < \infty\,, \qquad \text{за } 1 < p \leqq 2\,.$$

Очевидно став 4 није обухваћен ставом *C*.

(Саопштено 17-II-1960)

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Haar — Über die Legendresche] Reihe. *Rend. del Circolo mat. di Palermo.* **XXXII** (1911).

[2] G. Hardy and W. W. Rogosinki — Fourier Series. Cambridge, 1950.

[3] G. Szegö — Zur Theorie der Legendreschen Polynome. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **XL** (1931).

[4] A. Zygmund — Trigonometrical Series. Warszawa 1935.

SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DE CERTAINES SÉRIES ORTHOGONALES

Z. PETRIĆ (Belgrade)

Dans cette note les théorèms suivants sont démontrés: 1. Soit $f(x)$ une fonction paire et bornée et soit $\mathbf{S}[f]=a_0/2+\Sigma a_\nu \cos \nu x$ sa série de Fourier. Si

$$\text{(i)} \qquad \sum \frac{\varepsilon_\nu \sin \nu x}{\nu} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0, \\ -1, & a_\nu < 0, \end{cases}$$

représente une fonction à variation bornée, on a $\Sigma |a_\nu| < \infty$. La série (i) est une telle série, si par exemple, $a_\nu \geqq 0$ [2, p. 72]. 2. Soit f impaire et bornée, $\mathbf{S}[f]=\Sigma b_\nu \sin \nu x$ et la condition (i) soit remplie avec $\varepsilon_\nu = \{+1,\ b_\nu \geqq 0;\ -1,\ b_\nu < 0\}$; alors $\mathbf{S}[f]$ converge uniformént. 3. Soit f défini et $|f| < M$ dans $[-1, 1]$ et $f(x) \sim \Sigma a_\nu P_\nu(x)$ où $P_\nu(x)$ désigne les polynomes de Legendre c.-à.-d. soit $\Sigma a_\nu P_\nu(x)$ la sériet formelle de Laplace de f. Soit en plus

$$\text{(iii)} \quad \mathbf{M}[\sigma_n(x)] = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \varepsilon_\nu P_\nu(x) \right| < M, \quad \varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, & a_\nu \geqq 0, \\ -1, & a_\nu < 0. \end{cases}$$

Alors

$$\sum \frac{|a_\nu|}{2\nu+1} < \infty.$$

On démontre ensuite que la condition (iii) est la condition nécessaire et suffisante pour que la série $\Sigma \varepsilon_\nu P_\nu(x)$ soit une série de Fourier-Stieltjes, autrement dit, la condi ion (iii) représente la condition analogue avec (i).

Il faut remarquer, que le théorème connu de Paley [4, p. 200] ne contient pas le théorème 3.