Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

Ђ. МУШИЦКИ

ЈЕДНА АКСИОМАТИКА ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ

УВОД. — Ма да је електродинамика већ одавно постала класична дисциплина теориске физике, мало је рађено на проблему њене аксиоматизације, тј. на њеном строго логичком заснивању на извесном низу основних закона као аксиома. У већини уџбеника електродинамике овом питању се не посвећује пажња, а уколико се то и чини, обично се то чини прећутно или непотпуно. При томе се обично полази од Coulomb-овог закона, закона непостојања магнетних полова, Faraday-евог закона, Ampère-ове теореме и хипотезе допунске-померајне струје, која се одређује на основу закона о одржању наелектрисања, али се може поћи и од других закона. W. Panofsky и M. Phillips [1] у свом уџбенику узимају као основне законе Coulomb-ов, Ampère-ов, Faraday-ев закон, хипотезу допунске струје и закон о одржању наелектрисања. Л. Ландау и Е. Лифшиц [2] полазе чак од сасвим друге основе, од варијационог принципа са погодно изабраном Lagrange-евом функцијом и на тој бази заснивају своје излагање електродинамике. A. Sommerfeld [3] узима као основне законе Faraday-ев закон и Ampère-ову теорему и назива их основним аксиомама електродинамике, а њима прикључује и закон непостојања магнетних полова као допунску аксиому, међутим при томе уводи *a priori* егзистенцију и вредност померајне струје. J. Stratton [4] постулира као аксиоме Maxwell-ове једначине за $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ и $\mathrm{rot}\,\vec{H}$ и закон о одржању наелектрисања и помоћу њих изводи Maxwell-ове једначине за $\mathrm{div}\,\vec{E}$ и $\mathrm{div}\,\vec{B}$ под допунским условом да постоји бар један тренутак у коме нема електромагнетног поља у посматраној области. У свим овим формулацијама електродинамике поред наведених основних закона морају се узети и допунске једначине, које карактеришу стање средине и зависе од њене природе. A. Mercier [5] први је дао једну строгу, али врло апстрактну аксиоматику електродинамике, која базира на Clifford-овим бројевима у Minkovski-евом простору, при чему се за укупну струју и електромагнетно поље постулира да су Clifford-ови бројеви који задовољавају извесне одређене услове. Недавно је J. Horváth [6] дао једну исцрпну аксиоматику Maxwell-ове електродинамике, која је формулисана по угледу на Hammel-ову аксиоматику механике и у њој се узима пет група аксиома: аксиоме произвођења, аксиоме егзистенције, аксиоме стања, аксиоме везе и аксиоме материје.

Све наведене аксиоматике базирају на Maxwell-овом тумачењу електромагнетизма и постулирају *a priori* померајну струју. У овом раду покушаћемо да дамо једну такву аксиоматику која задовољава следеће услове: 1) заснива се доследно на Lorentz-овом микрофизичком тумачењу електромагнетизма, 2) не постулира *a priori* померајну струју, 3) не захтева никакве допунске услове, 4) има интегрални облик који садржи само мерне величине, 5) узима у најопштијем облику допунске једначине које карактеришу стање средине, 6) уводи појам енергије електромагнетног поља на основу механичких закона без икакве допунске хипотезе. При томе ћемо аксиоме електродинамике према њиховој природи поделити у три групе: основне аксиоме, аксиоме везе и аксиому енергије, а у оквиру овог система аксиома изложићемо и одговарајући систем дефиниција и основних образаца електродинамике.

ДЕФИНИЦИЈЕ ОПШТИХ ПОЈМОВА ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — Као основни појам електродинамике изаберимо *наелектрисање*, при чему јединица наелектрисања зависи од избора система јединица. У даљем излагању употребићемо *Giorgi-ев систем*, у коме су основни појмови дужина, маса, време и наелектрисање, а одговарајуће јединице метар, килограм, секунд и кулон.

Дефинишимо сад помоћу појма наелектрисања опште појмове електродинамике. Ако уочимо неко врло мало пробно наелектрисање e' у миру и ако на њега дејствује извесна сила $\vec{F}_1$, кажемо да у овом простору постоји *електрично поље* и помоћу ових величина дефинише се *јачина електричног поља* $\vec{E}$ обрасцем

$$\vec{F}_1 = e' \vec{E}. \tag{1}$$

Ако се ово пробно наелектрисање налази у кретању са брзином $\vec{v}'$ и ако на њега тада дејствује још извесна допунска сила $\vec{F}_2$, кажемо да у овом простору постоји и *магнетно поље* и помоћу ових величина дефинише се *јачина магнетног поља* $\vec{B}$ обрасцем

$$\vec{F}_2 = e' \left(\vec{v}' \times \vec{B} \right) \tag{2}$$

под условом да овај образац важи за свако $\vec{v}'$. Линије код којих се у свакој тачки правац тангенте поклапа са правцем јачине електричног или магнетног поља називају се *електричне линије сила* односно *магнетне линије сила*. Према конвенцији узима се толико линија сила кроз нормално постављену јединицу површине колико износи јачина електричног односно магнетног поља на том месту.

Ако уочимо око неке тачке M малу запремину ΔV у којој се налази наелектрисање Δe, *густина наелектрисања* дефинише се обрасцем

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V} \tag{3}$$

и претставља количину наелектрисања по јединици запремине. Израз

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \tag{4}$$

где је $\vec{v}$ брзина наелектрисања, назива се *густина струје* и по свом интензитету претставља количину наелектрисања која прође кроз нормално постављену јединицу површине на том месту у јединици времена, а израз

$$J = \int_S \vec{j}\, d\vec{S} \tag{5}$$

где је S ма каква површина, назива се *јачина струје* и претставља укупну количину наелектрисања која прође кроз површину S у јединици времена.

Ако уочимо извесну затворену линију L, израз

$$\mathbf{E} = \int_L \vec{E}\, d\vec{l} \tag{6}$$

назива се *електромоторна сила* и претставља рад који је потребан да се јединично наелектрисање обнесе једанпут по контури L, а на сличан начин дефинише се и *магнетомоторна сила* обрасцем

$$\mathbf{B} = \int_L \vec{B}\, d\vec{l} \tag{7}$$

Ако уочимо извесну површину S, израз

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\, d\vec{S} \tag{8}$$

назива се *флукс електричног поља* и према наведеној конвенцији претставља број електричних линија сила које пролазе кроз површину S, а на сличан начин дефнише се и *флукс магнетног поља* обрасцем

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}. \tag{9}$$

ОСНОВНЕ АКСИОМЕ ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — За основне аксиоме електродинамике узмимо следеће законе електромагнетизма, које можемо сматрати као резултате експерименталног проучавања електромагнетних појава.

Аксиома 1: *Флукс електричног поља кроз ма коју малу затворену површину сразмеран је количини наелектрисања у унутрашњости те површиче*

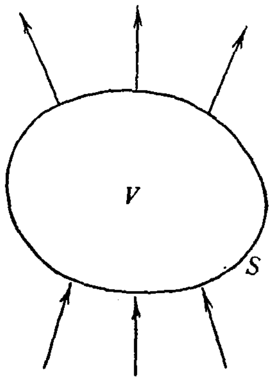
$$\int_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} e \tag{10}$$

где је $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ *фарад/м* (сл. 1). Овај закон назива се *Gauss-ова теорема.*

Аксиома 2: *Флукс магнетног поља кроз ма коју малу затворену површину увек је једнак нули без обзира на расподелу наелектрисања*

$$\int_S \vec{B}\,d\vec{S} = O \tag{11}$$

(сл. 1). Овај закон назива се *Ampère-ова хипотеза* или *закон непостојања магнетних полова.*

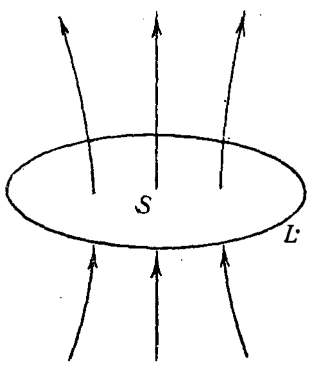


Сл. 1

Аксиома 3: *Свака промена флукса магнетног поља кроз ма коју малу отворену површину ствара електромоторну силу дуж контуре те површине, која је сразмерна промени флукса магнетног поља у јединици времена*

$$\int_L \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\,d\vec{S} \tag{12}$$

(сл. 2). Овај закон назива се *Faraday-ев закон.*



Сл. 2

Аксиома 4: *Свака промена флукса електричног поља кроз ма коју малу отворену површину ствара магнетомоторну силу дуж контуре те површине, која је сразмерна промени флукса електричног поља у јединици времена*

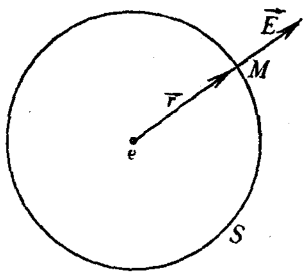
$$\int_L \vec{B}\,d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{E}\,d\vec{S} \tag{13},$$

где је $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *henry/m* (сл. 2). Овај закон назива се *Maxwell-ов закон.*

Ове аксиоме претстављају основне, независне и довољне законе, из којих се могу добити *Maxwell*-ове једначине, као што ћемо видети из даљег излагања, и стога ћемо ове аксиоме звати *основне аксиоме електродинамике*. Оне се заснивају на *Lorentz*-овом микрофизичком тумачењу електромагнетизма, не постулирају *a priori* померајну струју, не захтевају никакве допунске услове и имају интегрални облик који садржи само мерне величине.

ЕЛЕКТРИЧНО И МАГНЕТНО ПОЉЕ НАЕЛЕКТРИСАЊА. — Јачина електричног поља које ствара извесно мало наелектрисање e у произвољној тачки M (сл. 3) може се наћи на основу аксиоме 1, ако око овог наелектрисања опишемо сферу која пролази кроз тачку M. На основу обрасца (10) тада добијамо

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\vec{r}_0 \qquad (14).$$



Сл. 3

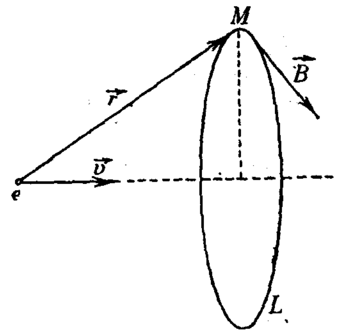
где је $\vec{r}_0$ јединични вектор вектора положаја тачке M. Сила којом наелектрисање e дејствује на наелектрисање e' на растојању r према обрасцима (1) и (14) износи

$$\vec{F}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e e'}{r^2}\vec{r}_0 \qquad (15)$$

и овај образац изражава *Coulomb-ов закон.*

Јачина магнетног поља које ствара наелектрисање e крећући се брзином $\vec{v}$ у произвољној тачки M (сл. 4) може се наћи на основу аксиоме 4 и обрасца (14). Електрично поље наелектрисања помера се кроз простор заједно са њим, што изазива мењање јачине електричног поља у тачки M, а то према аксиоми 4 изазива стварање магнетног поља. Ако за контуру L узмемо круг приказан на слици, може се показати [7] да се на основу образаца (13) и (14) добија

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\vec{v}\times\vec{r}_0}{r^2} \qquad (16)$$

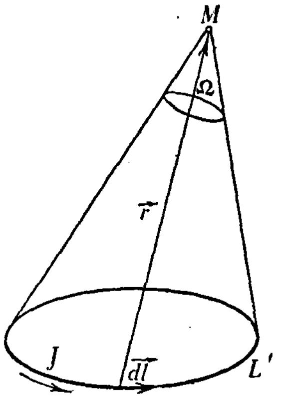


Сл. 4

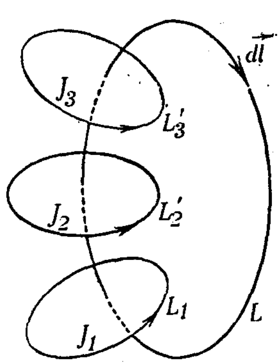
Тада допунска сила којом наелектрисање e са брзином $\vec{v}$ дејствује на наелектрисање e' са брзином $\vec{v}'$ на растојању r према обрасцима (2) и (16) износи

$$\vec{F}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ee'\,\vec{v}'\times(\vec{v}\times\vec{r}_0)}{r^2} \qquad (17)$$

и овај образац изражава *Ampère-ов закон.*



Сл. 5



Сл. 6

Ако уочимо елемент линиског проводника $\vec{dl}$ кроз који протиче струја јачине J (сл. 5) и посматрамо магнетно поље елементарних наелектрисања у овом елементу, на основу обрасца (16) добијамо да јачина магнетног поља које потиче од овог елемента струје на растојању r од њега износи

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J\, \vec{dl} \times \vec{r_0}}{r^2} \tag{18}$$

и то је *Laplace-ов закон*. На основу овог закона може се показати [8] да се укупна јачина магнетног поља у произвољној тачки M ван проводника може написати у облику

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 J}{4\pi} \operatorname{grad} \Omega, \tag{19}$$

где је Ω просторни угао под којим се из тачке M види контура проводника L'. Тада за ма какву контуру L која обавија низ проводника кроз које протичу струје јачине J_1, J_2, J_3.... (сл. 6) на основу обрасца (19) добијамо да магнетомоторна сила дуж контуре L износи

$$\int_L \vec{B}\, \vec{dl} = \mu_0 J \tag{20}$$

где је J збир јачина свих посматраних струја. Овај став, који је у извесном смислу аналог Gauss-овој теореми (10), назива се *Ampère-ова теорема*.

MAXWELL-ОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ВАКУУМ. — На основу основних аксиома електродинамике и наведених последица ових аксиома могу се добити Maxwell-ове једначине за вакуум. Посматрајмо електромагнетно поље у извесној области у којој се налазе слободна наелектрисања у вакууму са датом просторно-временском расподелом ових наелектрисања. Према обрасцу (10), који изражава аксиому 1, и Gauss-овој теореми из теорије вектора имамо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dV \tag{21}$$

а због произвољности запремине V одавде добијамо

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{22}$$

и то је прва Maxwell-ова једначина Према обрасцу (11), који претставља аксиому 2, и Gauss-овој теореми је

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B}\, dV = 0 . \tag{23}$$

а одавде због произвољности запремине V следује

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{24}$$

а то је друга Maxwell-ова једначина. Према обрасцу (12), који исказује аксиому 3, и Stokes-овој теореми из теорије вектора биће

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E}\, d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{25},$$

а одавде због произвољности површине S налазимо

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{26}$$

и то је трећа Maxwell-ова једначина. Најзад, означимо са $\vec{B}_1$ компоненту јачине магнетног поља која потиче од кретања наелектрисања, а са $\vec{B}_2$ ону њену компоненту која потиче од промене флукса електричног поља. Тада, према обрасцу (20), који је добијен на основу аксиома 1 и 4, и Stokes-овој теореми зо прву компоненту имамо

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B}_1\, d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}\, d\vec{S}, \tag{27}$$

а одавде због произвољности површине S добијамо

$$\operatorname{rot} \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} . \tag{28}$$

За другу компоненту према обрасцу (13), који изражава аксиому 4, и Stokes-овој теореми биће

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B}_2\, d\vec{S} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}, \tag{29}$$

а одавде због произвољности површине S следује

$$\operatorname{rot} \vec{B}_2 = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{30}$$

За укупну јачину магнетног поља тада добијамо

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{31}$$

а то је четврта Maxwell-ова једначина.

Одавде видимо да су Maxwell-ове једначине за вакуум добијене доследно на основу наведених основних аксиома електродинамике. При томе се посматране запремине и површине могу изабрати произвољно мале, те добијене Maxwell-ове једначине важе сасвим строго.

ДЕФИНИЦИЈЕ ПОЈМОВА ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ МАТЕРИЈАЛНИХ СРЕДИНА. — У материјалним срединама поред слободних постоје и везана наелектрисања и у том случају уводе се нови појмови електродинамике који карактеришу овакве средине. При томе величине које карактеришу право електромагнетно поље претстављају *микрофизичке величине*, а величине које се добијају мерењем претстављају средње вредности ових величина — *макрофизичке величине*. Замислимо око неке тачке $M(x,y,z)$ такав мали елемент запремине ΔV који је врло мали у односу на посматрану запремину а врло велики у односу на елементарне честице, а око извесног тренутка t такав мали интервал времена $\Delta\tau$ који је врло мали у односу на посматрани интервал времена а врло велики у односу на периоде кретања елементарних честица. Ако микрофизичке величине означимо индексом m, вредност ма какве макрофизичке величине Ψ у тачки M у тренутку t дефинисана је обрасцем

$$\Psi = \overline{\Psi_m} = \frac{1}{\Delta V \cdot \Delta\tau} \int\limits_{\Delta V} \int\limits_{-\Delta\tau/2}^{\Delta\tau/2} \Psi_m(\vec{r} + \vec{r}', t + t')\, dV'\, dt', \tag{32}$$

где је $\vec{r}'$ вектор положаја елемента запремине dV' у односу на тачку M.

Помоћу овог појма *јачина електричног поља* $\vec{E}$ и *јачина магнетног поља* $\vec{B}$ као макрофизичке величине дефинишу се обрасцима

$$\vec{E} = \overline{\vec{E}_m}, \qquad \vec{B} = \overline{\vec{B}_m} \tag{33}$$

и ове величине карактеришу макрофизичко електромагнетно поље у материјалним срединама. Материјална средина у којој се јачина електричног или магнетног поља разликује од јачине одговарајућег поља у вакууму назива се *диелектрик* односно *магнетик*.

Ако уочимо произвољан систем везаних наелектрисања $e_1, e_2, e_3, \ldots$ и ако означимо њихове векторе положаја са $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots$, а њихове брзине са $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$, израз

$$\vec{p} = \sum e_i \vec{r}_i \tag{34}$$

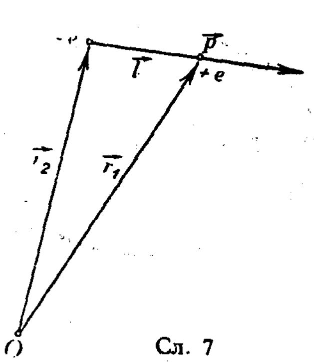
назива се *електрични моменат* овог система. Систем састављен од два једнака а супротна наелектрисања на блиском међусобном растојању (сл. 7) назива се *електрични дипол* и тада имамо

$$\vec{p} = e\,\vec{l}, \tag{35}$$

где је $\vec{l}$ вектор уперен од негативног ка позитивном наелектрисању. Ако око неке тачке M замислимо малу запремину ΔV са електричним моментом $\Delta\vec{p}$, *јачина електричне поларизације* дефинише се обрасцем

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \Delta\vec{p}/\Delta V \tag{36}$$

и претставља електрични момент по јединици запремине.

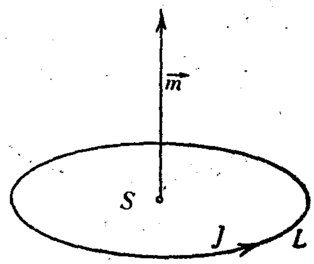


Сл. 7

За уочени систем везаних наелектрисања израз

$$\vec{m} = 1/2 \sum e_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \tag{37}$$

назива се *магнетни моменат* овог система. Систем састављен од наелектрисања која се крећу у виду елементарне струје у равни (сл. 8) назива се *магнетни дипол* и у том случају имамо



Сл. 8

$$\vec{m} = J\vec{S}, \tag{38}$$

где је J јачина ове струје, а S описана површина. На сличан начин као у претходном случају дефинише се *јачина магнетне поларизације* обрасцем

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \Delta\vec{m}/\Delta V \tag{39}$$

и она претставља магнетни момент по јединици запремине.

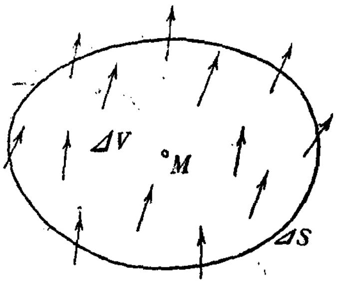
СРЕДЊА ГУСТИНА НАЕЛЕКТРИСАЊА И ГУСТИНА СТРУЈЕ. — Ако величине које се односе на слободна и везана наелектрисања означимо индексима s и v, средње вредности густине наелектрисања и густине струје одређене су обрасцима

$$\overline{\rho_m} = \overline{\rho_s} + \overline{\rho_v}, \qquad \overline{\vec{j}_m} = \overline{\vec{j}_s} + \overline{\vec{j}_v}. \tag{40}$$

При томе су средње вредности густине наелектрисања и густине струје које потичу од слободних наелектрисања идентичне са раније уведеним појмовима густине наелектрисања и густине струје, које ћемо као и раније обележити са ρ и $\vec{j}$

$$\rho = \overline{\rho_s}, \qquad \vec{j} = \overline{\vec{j}_s} \tag{41}$$

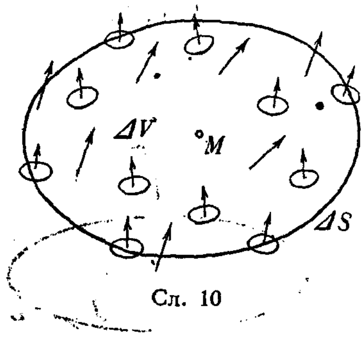
На основу дефиниције појма средње вредности видимо да средња вредност густине везаних наелектрисања потиче само услед промене њихових положаја при поларизацији диелектрика и ако посматрамо електричне диполе у малом елементу запремине око уочене тачке M (сл. 9), може се показати [9] да се добија



Сл. 9

$$\overline{\rho_v} = -\operatorname{div}\vec{P}. \tag{42}$$

Средња вредност густине струје везаних наелектрисања потиче како услед њиховог кретања у молекулима диелектрика тако и услед елементарних струја у молекулима магнетика и ако посматрамо електричне и магнетне диполе у малом елементу запремине око тачке M [сл. 10], може се показати [10] да се добија



Сл. 10

$$\overline{\vec{j}_v} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{M}. \tag{43}$$

На основу ових образаца налазимо да средње вредности густине наелектрисања и густине струје износе

$$\overline{\rho_m} = \rho - \operatorname{div}\vec{P}, \quad \overline{\vec{j}_m} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{M}. \tag{44}$$

MAXWELL-ОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА МАТЕРИЈАЛНЕ СРЕДИНЕ. — Maxwell-ове једначине (22), (24), (26) и (31) важе само за праве, микрофизичке величине

$$\operatorname{div}\vec{E}_m = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_m, \quad \operatorname{rot}\vec{E}_m = -\frac{\partial\vec{B}_m}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B}_m = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{B}_m = \mu_0\vec{j}_m + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_m}{\partial t}, \tag{45}$$

а ако узмемо средње вредности обеју страна ових једначина, на основу образаца (33) и (44) добијамо

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \operatorname{div}\vec{P}), \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{M}\right) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{46}$$

Ако уведемо величине

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}, \tag{47}$$

претходне једначине можемо написати у облику

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{48}$$

и то су Maxwell-ове једначине за материјалне средине. Величина $\vec{D}$ назива се *јачина електричне индукције*, а величина $\vec{H}$ *јачина магнетне индукције*, при чему напомињемо да смо супротно уобичајеној традицији величину $\vec{B}$ назвали јачином магнетног поља, а величину $\vec{H}$ јачином магнетне индукције, јер овако употребљени називи много боље одговарају садржају ових појмова.

Одавде видимо да су Maxwell-ове једначине за материјалне средине добијене само на основу основних аксиома електродинамике без хипотезе о допунској, померајној струји и без икаквих допунских услова.

АКСИОМЕ ВЕЗЕ ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — У систему Maxwell-ових једначина има више непознатих него што има једначина и стога овим једначинама морамо додати још извесне допунске једначине. Ове допунске једначине увешћемо следећим аксиомама, које претстављају извесна уопштавања веза у облику линеарних функционела [11].

Аксиома 5: *Јачина електричне поларизације у некој тачки $M(x,y,z)$ у тренутку t одређена је само вредностима јачине електричног поља у целој посматраној области и у целокупном претходном интервалу времена према закону*

$$\vec{P}(r,t) = \int\limits_{V}\int\limits_{-\infty}^{0} K_1(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\,\vec{E}(\vec{r}', t)\,dV'dt', \tag{49}$$

при чему облик језгра $K_1(\vec{r},t)$ зависи од природе средине.

Аксиома 6: *Јачина магнетне поларизације у некој тачки $M(x,y,z)$ у тренутку t одређена је само вредностима јачине магнетног поља у целој посматраној области и у целокупном претходном интервалу времена према закону*

$$\vec{M}(\vec{r},t) = \int\limits_{V}\int\limits_{-\infty}^{0} K_2(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\,\vec{B}(\vec{r}', t')\,dV'dt', \tag{50}$$

где је $\vec{r}'$ вектор положаја елемента запремине dV' у односу на тачку M, при чему облик језгра $K_2(\vec{r},t)$ зависи од природе средине.

Аксиома 7: *Густина струје слободних наелектрисања у некој тачки $M(x,y,z)$ у тренутку t одређена је само вредностима јачине укупног електричног поља у целој посматраној области и у целокупном претходном интервалу времена према закону*

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \int\limits_{V}\int\limits_{-\infty}^{0} K_3(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\,[\vec{E}(\vec{r}', t')+\vec{E}'(\vec{r}', t')]\,dV'dt', \tag{51}$$

где је E' јачина страног електричног поља, при чему облик језгра $K_3(\vec{r},t)$ зависи од природе средине.

Ове аксиоме успостављају везе између величина које карактеришу појаве у материјалним срединама и величине које претстављају узроке ових појава. Стога ћемо ове аксиоме звати *аксиоме везе електродинамике* и из њих се могу добити тражене допунске једначине.

ЈЕДНАЧИНЕ СТАЊА СРЕДИНЕ. — На основу образаца (49), (50) и (51) који изражавају аксиоме 5, 6 и 7, и образаца (47) добијамо

$$
\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \int_V \int_{-\infty}^{0} K_1(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\, \vec{E}(\vec{r}', t')\, dV'\, dt'. \\
\vec{H} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \int_V \int_{-\infty}^{0} K_2(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\, \vec{B}(\vec{r}', t')\, dV'\, dt'. \\
\vec{j} &= \int_V \int_{-\infty}^{0} K_3(\vec{r}+\vec{r}', t+t')\, [\vec{E}(\vec{r}', t') + \vec{E}'(\vec{r}', t')]\, dV'\, dt'.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Ове једначине претстављају допунске једначине електродинамике и заједно са Maxwell-овим једначинама потпуно одређују посматрано електромагнетно поље. Теориским расуђивањем не може се наћи никакав општи облик језгара $K_1(\vec{r}, t)$, $K_2(\vec{r}, t)$ и $K_3(\vec{r}, t)$ који би важио за све материјалне средине, те ове једначине зависе од природе средине и стога се називају *једначине стања средине*. На пр. код кристалних средина облик језгра $K_1(\vec{r}, t)$ карактерише зависност поларизације од праваца кристалних оса, а код феромагнетних средина облик језгра $K_2(\vec{r}, t)$ зависност магнетизације од предисторије магнетика.

Ако су језгра $K_1(\vec{r}, t)$, $K_2(\vec{r}, t)$ и $K_3(\vec{r}, t)$ занемарљиво мала ван неке врло мале области ΔV око тачке M и ван врло малог интервала времена $(t-\Delta\tau, t)$ и ако се може сматрати да су величине $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}'$ константне у тој области и том интервалу времена, једначине (52) можемо написати у облику

$$
\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E}+\vec{E}'), \tag{53}
$$

Ове услове задовољавају хомогене и неферомагнетне средине, а овако уведене величине ε, μ и σ зависе од природе средине и називају се *диелектрична константа, магнетна пермеабилност* и *специфична проводљивост* посматране средине.

АКСИОМА ЕНЕРГИЈЕ ЕЛЕКТРОДИНАМИКЕ. — О постојању електромагнетног поља може се закључити само по извесним ефектима који су повезани са појављивањем других познатих облика енергије на рачун енергије електромагнетног поља. Међутим само на основу система Maxwell-ових једначина и једначина стања средине не може се одредити енергија електромагнетног поља и стога уведимо скаларни и векторски потенцијал φ и $\vec{A}$ обрасцима

$$
\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{54}
$$

који дефинишу ове појмове, па поставимо следећу аксиому

Аксиома 8: *Ако се Maxwell-ове једначине могу добити из извесног варијационог принципа, при чему се за генералисане координате електромагнетног поља узимају скаларни и векторски потенцијал, из густине одговарајуће Lagrange-еве функције може се добити густина енергије електромагнетног поља на исти начин као у механици, тј. по закону*

$$w = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_x} \dot{A}_x + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_y} \dot{A}_y + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_z} \dot{A}_z - \Lambda . \tag{55}$$

Ова аксиома повезује механички појам енергије са појмовима електродинамике и на основу ње може се одредити енергија електромагнетног поља. Стога ћемо ову аксиому звати *аксиома енергије електродинамике* и она употпуњава раније наведене основне аксиоме и аксиоме везе електродинамике.

ЕНЕРГИЈА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГ ПОЉА — Може се показати[12] да се у случају хомогених и нефеpомагнетних средина Maxwell-ове једначине (48) могу добити из варијационог принципа

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \, dt = 0 \tag{56}$$

са Lagrange-евом функцијом

$$L = \int_V \left[\frac{1}{2} (\varepsilon E^2 - \frac{1}{\mu} B^2) + \vec{A} \vec{j} - \rho \varphi \right] dV . \tag{57}$$

Густина Lagrange-еве функције самог електромагнетног поља износи

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 - \frac{1}{\mu} B^2 \right) , \tag{58}$$

а одговарајућа густина енергије електромагнетног поља добија се на основу обрасца (55), који изражава аксиому 8, у облику

$$w = -\varepsilon \vec{E} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 . \tag{59}$$

Тада укупна енергија електромагнетног поља у области која обухвата потпуно поље има вредност

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2) \, dV . \tag{60}$$

и овај образац одређује енергију електромагнетног поља, локализовану у посматраном делу простора.

На тај начин на основу наведених осам аксиома електродинамике добили смо Maxwell-ове једначине (48), једначине стања средине (52) и образац за енергију електромагнетног поља (60). Скуп ових образаца претставља основне обрасце електродинамике, на којима се може изградити целокупна Maxwell-Lorentz-ова теорија електромагнетизма.

(Саопштено 2-IX-1960)

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. PANOFSKY and M. PHILLIPS — Classical Electricity and Magnetism, Cambridge 1955.

[2] Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ — Теория поля, Москва 1948.

[3] A. SOMMERFELD — Elektrodynamik, Leipzig 1949, 26—7, 30—5.

[4] J. STRATTION — Electromagnetic Theory, New York 1941, 1—6.

]5] A. MERCIER — Leçons sur les principes de l'électrodynamique classique, Neuchatel 1952, 67—71.

[6] J. HORVÁTH — Eine Axiomatisierung der Maxwellschen Theorie des Elektromagnetischen Feldes, *Acta phys. Acad. scient. hung.* **VIII 4** (1958), 399—418.

[7] И. СУПЕК — Теоријска физика и структура материје I, Загреб 1951, 275—7.

[8] J. SLATER and N. FRANK — Elecromagnetism, New York 1957, 57—62.

[9] И. ТАММ — Основы теории электричества, Москва 1957, 123—6.

[10] И. ТАММ — Основы теории электричества, Москва 1957, 303—6, 405—7.

[11] А. ВЛАСОВ — Макроскопическая електродинамика, Москва 1955, 15—20.

[12] А. КОМПАНЕЕЦ —Теоретическая физика, Москва 1957, 109—15.

UNE AXIOMATIQUE DE L'ELECTRODYNAMIQUE

Par Dj. MUŠICKI (Belgrade)

Dans cet article on donne une axiomatique de l'électrodynamique classique, qui est basée strictement à l'interprétation microphysique des phénomènes électromagnetiques de Lorentz et qui ne postule pas à priori le courant de deplacement. Le système des axiomes est divisé d'après leur nature en trois groupes: les axiomes fondamentaux, les axiomes de liason et l'axiome d'énergie. Pour les axiomes fondamentaux, sont choisis: le théorème de Gauss (10), l'hypothèse d'Ampère (11), la loi de Faraday (12) et la loi de Maxwell (13) dans le vide. Les axiomes de liaison sont pris sous la forme des fonctionnelles linéaires (49), (50) et (51) et l'axiome d'énergie est l'extension de rélation entre la fonction de Lagrange et l'énergie correspondante à l'électrodynamique (55). A partir de ces axiomes sont obtenues toutes les formules fondamentales de l'électrodynamique: les équations de Maxwell (48), les équations d'état (52) et l'expression d'énergie du champs électromagnetique (60).