Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ

ЈЕДАН *O*-ИНВЕРЗАН СТАВ

1. Предмет овог рада је доказ следећег става:

Нека је функција $A(u)$, дефинисана за $u \geqq 0$, ограничене варијације у сваком коначном размаку, нека је $A(0)=0$ и нека интеграл

$$S(x)=\int_0^\infty \frac{d\,A(u)}{(u+x)^{\rho-1}}, \quad \rho>1, \tag{1.1}$$

конвергира за једно (и тиме свако) $x>0$.

Ако функција $A(u)$ задовољава услов конвергенције

$$A(v)-A(u)>-m\,u^{\gamma} \quad \text{за свако} \quad u \leqq v \leqq \lambda u, \tag{1.2}$$

где је γ произвољан реалан број а $\lambda>1$, тада из

$$S(x)=O(x^{\gamma-\rho+1}),\quad x\to\infty, \tag{1.3}$$

следи

$$A(u)=O(u^{\gamma}),\quad u\to\infty. \tag{1.4}$$

Овај став употребили су у једном раду Р. Бојанић и В. Вучковић [1], упућујући за његов доказ на расправу [2] O. Szasz-a, у којој додуше став није формулисан, али се може извести аналогним поступком. И аутор овог чланка је у више наврата користио исти став (в. [3], [4]), опет без доказа. Како је методика доказа сличних ставова у наведеном раду O. Szasz-a прилично компликована, извешћу овде елементарни доказ наведеног става, применом једног општег поступка за доказ *O*-инверзних ставова који потиче од J. Карамате (в. [5]).

Случај $\gamma=0$ познат је те ћемо га искључити из даљег разматрања, јер се поступак доказивања мора за њега нешто изменити. Осим тога можемо без ограничења општости претпоставити да је $\gamma<\rho-1$, јер већ из конвергенције интеграла (1.1) следи

$$A(u)=o(u^{\rho-1}),\quad u\to\infty,$$

(в. [6] стр. 330).

2. Пре него што пређемо на доказ става извешћемо две леме.

Лема 1. *Из услова* (1.2) *следи да функција* $A(u)$ *за свако* $0 \leqq x \leqq y$ *задовољава и услов*

$$A(y)-A(x) > -m x^{\gamma} \frac{\left(\frac{\lambda y}{x}\right)^{\lambda}-1}{\lambda^{\gamma}-1}, \quad (\gamma \neq 0). \tag{2.1}$$

Доказ. За свако $y > x$ могу наћи природан број k такав да је

$$\lambda^{k} x < y \leqq \lambda^{k+1} x. \tag{2.2}$$

Из услова (1.2) следи да важе неједначине:

$$A(y)-A(\lambda^{k} x) > -m x^{\gamma} \lambda^{k\gamma}$$

$$A(\lambda^{k} x)-A(\lambda^{k-1} x) > -m x^{\gamma} \lambda^{(k-1)\gamma}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A(\lambda x)-A(x) > -m x^{\gamma},$$

па се њиховим сабирањем добија

$$A(y)-A(x) > -m \frac{\lambda^{(k+1)\gamma}-1}{\lambda^{\gamma}-1}.$$

Применом неједначина (2.2) следи одавде тврђење леме.

Напомена. Кад је $\gamma = 0$ услов (2.1) има облик

$$A(y)-A(x) > -\frac{m}{\log \lambda} \log\left(\lambda \frac{y}{x}\right)$$

и због тога се рачуни у којима се он примењује разликују од оних за $\gamma \neq 0$. Међутим, методски поступак је исти.

Лема 2. *Нека је*

$$\alpha(x) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} \{-A(t)\}. \tag{2.3}$$

Тада функција $\alpha(x)$ *задовољава за све* $0 \leqq x \leqq y$ *услов*

$$0 \leqq \alpha(y)-\alpha(x) \leqq m x^{\gamma} \frac{\left(\frac{\lambda y}{x}\right)^{\gamma}-1}{\lambda^{\gamma}-1}, \quad (\gamma \neq 0). \tag{2.4}$$

Доказ нећемо наводити јер је идентичан са доказом лемеа 2 у [5].

3. Прелазимо сада на доказ самог става. Као што смо приметили претпоставићемо да је $\gamma \neq 0$ и да је, без ограничења општости, $\gamma < \rho - 1$.

Парцијалном интеграцијом интеграла (1.1) добија се

$$S(x) = -(1-\rho)\int_0^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho}. \tag{3.1}$$

Из процене (1.3) следи да постоји број $M>0$ такав да је

$$M\,x^{\gamma-\rho+1} > \int_0^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} = \int_0^{px} \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} + \int_{px}^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho},$$

где је p позитиван број који ћемо касније прецизније одредити.

Према дефиницији функције $\alpha(x)$ и леми 1 добија се из горње неједначине

$$Mx^{\gamma-\rho+1} > -\alpha(px)\int_0^{px} \frac{du}{(u+x)^\rho} + A(px)\int_{px}^\infty \frac{du}{(u+x)^\rho} - \tag{3.2}$$

$$-\frac{mp^\gamma x^\gamma}{\lambda^\gamma - 1}\int_{px}^\infty \left[\left(\frac{u\lambda}{px}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du.$$

Како је

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{px} \frac{du}{(u+x)^\rho} = \frac{1}{\rho-1}\left[1-\frac{1}{(p+1)^{\rho-1}}\right]\cdot\frac{1}{x^{\rho-1}} = \frac{a}{x^{\rho-1}},\\ &\int_{px}^\infty \frac{du}{(u+x)^\rho}\;\frac{1}{(\rho-1)\,(p+1)^{\rho-1}}\cdot\frac{1}{x^{\rho-1}} = \frac{b}{x^{\rho-1}},\\ &x^\gamma\int_{px}^\infty\left[\left(\frac{u\lambda}{px}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du = O(x^{\gamma-\rho+1}). \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

то из (3.2) добијамо

$$Mx^{\gamma-\rho+1} > -\alpha(px)\frac{a}{x^{\rho-1}} + A(px)\frac{b}{x^{\rho-1}} + O(x^{\gamma-\rho+1}).$$

и на крају

$$A(x) < \frac{a}{b}\,\alpha(x) + O(x^\gamma), \quad x\to\infty. \tag{3.4}$$

С друге стране, опет на основу неједначине (1.3), је

$$-M\,x^{\gamma-\rho+1} < \int_0^{qx} \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} + \int_{qx}^\infty \frac{A(u)\,du}{(u+x)^\rho} = J_1 + J_2, \tag{3.5}$$

где је q позитиван број који ћемо касније прецизније одредити.

Применом леме 1 добија се из (3.5)

$$J_1 < A(qx)\int_0^{qx} \frac{du}{(u+x)^\rho} + \frac{m}{\lambda^\gamma - 1}\int_0^{qx} u^\gamma \left[\left(\frac{qx\lambda}{u}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du. \tag{3.6}$$

Како је

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{qx} \frac{du}{(u+x)^\rho} = \frac{1}{\rho-1}\left[1 - \frac{1}{(q+1)^{\rho-1}}\right]\cdot\frac{1}{x^{\rho-1}} = \frac{a_1}{x^{\rho-1}}, \\ \displaystyle\int_0^{qx} u^\gamma\left[\left(\frac{qx\lambda}{u}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du = O(x^{\gamma-\rho+1}), \end{cases} \tag{3.7}$$

то е

$$J_1 < A(qx)\frac{a_1}{x^{\rho-1}} + O(x^{\gamma-\rho+1}). \tag{3.8}$$

Применом неједначине (3.4) и леме 2 добија се даље

$$\begin{cases} \displaystyle J_2 < \frac{a}{b}\int_{qx}^{\infty} \frac{\alpha(u)}{(u+x)^\rho}\,du + O(1)\int_{qx}^{\infty}\frac{u^\gamma}{(u+x)^\rho}\,du < \frac{a}{b}\,\alpha(qx)\int_{qx}^{\infty}\frac{du}{(u+x)^\rho} \\ \displaystyle\qquad + \frac{a}{b}\cdot\frac{mq^\gamma x^\gamma}{\lambda^\gamma - 1}\int_{qx}^{\infty}\left[\left(\frac{u\lambda}{qx}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du + O(x^{\gamma-\rho+1}). \end{cases} \tag{3.9}$$

Како је

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{qx}^{\infty}\frac{du}{(u+x)^\rho} = \frac{1}{(\rho-1)(q+1)^{\rho-1}x^{\rho-1}} = \frac{d}{x^{\rho-1}}, \\ \displaystyle x^\gamma\int_{qx}^{\infty}\left[\left(\frac{u\lambda}{qx}\right)^\gamma - 1\right](u+x)^{-\rho}\,du = O(x^{\gamma-\rho+1}), \end{cases} \tag{3.10}$$

то из (3.9) и (3.10) следи

$$J_2 < \frac{ad}{b}\frac{\alpha(qx)}{x^{\rho-1}} + O(x^{\gamma-\rho+1}), \quad x \to \infty. \tag{3.11}$$

Из (3.8) и (3.11), уношењем у (3.5), добија се

$$-Mx^{\gamma-\rho+1} < A(qx)\frac{a_1}{x^{\rho-1}} + \frac{ad}{q}\cdot\frac{\alpha(qx)}{x^{\rho-1}} + O(x^{\gamma-\rho+1}),$$

тј.

$$-A(qx) < \frac{ad}{a_1 b}\alpha(qx) + O(x^{\gamma})$$

и најзад

$$-A(x) > \frac{ad}{a_1 b}\alpha(x) + O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty . \tag{3.12}$$

Како је $\alpha(x)$ најмања монотона функција која је већа од $-A(x)$, то из (3.12) следи

$$\alpha(x) \leqq \frac{ad}{a_1 b}\alpha(x) + O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty . \tag{3.13}$$

Како је

$$\frac{ad}{a_1 b} = \frac{(p+1)^{\rho-1}-1}{(q+1)^{\rho-1}-1},$$

узевши $p<q$, добија се

$$\alpha(x) = O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty,$$

а одавде, према (3.4) и дефиницији функције $\alpha(x)$, следи коначно

$$A(x) = O(x^{\gamma}), \quad x\to\infty,$$

што је и требало доказати.

(Саопштено 30-XII-1959)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Бојанић и В. Вучковић — О сопственим функцијама граничног задатка малих осцилација еластичне плоче. *Зборник радова Мат. Инст. САН.* **3** (1953), 107—128.

[2] O. Szász — Über einige Sätze von Hardy und Littlewood. *Nachrihten Gesell. der Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* (1930), 311—333.

[3] В. Вучковић — Стилтјесова трансформација која опада брзином експоненцијалне функције. *Зборник радова Мат. Инст. САН.* **3** (1953), 255—288.

[4] V. Vučković — Quelques théorèmes relatifs à la transformation de Stieltjes. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **6** (1954), 63—74.

[5] J. Карамата — О једном општем O-инверзном ставу. *Рад Југ. Акад. Загреб,* **261** (81) (1938), 1—22.

[6] D. V. Widdder — The Laplace Transform. Princeton, 1946.

EIN O-INVERSIONSSATZ

VLADETA VUČKOVIĆ (Zrenjanin)

Es wird folgender Satz bewiesen:

Sei $A(u)$ *von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke,* $A(0)=0$ *und*

$$S(x)=\int_0^\infty \frac{d\,A(u)}{(u+x)^{\rho-1}}, \quad (\rho>1)$$

konvergiere für ein (und somit für alle) $x>0$.

Aus

$$S(x)=O\,(x^{\gamma-\rho+1}), \quad x\to\infty$$

und der Konvergenzbedingung

$$A(v)-A(u)>-m\,u^{\gamma} \text{ für jedes } u\leqq v\leqq\lambda u \quad (\lambda>1)$$

folgt dan

$$A(u)=O(u^{\gamma}), \quad u\to\infty.$$

Dieser Satz wurde mehrmals vom Verfasser in [3] und [4] und zusammen mit R. Bojanić in [1] ohne Beweis angewandt, jedoch mit dem Hinweis auf die Note [2] von O. Szász, nach deren Muster man einen Beweis herleiten könnte. Hier wird der Satz, als Anwendung der allgemeinen Methode zur Herleitung der O-Inversionssätze, die von J. Karamata herrührt, elementar bewiesen.