Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

В. ВУЧКОВИЋ и В. СИМОНОВИЋ

ЗБИРЉИВОСТ FOURIER-ОВИХ РЕДОВА STIRLING-ОВИМ ПОСТУПЦИМА ЗБИРЉИВОСТИ

1. У више скорашњих радова ([1], [2], [3], [4]) уведени су неки нови врло ефикасни поступци збирљивости помоћу Stirling-ових бројева и њихових генерализација. Први је такве поступке посматрао J. Карамата.

Нека су бројеви $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ дефинисани за $0 \leq \nu \leqq n$ релацијом

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}x^{\nu} \tag{1.1}$$

а за $\nu < 0$ и $\nu > n$ нека је $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}=0$. Бројеви $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ су очито Stirling-ови бројеви прве врсте узети по апсолутној вредности.

За низ $\{s_n\}$ кажемо да је збирљив Карамата-Stirling-овим поступком K^k ако низ

$$S_n^k(s) \overset{def}{=} \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}k^{\nu}s_{\nu}, \quad k>0 \tag{1.2}$$

конвергира.

Ове поступке збирљивости увео је J. Карамата [5], доказао њихову регуларност као и један став о њиховом односу према Euler-овим поступцима и Borel-овом поступку збирљивости.

Независно од J. Карамате, В. Лотоцкий у [6] увео је и детаљно испитао специјалан случај уведених поступка K^k када је $k=1$. Agnew у [1] је упростио методе Лотоцког и истакао значај тог специјалног случаја.

В. Вучковић у [2] испитао је узајамну инклузију Карамата-Stirling-ових поступака K^k и оценио ред величине низова збирљивих овим поступцима. У [4] он је модифицирао Stirling-ове поступке збирљивости на следећи начин:

Нека су функције $\sigma_\nu^n(\alpha)$, параметра α, дефинисане за $0 \leqq \nu \leqq n$ релацијом

$$(1.3) \qquad (x+\alpha)(x+\alpha+1)\dots(x+\alpha+n-1)=\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha)\,x^\nu$$

а за $\nu<0$ и $\nu>n$ нека је $\sigma_\nu^n(\alpha)\equiv 0$.

За низ $\{s_n\}$ рећи ћемо да је σ^α- збирљив ако низ

$$(1.4) \qquad T_n^\alpha(s) \overset{def}{=} \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(\alpha)\,s_\nu, \quad \alpha>-1,$$

конвергира. Ови поступци су регуларни и $\sigma\equiv k^1$, јер је $\sigma_\nu^n(0)=\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$.

А. Jakimovski [3] дао је једну другу генерализацију, на тај начин што је уместо Stirling-ових бројева $\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}$ увео њихова уопштења p_ν^n дефинисана са

$$(1.5) \qquad \prod_{\nu=1}^{n}(x+d_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu^n x^\nu, \qquad 0\leqq\nu\leqq n,$$
$$p_\nu^n\equiv 0 \quad \text{за} \quad \nu<0 \quad \text{и} \quad \nu>n,$$

тј. симетричне функције корена полинома $\prod_{\nu=1}^{n}(x+d_\nu)$.

2. У овоме раду испитаћемо збирљивост Fourier-ових редова непрекидних функција помоћу поступака K^k и σ^α и доказати

Став 1. *Fourier-ов ред сваке периодичне непрекидне функције $f(x)$ збирљив је сваким регуларним Карамата-Stirling-овим поступком K^k, униформно по x, у свакој тачки x ка вредности функције $f(x)$.*

Став 2. *Fourier-ов ред сваке периодичне непрекидне функције $f(x)$ збирљив је сваким регуларним поступком σ^α, униформно по x, у свакој тачки x ка вредности функције $f(x)$.*

Доказе ових ставова могуће је добити применом општих Никольский-евих [7] и Карамата-Томић-евих [8] ставова. Међутим, ови ставови се односе на факторе конвергенције. Њихово преформулисање и рад потребан за доказе ставова 1 и 2 били би у суштини исти као и директни докази. Стога ћемо дати директне доказе, који су, усталом, елементарни.

3. Предходно ћемо доказати неколико лема које су нам потребне за доказ ставова 1 и 2.

Лема 1.

$$K_n(t,k)\stackrel{def}{=}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix} k^\nu \sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t=$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{1}{\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it})}\{e^{it/2}\,\Gamma(ke^{-it})\,\Gamma(ke^{it}+n)-e^{-it/2}\,\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it}+n)\}$$

Доказ. Како је

$$x(x+1)\dots(x+n-1)=\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)},$$

десна страна наведеног идентитета може се написати у облику

$$\frac{1}{2i}\{e^{it/2}\,ke^{it}(ke^{it}+1)\dots(ke^{it}+n-1)-e^{-it/2}\,ke^{-it}(ke^{-it}+1)\dots(ke^{-it}+n-1)\}.$$

На основу дефиниције (1.1) овај израз постаје

$$\frac{1}{2i}\left\{e^{it/2}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}k^\nu e^{i\nu t}-e^{-it/2}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}k^\nu e^{-i\nu t}\right\}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}k^\nu\,\frac{e^{i(\nu+1/2)t}-e^{-i(\nu+1/2)t}}{2i}=\sum_{\nu=0}^{n}k^\nu\begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t=K_n(t,k).$$

Лема 2. *Нека је $K_n(t,k)$ функција из леме 1. Тада је за* $0<t<\frac{\pi}{2}$

$$K_n(t,k)=\frac{\Gamma(ke^{it}+ke^{-it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\Gamma(ke^{-it})}\,\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\ln\frac{x}{1-x}\right]dx\right\}$$

Доказ. Како је за $\mathrm{Re}(p)>0$ и $\mathrm{Re}(q)>0$

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)=B(p,q)\,\Gamma(p+q)\quad \text{и}\quad B(p,q)=B(q,p),$$

то је

$$\Gamma(ke^{-it})\,\Gamma(ke^{it}+n)=\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)\,B(ke^{-it},ke^{it}+n),$$

$$\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it}+n)=\Gamma(ke^{it}+ke^{-it}+n)\,B(ke^{it},ke^{-it}+n)$$

и

$$K_n(t,k)=\frac{\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it})}\cdot\frac{1}{2i}\left\{e^{it/2}B(ke^{it}+n,ke^{-it})-e^{-it/2}B(ke^{-it}+n,ke^{it})\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\,\Gamma(ke^{-it})}\cdot\frac{1}{2i}\left\{e^{it/2}\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}x^{-ik\sin t}(1-x)^{-ik\sin t}dx-\right.$$

$$\left.-e^{-it/2}\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}x^{-ik\sin t}(1-x)^{ik\sin t}dx\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(ke^{-it}+ke^{it}+n)}{\Gamma(ke^{it})\Gamma(ke^{-it})}\left\{\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\ln\frac{x}{1-x}\right]dx\right\}.$$

Лема 3. *За довољно мало* $\delta\,(0<\delta<\pi/2$ *и* $0<t<\delta$ *је*

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|\leqq M\Gamma(k\cos t+n)\leqq M\Gamma(k+n)$$

где M *не зависи од* t *и* n.

Доказ. Узмимо за $K_n(t,k)$ облик из леме 2. Тада је

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|\leqq M_1(k)\Gamma(2k\cos t+n)\cdot$$

$$\cdot\left|\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\ln\frac{x}{1-x}\right]\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}dx\right|.$$

Како је $|\sin u|<|u|$ и $\sin\frac{t}{2}\geqq\frac{t}{\pi}$ за $0<t<\delta<\frac{\pi}{2}$, то је

$$\left|\frac{\sin\left[\frac{t}{2}+k\sin t\cdot\ln\frac{x}{1-x}\right]}{\sin\frac{t}{2}}\right|\leqq\pi\left\{\frac{1}{2}+k\left|\ln\frac{x}{1-x}\right|\right\},$$

па је

$$\left|\frac{K_n(t,h)}{\sin t/2}\right|\leqq M_2(k)\,\Gamma(2k\cos t+n)\left\{\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\left|\ln\frac{x}{1-x}\right|dx\right\}=M_2(k)\,\Gamma(2k\cos t+n)\{J_1+J_2\}.$$

Интеграл J_1 се може непосредно израчунати.

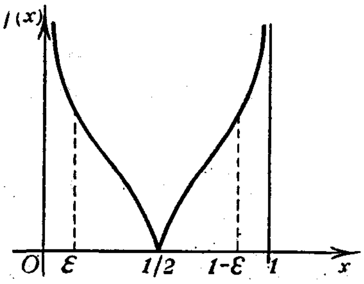
$$J_1 = B(k\cos t+n, k\cos t) = \frac{\Gamma(k\cos t+n)\,\Gamma(k\cos t)}{\Gamma(2k\cos t+n)}\,.$$

Проценићемо сада

$$J_2 = \int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\left|\ln\frac{1-x}{x}\right| dx.$$

Због израза $\left|\ln\frac{1-x}{x}\right|$ интеграл J_2 морамо раздвојити на три интеграла, тј.

$$J_2 = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1}\,,$$



сл. 1

где је $\varepsilon > 0$ (в. сл. 1). Због симетрије, први и трећи интеграл израчунавају се на исти начин, а други као J_1. Наводимо зато само процену за први интеграл:

$$\int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\left|\ln\frac{1-x}{x}\right| dx =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\,|\ln(1-x)|\,dx + \int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}|\ln x|\,dx$$

$$\leqq |\ln(1-\varepsilon)| \int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\,dx + \int_0^{\varepsilon} x^{k\cos t+n-2}(1-x)^{k\cos t-1}\,x\,|\ln x|\,dx$$

$$\leqq C(\varepsilon)\,B(k\cos t+n, k\cos t) + \int_0^1 x^{k\cos t+n-1}(1-x)^{k\cos t-1}\,dx$$

$$\leqq C(\varepsilon)\,B(k\cos t+n, k\cos t) + B(k\cos t+n-1, k\cos t)\,;$$

јер је $x|\ln x| < 1$ за $0 < x < 1$. Тако се добија да је

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right| \leqq M(k,\varepsilon)\,\Gamma(2k\cos t+n)\left\{\frac{\Gamma(k\cos t+n)}{\Gamma(2k\cos t+n)} + \frac{\Gamma(k\cos t+n-1)}{\Gamma(2k\cos t+n-1)}\right\} \leqq$$

$$\leqq M(k,\varepsilon)\left\{\Gamma(k\cos t+n) + \frac{\Gamma(2k\cos t+n)}{\Gamma(2k\cos t+n-1)}\,\Gamma(k\cos t+n-1)\right\}.$$

Но како је

$$\Gamma(2k\cos t+n) = (2k\cos t+n-1)\,\Gamma(2k\cos t+n-1)$$

то коначно добијамо тврђење леме.

Лема 4. *За* $0 < \delta < t < \pi$ *је*

$$\left| \frac{K_n(t,k)}{\sin t/2} \right| \leqq M\Gamma(k\cos\delta + n)$$

где M *не зависи од* n *и* t.

Доказ. Пођимо од израза за $K_n(t,n)$ из леме 1 и напишимо га у облику

$$K_n(t,k) = \frac{e^{it/2}}{2i} k\, e^{it}(ke^{it}+1)\dots(ke^{it}+n-1) - \frac{e^{-it/2}}{2i} ke^{-it}(ke^{-it}+1)\dots(ke^{-it}+n-1).$$

Очигледно је да се овај израз може написати у облику

$$K_n(t,k) = \frac{e^{it/2}}{2i}\cdot\frac{\Gamma(e^{ikt}+n)}{\Gamma(e^{ikt})} - \frac{e^{-it/2}}{2i}\frac{\Gamma(\overline{e^{ikt}}+n)}{\Gamma(\overline{e^{ikt}})}$$

или, стављајући $e^{ikt} = z$

$$K_n(t,k) = \frac{1}{2i}\left\{ \frac{e^{it/2}\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} - \frac{e^{-it/2}\Gamma(\overline{z+n})}{\Gamma(\bar z)} = \right.$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\Psi(z,n) - \overline{\Psi}(z,n)\right] = \frac{1}{2i}\cdot 2i\,\mathrm{Im}\{\Psi(z,n)\} = \mathrm{Im}\{\Psi(z,n)\},$$

где смо цртом означавали коњуговане вредности. Функција $\Psi(z,n)$ дата је изразом

$$\Psi(z,n) = e^{it/2}\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} = \frac{e^{it/2}}{\Gamma(z)}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1+ik\sin t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{it/2}}{\Gamma(z)}\cdot\int_0^\infty e^{-it}\, t^{n+k\cos t-1}\cdot e^{ik\sin t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{it/2}}{\Gamma(z)}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1}\{\cos(k\sin t\cdot\ln t) + i\sin(k\sin t\cdot\ln t)\}\, dt = \frac{e^{it/2}}{\Gamma(t)}(\alpha + i\beta),$$

где је

$$\alpha = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1}\cos(k\sin t\cdot\ln t)\, dt,$$

$$\beta = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n+k\cos t-1}\sin(k\sin t\cdot\ln t)\, dt.$$

Међутим, нама је потребан само имагинарни део функције $\Psi(z, n)$ и његова процена. Ми ћемо сада дати ту процену, која је веома груба, али сасвим довољна за наше потребе.

Ставимо

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = u(k, t) + iv(k, t).$$

Тада је

$$\Psi(k, t) = e^{it/2}(\alpha + i\beta)(u + iv) = e^{it/2}\{(\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)\} =$$

$$= \left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right)\left\{(\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)\right\} =$$

$$= \left[(\alpha u - \beta v)\cos\frac{t}{2} - (\beta u + \alpha v)\sin\frac{t}{2}\right] + i\left[(\alpha u - \beta v)\sin\frac{t}{2} + (\beta u + \alpha v)\cos\frac{t}{2}\right].$$

Значи да је

$$\operatorname{Im}\{\Psi(k, t)\} = (\alpha u - \beta v)\sin\frac{t}{2} + (\beta u + \alpha v)\cos\frac{t}{2}.$$

Јасно је, даље, да ће бити

$$|J\{\Psi(k, t)\}| \leqq 2(|\alpha||u| + |\beta||v|).$$

Но пошто је $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ цела функција и $z = e^{ikt}$ ограничен број, постоји коначна позитивна константа $M(k)$ таква да је

$$|u| \leqq \frac{M(k)}{2} \quad \text{и} \quad |v| \leqq \frac{M(k)}{2}.$$

Тако добивамо

$$|J\{\Psi(k, t)\}| \leqq M(k)\{|\alpha| + |\beta|\} \leqq 2M(k)\int_0^\infty e^{-t}t^{n+k\cos t-1}\,dt \leqq$$

$$\leqq 2M(k)\,\Gamma(k\cos t + n)$$

за свако t. А пошто је за $\pi > t > \delta > 0$, $\cos t < \cos\delta$, то је

$$|J\{\Psi(k, t)\}| \leqq 2M(k)\,\Gamma(k\cos\delta + n).$$

4. Сада ће мо доказати став 1.

За Fourier-ов ред функције $f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

је

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\cdot\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}\,dt$$

те је њена S_n^k-сума дата изразом

$$S_n^k=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}k^\nu s_\nu(x)=$$

$$=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{\sin t/2}\,dt\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}k^\nu\sin(\nu+1/2)\,t,$$

тј. према ознакама леме 1

$$S_n^k=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{\sin t/2}\cdot K_n(t,k).$$

Пошто је

$$K_n(t,k)=-K_n(-t,k)$$

то се лако добија

$$S_n^k=\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\cdot\frac{K_n(t,k}{\sin t/2}\,dt.$$

С друге стране је

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}k^\nu\sin(\nu+1/2)\,t\,(\sin t/2)^{-1}\,dt=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\ \nu\end{bmatrix}k^\nu\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\nu+1/2)\,t}{\sin t/2}\,dt=k(k+1)\ldots(k+n-1),$$

јер је

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\nu+1/2)\,t}{\sin t/2}\,dt=1,$$

и отуда

$$1=\frac{1}{k(k+1)\dots(k+n-1)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\,dt.$$

Тако добивамо

$$S_n^k-f(x)=\frac{1}{k(k+1)\dots(k+n-1)}\int_0^\pi\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\pi}\cdot\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\,dt.$$

Како je, по претпоставци, $f(x)$ непрекидна функција, то за произвољно мало $\varepsilon>0$ можемо наћи једно $\delta>0$ тако да je

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|<2\varepsilon \text{ за } 0<t<\delta.$$

При томе, због униформе непрекидности, δ не зависи од x. Онда je

$$|S_n^k-f(x)|\leqq\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k+n)}\cdot\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|dt+\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k+n)}\cdot M\int_\delta^\pi\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|dt.$$

По леми 3 за $0<t<\delta$ je

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|<M_1\,\Gamma(k+n)$$

а по леми 4 за $\delta<t<\pi$ je

$$\left|\frac{K_n(t,k)}{\sin t/2}\right|<M_2\,\Gamma(k\cos\delta+u)$$

те je

$$|S_n^k-f(x)|\leqq\varepsilon M_1(\delta,k)+M_2(\delta,k)\cdot\frac{\Gamma(k\cos\delta+n)}{\Gamma(k+n)}.$$

Но како je

$$\frac{\Gamma(k\cos\delta+n)}{\Gamma(k+n)}\sim\frac{1}{n^{k(1-\cos\delta)}}\to 0, \text{ код } n\to\infty,$$

jep δ можемо одабрати тако да буде $1-\cos\delta>0$, то одавде следи да je

$$\lim_{n\to\infty}S_n^k=f(x)$$

униформно по x.

5. Што се тиче доказа става 2, нећемо га овде изводити, jep je он скоро потпуно идентичан са доказом става 1. Користе се четири леме сасвим сличне лемама из тачке 3.

(Саопштено 25-XI-1959)

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. P. AGNEW — The Lototsky Method for Evaluation of Series. *Michigan Math. Journal* **4** (1957), 105—128.

[2] V. VUČKOVIĆ — The Mutual Inclusion of Karamata-Stirling Method of Summation. *Michigan Math. Journal* **6** (1959), 291—297.

[3] A. JAKIMOVSKI — A Generalization of the Lototsky Method of Summability. *Michigan Math. Journal* **6** (1959), 277—290.

[4] V. VUČKOVIĆ — Eine neue Klasse vom Polynomen und ihre Anwendung in der Theorie der Limitierungsverfahren. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **12** (1958), 125—136.

[5] J. KARAMATA — Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilitées s'y rattachant. *Mathematica Cluj* **9** (1935), 164—178.

[6] А. В. Лотоцкий — Об одном линейном преобразовании последовательностей и рядов. *Иванов. Гос. Пед. Инсш. Уч. Зай. Физ. Маш. Науки* **4** (1953), 61—91.

[7] С. М. Никольский — Об линеарних метод суммирования рядов Фурье. *Извесшия Акад. Наук СССР* **12** (1948), 259—278.

[8] J. KARAMATA et M. TOMIĆ — Sur la sommation des series de Fourier des fonctions continues. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **8** (1955), 123—138.

LIMITIERBARKEIT FOURIERSCHER REIHEN MITTEL STIRLINGSCHE VERFAHREN

V. VUČKOVIĆ und V. SIMONOVIĆ (Belgrad)

Für die Karamata-Stirlingsche Verfahren K^k, definiert durch (1.1) und (1.2), und die vom ersten Author eingeführten modifizierten Stirlingaschen Verfahren σ^{α}, definiert durch (1.3) und (1.4), wird bewiesen dass sie für jedes x die Fouriersche Reihe einer stetigen periodischen Funktion zu ihrem Werte $f(x)$ uniform nach x limitieren.