Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

С. АЉАНЧИЋ

О НЕКИМ НОВИЈИМ РЕЗУЛТАТИМА ИЗ ТРИГОНОМЕТРИСКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ[1]

1. УВОД. (i) Нека је C простор непрекидних и периодичких функција периоде 2π. Једном за свагда претпоставићемо да је средња вредност функције $f \varepsilon C$ једнака нули, тј.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0\,.^{2}$$

Нека је $T_n(f)\,(n=1,2,\ldots)$ *поступак апроксимације* који свакој функцији $f \varepsilon C$ координира одређени тригонометриски полином $T_n(f;x)$ реда $\leqq n$. Такав поступак апроксимације је, например, низ *делимичних сума* $s_n(f)$ и низ *аритметичких средина* $\sigma_n(f)$ Fourier-овог реда функције f или низ тригонометриских полинома *најбоље апроксимације* $T_n^*(f)$ *функције* f.

За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$, величина

$$\Delta_C(f;T_n) = \|f - T_n\|_C = \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |f(x) - T_n(f;x)|$$

је *отступање* полинома $T_n(f)$ од функције f.

Нека је $M \subset C$. Скуп отступања

$$\{\Delta_C(f;T_n)\}_{f \varepsilon M} \tag{1.1}$$

карактерише поступак апроксимације $T_n(f)$ у односу на класу M *у целини*. У вези са овим скупом могу се поставити неколико питања:

---

[1] У овом експозиторном чланку изложена су нека питања из тригонометриске апроксимације, о којој, нарочито у најновије време, постоји богата литература. Чланак је нешто употпуњени семинар из наведене области који је одржан у летњем семестру 1960 на Природно-математичком факултету у Београду.

[2] Ово није никакво битно ограничење за f.

(A) За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ и дату класу функција M оценити с горње стране скуп (1.1). Такав исказ, типа[3]

$$f \varepsilon M \Longrightarrow \Delta_C(f; T_n) \leqq K\varphi(n)$$

зове се *директан став.*

(B) За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ и дату функцију $\varphi(n)$, одредити класу функција M, за коју је $\varphi(n)$ мајоранта скупа (1.1). Такав исказ, типа

$$\Delta_C(f; T_n) \leqq K\varphi(n) \Longrightarrow f \varepsilon M$$

зове се *инверзан став.*

(C) За одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ одредити класу функција M и функцију $\varphi(n)$, тако да за пар (M, φ) важи и директан и инверзан став. Такав исказ, типа

$$f \varepsilon M \Longleftrightarrow \Delta_C(f; T_n) \leqq K\varphi(n)$$

зове се *став еквиваленције.*

На исказе ове природе указали су још 1908 године H. Lebesgue [22*a*] и de la Vallée Poussin [40*b*], а први директан став (за поступак $s_n(f)$) потиче од H. Lebesgue-а [22*b*, *c*]. Значајан корак унапред претстављају радови D. Jackson-а [19*b*] и C. H. Бернштейн-а [7*a*, *b*], који су дали први директан односно инверзан став за најбољу апроксимацију функције $E_n(f)$. A. Zygmund-у [44*b*] припада први нетривијалан став еквиваленције за $E_n(f)$.

(ii) Код директних ставова поставља се и питање најбоље могуће константе K за одређену класу M, или, што је исто, да се одреди величина

$$E_C[M; T_n(f)] = \sup_{f \varepsilon M} \Delta_C(f; T_n).$$

$E_C[M; T_n(f)]$ је *најбоља аироксимација класе* M *иосшуйком* $T_n(f)$. Само изузетно могуће је ову тачно израчунати; зато се прибегава одређивању њеног асимптотског понашања или њеног реда величине када $n \to \infty$.

Први асимптотски образац за најбољу апроксимацију класе функција (за поступак $s_n(f)$) дао је A. H. Колмогоров [21], а прва тачна вредност најбоље апроксимације једне класе функција (за поступак $E_n(f)$) потиче од J. Favard-а [13*a*, *b*].

(iii) Могло би се очекивати да ће за одређени поступак апроксимације $T_n(f)$ најбоља апроксимација класе M, $E_C[M; T_n(f)]$, брже тежити нули када $n \to \infty$ уколико је класа M ужа, тј. уколико о њеним елементима f више претпоставимо. Међутим, ово није увек случај. Има поступака апроксимације $T_n(f)$, например $\sigma_n(f)$ (E. Hille [18]), који сужавањем класе M дају све бољу апроксимацију, али само до извесне границе — свако даље сужавање класе M ту апроксимацију

[3] K на разним местима уопште означава различите константе. $K_{p,q,r,\ldots}$ значи да оне зависе од параметара $p, q, r, \ldots$ Ако није од интереса да се истакне константа K, писаћемо $O[\varphi(n)]$.

више не побољшава сем у тривијалном случају функције идентички једнаке нули. Прецизније, извесним поступцима апроксимације $T_n(f)$ одговара функција $\varphi_T(n) \to 0$, $n \to \infty$, и класа функција M_T, тако да

1° $\Delta_C(f; T_n) = o[\varphi_T(n)] \Longrightarrow f(x) \equiv 0$;

2° за пар (M_T, φ_T) важи став еквиваленције.

За такве поступке $T_n(f)$ кажемо да се *засићују (сатурирају)*. $\varphi_T(n)$ је *најбоља апроксимација поступка* $T_n(f)$. Класа M_T је *класа засићења (сатурације)* поступка $T_n(f)$.

Исказ о класи сатурације неког поступка који се засићује је, дакле, један став еквиваленције. Но тај став еквиваленције (коме одговара пар (M_T, φ_T)) битно се разликује од ставова еквиваленције тог истог поступака за парове (M, φ) такве да $\varphi_T/\varphi \to 0$ када $n \to \infty$. Зато код поступака који се засићују овом специјалном ставу еквиваленције дајемо нарочито име — *став сатурације*.

Појам сатурације увео је J. Favard [13 *c*]. За поступке апроксимације који су остварени неким поступком збирљивости $\Gamma_n(f)$ примењеним на Fourier-ов ред функције f,

$$\Gamma_n(f) = \Gamma_n(f; x) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

од реда величине $1-\gamma_\nu^n$ зависи најбоља апроксимација тим поступком. Прецзније (J. Favard [13 *d*]), поступак $\Gamma_n(f)$ се засићује и најбоља апроксимација тим поступком је реда $\varphi_\Gamma(n)$ ако постоје две позитивне константе $K_\nu^{(1)}$ и $K_\nu^{(2)}$ такве да је

$$(1.2) \quad 0 < K_\nu^{(1)} \varphi_\Gamma(n) \leqq |1-\gamma_\nu^n| \leqq K_\nu^{(2)} \varphi_\Gamma(n) \text{ за свако } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Први став сатурације (за поступак $\sigma_n(f)$) следио је из резултата до којих су дошли G. Alexits [3*a*] и M. Zamansky [42*a*].

(iv) Поред простора C, аналогна разматрања могу се спровести и у другим просторима. Ми ћемо се овде задржати још и на *апроксимацији у средњем*, тј. на апроксимацији у смислу метрике у L^p, $1 \leqq p \leqq \infty$[4]. Уводећи *отступање у средњем*, полинома $T_n(f)$ од функције $f \varepsilon L^p$,

$$\Delta_{L^p}(f; T_n) = \| f - T_n \|_{L^p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - T_n(f; x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

[4] L^∞ је простор M скоро свуда ограничених функција у коме је

$$\| f \|_M = \sup_{0 \leqq x \leqq 2\pi} \text{ess} \, |f(x)|$$

коначан број. Кад пишемо $p \geqq 1$ под тим подразумевамо само $1 \leqq p < \infty$.

постављају се аналогни проблеми за скуп

$$\{\Delta_{L^p}(f; T_n)\}_{f\varepsilon M},$$

где је сада $M \subset L^p$, односно за величину

$$E_{L^p}[M; T_n(f)] = \sup_{f\varepsilon M} \Delta_{L^p}(f; T_n).$$

(v) Овде ћемо (уз већ класичне) изложити најновије резултате о исказима типа (A), (B), (C), и још неке који са овима стоје у вези, за неке специјалне поступке апроксимације: најбољу апроксимацију функције, делимичне суме Fourier-ова реда, њене средине Cesàro-вог, Hölder-овог, Riesz-овог, Rogozinski-евог, de la Vallée-Poussin-овог типа, затим за de la Vallée-Poussin-ов и Jackson — de la Vallée Poussin-ов интеграл, као и за опште линеарне поступке и оне дефинисане суматорном функцијом. Уопште неће бити речи о апроксимацији интерполационим тригонометриским полиномима; за ова, као и друга питања тригонометриске апроксимације упућујемо на монографије DE LA VALLÉE-POUSSIN-a [40 *a*], D. JACKSON-a [19 *a*], Н. И. АХИЕЗЕР-a [1] и И. П. НАТАНСОН-a [26 *a*].

2. КЛАСЕ ФУНКЦИЈА

2.1. КЛАСЕ ДЕФИНИСАНЕ МОДУЛОМ НЕПРЕКИДНОСТИ. (i) Нека $f\varepsilon C$. Величина

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; f) = \max_{|h|\leq\delta} \max_{0\leq x\leq 2\pi} |f(x+h) - f(x)| = \max_{|h|\leq\delta} \| f(x+h) - f(x) \|_C$$

је *модул непрекидности* функције f.

За свако $f\varepsilon C$, модул непрекидности, посматран као функција од δ, не опада и тежи нули када $\delta \to 0$. Међутим, ово нису једине карактеристичне особине модула непрекидности. Да би дата функција $\varphi(\delta)$ била модул непрекидности неке функције f, *потребно* је и *довољно* (С. М. Никольский [27 *d*]) да је

1) $\varphi(0) = 0$,

2) $\varphi(\delta)$ не опада,

3) $\varphi(\delta)$ је непрекидна функција од δ,

4) $\varphi(\delta+\eta) \leqq \varphi(\delta) + \varphi(\eta)$ за свако $\delta \geqq 0$ и $\eta \geqq 0$.

Функције које задовољавају услове 1—4) зовемо модулима непрекидности. Ови услови ће сигурно бити испуњени ако уз 1—3) важи и да $\varphi(\delta)/\delta$ не расте.[5]

Нека је $\varphi(\delta)$ функција која је модул непрекидности. Класу функција f за које је $\omega(\delta; f) \leqq \varphi(\delta)$ означаваћемо са Λ_φ.

---

[5] За детаље о модулу непрекидности и његовим особинама види DE LA VALLÉE POUSSIN [40 *a*], И. П. НАТАНСОН [26 *a*], С. М. НИКОЛЬСКИЙ [27 *d*] и Н. К. БАРИ и С. Б. СТЕЧКИН [6].

Као што смо већ напоменули, за свако $f \varepsilon C$, $\omega(\delta) \to 0$. Прецизирајући брзину којом $\omega(\delta) \to 0$, долазимо до специјалних класа функција у C. Например;

1° *Lipschitz-ову класу* ${}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, образују функције код којих је

$$\omega(\delta; f) \leqq K\delta^\alpha .$$

С обзиром на дефиницију модула непрекидности, ово је еквивалентно захтеву

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq K|h|^\alpha.$$

Ако нарочито желимо да истакнемо константу K у овој неједначини, пишемо $K\,{}^1\Lambda_\alpha$; специјално, $1\,{}^1\Lambda_\alpha$ значи да је ова константа једнака јединици.[6]

Функција која задовољава Lipschitz-ов услов са $\alpha > 1$ своди се на константу. Од нарочитог интереса је класа ${}^1\Lambda_1 : f \varepsilon\, {}^1\Lambda_1$ тада и само тада ако је апсолутно непрекидна и $|f'(x)| \leqq K$ скоро свуда.[7]

2° Класу **W** образују функције за које је

$$\omega(\delta; f) \leqq K\delta\,|\log\delta|.$$

Између класе **W** и Lipschitz-ових класа ${}^1\Lambda_\alpha$ постоји стриктна инклузија:

$${}^1\Lambda_1 \subset \mathbf{W} \subset {}^1\Lambda_\alpha \text{ за свако } 0 < \alpha < 1.$$

(ii) Модул непрекидности $\omega_2(\delta; f)$ другог реда дефинисан је са

$$\omega_2(\delta) = \omega_2(\delta; f) = \max_{|h| \leqq \delta} \max_{0 \leqq x \leqq 2\pi} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|$$
$$= \max_{|h| \leqq \delta} \|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\|_C .$$

Zygmund-ову класу ${}^2\Lambda_\alpha$ (A. Zygmund [44*b*]) образују функције f за које је

$$\omega_2(\delta; f) \leqq K|h|^\alpha ,$$

---

[6] Под ${}^1\Lambda_0$ подразумевамо класу ограничених функција.

[7] Заиста, ако $f \varepsilon K\,{}^1\Lambda_1$, она је апсолутно непрекидна и ограничене варијације, те има извод скоро свуда; из $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqq K$ тада следи $|f'(x)| \leqq K$ скоро свуда, Обрнуто, ако је f апсолутно непрекидна и $|f'(x)| \leqq K$ скоро свуда, f је интеграл, тј. $f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$ и $f'(x) = \varphi(x)$ скоро свуда, па према томе и $|\varphi(x)| \leqq K$ скоро свуда; дакле, $|f(x+h) - f(x)| = |\int_x^{x+h} \varphi(t)\,dt| \leqq K|h|$. — Наравно, ако $|f'(x)| \leqq K$ *за свако* x, тада $f \varepsilon\, {}^1\Lambda_1$. Али ако је $|f'(x)| \leqq K$ само скоро свуда, мора се *претпоставити* да је f апсолутно непрекидна, јер постоји (види, например, E. C. Titchmarsh [39], § 11.72) непрекидна функција која има извод скоро свуда једнак нули а ипак није апсолутно непрекидна.

или, што је исто,

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \leqq K|h|^{\alpha}.$$

За $0<\alpha<1$ класе ${}^1\Lambda_\alpha$ и ${}^2\Lambda_\alpha$ се поклапају (A. Zygmund [44*a*], т. I, стр. 120). Међутим, ${}^1\Lambda_1 \neq {}^2\Lambda_1$; наиме, функције класе ${}^1\Lambda_1$ имају скоро свуда ограничен извод, док класи ${}^2\Lambda_1$ припадају и функције које нигде немају извод (A. Zygmund [44*b*]). Прецизније:

$$f \varepsilon {}^2\Lambda_1 \Longrightarrow \omega(\delta; f) \leqq K\delta|\log\delta| \tag{2.1}$$

(A. Zygmund [44*a*], т. I, стр. 44) и ова процена се не може побољшати. Према томе,

$${}^1\Lambda_1 \subset {}^2\Lambda_1 \subset \mathbf{W}.$$

Примећујемо да је и други знак инклузије у стриктном смислу.

(iii) Модуле непрекидности вишег реда[8]

$$\omega_k(\delta)=\omega_k(\delta;f)=\max_{|h|\leqq\delta}\left\|\sum_{\varkappa=0}^{k}(-1)^{k-\varkappa}\binom{k}{\varkappa}f(x+\varkappa h)\right\|_C$$

увео је С. Н. Бернштейн [7*a*]. О особинама $\omega_k(\delta;f)$ види A. Marchaud [24], С. Б. Стечкин [33*a*, *c*], Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [6].

(iv) Појам модула непрекидности преноси се из простора C у простор L^p, $p \geqq 1$. *Интегрални модул непрекидности* k-тог реда функције f дефинисан је са[9]

$$\omega_k^p(\delta)=\omega_k^p(\delta;f)=\sup_{|h|\leqq\delta}\left\|\sum_{\varkappa=0}^{k}(-1)^{k-\varkappa}\binom{k}{\varkappa}f(x+\varkappa h)\right\|_{L^p}.$$

За свако $f \varepsilon L^p$, $\omega^p(\delta;f)\to 0$ када $\delta\to+0$. Ако $f \varepsilon C$, $\omega^p(\delta;f)\to\omega(\delta,f)$ када $p\to\infty$. У простору L^p дефинишу се класе ${}^1\Lambda_\alpha^p$ и ${}^2\Lambda_\alpha^p$, $0<\alpha\leqq 1$, са $\omega_p(\delta;f)\leqq K\delta^\alpha$ односно $\omega_2^p(\delta;f)\leqq K\delta^\alpha$; оне су различите само за $\alpha=1$. Примећујемо да, насупрот исказу (2.1) у простору C, који је ту најбољи могући, у простору L^p важи

$$f \varepsilon {}^2\Lambda_1^p,\ 1\leqq p<\infty \Longrightarrow \omega^p(\delta;f)\leqq\begin{cases}K\delta|\log\delta|^{1/p}, & 1\leqq p\leqq 2;\\ K\delta|\log\delta|^{1/2}, & p\geqq 2;\end{cases}$$

и ова процена се не може побољшати (А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [38] за $p=2$, а за остале вредности A. Zygmund [44*e*]).

2.2. КЛАСЕ ФУНКЦИЈА ДЕФИНИСАНЕ ИЗВОДОМ. (i) Једна од класа које се најчешће сусрећу је класа функција које имају ограничени r-ти извод, тј. $|f^{(r)}(x)|\leqq K$ за свако x. Општије, $W^{(r)}$ $(r=1,2,\ldots)$ је класа функ-

[8] $\omega_1(\delta;f)=\omega(\delta;f)$.

[9] $\omega_1^p(\delta;f)=\omega^p(\delta;f)$.

ција које имају апсолутно непрекидан $(r-1)$-и извод а r-ти извод им је скоро свуда ограничен, тј.

$$\|f^{(r)}\|_M = \sup_x \operatorname{ess} |f^{(r)}(x)| \leqq K.$$

С обзиром на примедбу[7], $f \varepsilon W^{(r)}$ тада и само тада ако f има $(r-1)$-и извод који припада ${}^1\Lambda_1$.

Уводећи појам интеграла и извода реда $r > 0$, где r не мора да буде цео позитиван број, могу се дефинисати још општије класе.

(ii) Нека је f L-интеграбилна периодичка функција периоде 2π (и као увек, средње вредности једнаке нули) и нека је

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

њен Fourier--ов ред.

Weyl-ов интеграл $f_r(x)$ реда $r > 0$ функције $f(x)$ дефинише се са (види A. Zygmund [44 *a*] Ch. XII, § 8 и 9)

$$f_r(x) = \cos\frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x}{\nu^r} + \sin\frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x}{\nu^r}.$$

Тригонометриски ред на десној страни конвергира за скоро свако x и Fourier-ов је ред своје суме $f_r(x)$. Из дефиниције следи $(f_r)_s = f_{r+s}$. Како се за $r = 1, 2, \ldots$ Weyl-ов интеграл своди на r пута поновљени обични интеграл, то је, с обзиром на претходну особину, нарочито интересантан случај $f_r(x)$, $0 < r < 1$.

Weyl-ов интеграл може се изразити и у облику

$$f_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \Psi_r(x-t)\, dt, \tag{2.2}$$

где је

$$\Psi_r(x) = \cos\frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu^r} + \sin\frac{r\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu^r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\nu x - r\pi/2)}{\nu^r}.$$

Ред на десној страни конвергира за $x \neq 0$ и он је Fourier-ов ред своје суме $\Psi_r(x)$.

Weyl-ов извод $f^{(r)}(x)$ реда r, $0 < r < 1$, функције $f(x)$ дефинише се са (види A. Zygmund [44 *a*], Ch. XII, §§ 8 и 9)

$$f^{(r)}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-r}(x).$$

Општије, ако је $r > 0$ и n најмањи цео број који је већи од r,

$$f^{(r)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f_{n-r}(x).$$

Нарочито је важан специјалан случај (једноставности ради, узећемо $0 < r < 1$) када је $f_{1-r}(x)$ апсолутно непрекидна функција. Тада се, наиме, Fourier-ов ред од $f^{(r)}(x)$ добија формалним диференцирањем Fourier-овог реда од $f_{1-r}(x)$. Шта више, у овом специјалном случају, могуће је (С. М. Никольский [27c]) функције која имају Weyl-ов извод овако окарактерисати:

L-интеграбилна периодичка функција $\varphi(x)$, периоде 2π и средње вредности једнаке нули, је Weyl-ов извод r-тог реда функције $f(x)$, ако између $f(x)$ и $\varphi(x)$ постоји веза

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, \Psi_r(x-t)\, dt, \quad (r > 0).$$

Заиста, поредећи овај образац са (2.2), следи да је $f = \varphi_r$, па је $f_{1-r} = (\varphi_r)_{1-r} = \varphi_1 = \int \varphi\, dx$; дакле, f_{1-r} је као интеграл апсолутно непрекидна функција и $\frac{d}{dx}(f_{1-r}) = \varphi$ скоро свуда.

У овом раду ми ћемо под Weyl-овим изводом увек подразумевати овај специјалан случај.

(iii) Нека је $r > 0$ и β реалан број и ставимо

$$\Psi_r(x;\beta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\nu x - \beta\pi/2)}{\nu^r}.$$

Са $W^{(r)}(\beta)$ означићемо класу непрекидних функција које имају репрезентацију (С. Б. Стечкин [33e])

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, \Psi_r(x-t;\beta)\, dt \tag{2.3}$$

где је

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_M \leqq K.$$

Ако желимо да истакнено константу K пишемо $K\, W^{(r)}(\beta)$; специјално, $1\, W^{(r)}(\beta)$ значи да је она једнака јединици.

Нарочито су интересантни ови специјални случајеви класе $W^{(r)}(\beta)$: $W^{(r)}(r) = W^{(r)}$ и $W^{(r)}(0)$. Прва је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ реда $r > 0$ (у смислу прецизираном у (ii)) за који је $\|f^{(r)}\|_M \leqq K$.

Примећујемо да за $0 < r < 1$ класа $W^{(r)}$ стоји према класи ${}^1\Lambda_r$ у истом односу као класа ${}^1\Lambda_1$ према класи ${}^2\Lambda_1$. Наиме, с једне стране је по дефиницији

$$f \varepsilon W^{(r)} \text{ еквивалентно са } f_{1-r} \varepsilon {}^1\Lambda_1,$$

док је с друге стране (A. Zygmund [44], Ch. XII, Th.8.13 и 8.14)

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_r \text{ еквивалентно са } f_{1-r} \varepsilon {}^2\Lambda_1.$$

Дакле, за $0 < r < 1$, важи стриктна инклузија

$$W^{(r)} \subset {}^1\Lambda_r,$$

док је $W^{(1)} = {}^1\Lambda_1$. Ово даје повода, а и други резултати на то указују, да је природно продужење класе ${}^1\Lambda_\alpha (= {}^2\Lambda_\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, класа ${}^2\Lambda_1$, а не класа ${}^1\Lambda_1$, која је природно продужење класе $W^{(r)}$, $0 < r < 1$. У том смислу говорићемо да је $W^{(r)}$, $0 < r < 1$, класа типа ${}^1\Lambda_1$, а да је ${}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, класа типа ${}^2\Lambda_1$.

Аналогон класе $W^{(r)}(\beta)$ у простору L образују L-интеграбилне функције f које имају репрезентацију (2.3) са

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0 \text{ и } \|\varphi\|_L \leqq K.$$

Ову класу означавамо са $W_L^{(r)}(\beta)$. Специјално, $W_L^{(r)}(r) = W_L^{(r)}$ је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ реда $r > 0$ за који је $\|f^{(r)}\|_L \leqq K$.

(iv) Комбинујући класе дефинисане изводом и оне дефинисане модулом непрекидности, могу се формирати сложене класе:

$W^{(r)}\Lambda_\varphi$, $r > 0$, је класа функција које имају непрекидан Weyl-ов извод $f^{(r)}$ чији је модул непрекидности $\omega(\delta; f^{(r)}) \leqq \varphi(\delta)$.

$W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha$, $r > 0$, $0 < \alpha < 1$, је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ који $\varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha$; по дефиницији коју смо дали $W^{(r)}\,{}^1\Lambda_1 = W^{(r+1)}$.

$W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha$, $r > 0$, $0 < \alpha \leqq 1$, је класа функција које имају Weyl-ов извод $f^{(r)}$ који $\varepsilon\, {}^2\Lambda_\alpha$.

Аналогно се дефинишу сложене класе функција у простору L^p, $p \geqq 1$: $W^{(r)}\Lambda_\varphi^p$, $W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha^p$, $W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha^p$.

2.3. КОЊУГОВАНЕ КЛАСЕ ФУНКЦИЈА. (i) Нека $f \varepsilon L$ и нека је

$$S[f] = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

Fourier-ов ред функције $f(x)$; *коњуговани ред* овоме је

$$\tilde{S}[f] = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x.$$

За скоро свако x постоји[10]

$$\tilde{f}(x) = -\frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} t/2} dt;$$

$\tilde{f}(x)$ је *коњугована функција* функцији $f(x)$. Оправдање за ове називе лежи у томе што постоји известан паралелизам између f и $S[f]$ с једне и $\tilde{f}$ и $\tilde{S}[f]$ с друге стране. Но тај паралелизам није потпун. Тако, $\tilde{f}(x)$ не мора бити L-интеграбилна, нити ограничена или непрекидна ако је таква $f(x)$.

(ii) Нека је дата класа функција M. Њој *коњуговану класу* $\overline{M}$ образују оне функције f чија коњугована функција $\tilde{f}$ припада M. Операција коњуговања класе не доводи увек до нове класе, тј. ова може бити *рефлексивна*. Искази „$\overline{M} = M$" су ставови Приваловљева типа.

И. И. Привалов [29] је показао да

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \tilde{f} \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha.$$

Како је $(\tilde{\tilde{f}}) = -f$, то важи и обрнут исказ, тј.

$$\overline{{}^1\Lambda_\alpha} = {}^1\Lambda_\alpha \quad \text{за } 0 < \alpha < 1. \tag{2.4}$$

За $\alpha = 1$ ово више није тачно, тј. класе ${}^1\Lambda_1$ и $\overline{{}^1\Lambda_1}$ су неупоредиве. Међутим, као што је то показао A. Zygmund [44 *b*], класа ${}^2\Lambda_1$ је рефлексивна, тј. $f \varepsilon {}^2\Lambda_1 \Longleftrightarrow \tilde{f} \varepsilon {}^2\Lambda_1$, што заједно са (2.4) даје

$$\overline{{}^2\Lambda_\alpha} = {}^2\Lambda_\alpha \quad \text{за } 0 < \alpha \leqq 1. \tag{2.5}$$

Из изложеног следи да су и класе $W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, и $W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leqq 1$, рефлексивне, док то није случај са класом $W^{(r)}$ или $W^{(r)}(0)$, у чију дефиницију имплицитно улази класа ${}^1\Lambda_1$.

Уопштењем Приваловљева става на класе функција дефинисане модулом непрекидности бавили су се Н. К. Бари и С. Б. Стечкин.

Н. К. Бари [5] је доказала да за свако $\alpha > 0$ и $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta; f) = O(\delta^\alpha) \Longrightarrow \omega_k(\delta; \tilde{f}) = O(\delta^\alpha),$$

што садржи претходни резултат Привалов-а и Zygmund-а.

Још општије, Н. К. Бари [5] је дала *довољне* услове, а Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [6] заједно, *потребне* и *довољне* услове које мора да испуњава функција $\varphi(\delta)$ да би се класе функција за које је

$$\omega(\delta; f) = O[\varphi(\delta)] \text{ и } \omega(\delta; \tilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$$

поклапале. Прецизније:

[10] За ово и даље види, например, A. Zygmund [44*a*], Ch II, § 5.

Нека функција $\varphi(\delta)$, $0 \leqq \delta \leqq \pi$, задовољава ове услове: 1) $\varphi(\delta)$ је непрекидна у $[0, \pi]$; 2) $\varphi(\delta)$ не опада; 3) $\varphi(\delta) \neq 0$ за $0 < \delta \leqq \pi$; 4) $\varphi(\delta) \to 0$ када $\delta \to +0$; 5) $\varphi(\delta)/\delta$ не расте. Потребан и довољан услов да би искази

$$\omega(\delta; f) = O[\varphi(\delta)] \quad \text{и} \quad \omega(\delta; \tilde{f}) = O[\varphi(\delta)]$$

били еквивалентни јесте да је

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) = O\left[n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Аналогни искази важе и у простору $L^p, p \geqq 1$, за интегралне модуле непрекидности. Међутим, у простору L^p, $p > 1$, такви искази су неинтересантни (С. Б. Стечкин [33*d*]), јер на основу познатог M. Riesz-овог резултата

$$\|\tilde{f}\|_{L^p} \leqq K_p \|f\|_{L^p} \qquad (p > 1)$$

непосредно следи

$$\omega_k^p(\delta; \tilde{f}) \leqq K_p\, \omega_k^p(\delta; f) \qquad (p > 1).$$

Како важи и обрнути исказ, то су у L^p, $p > 1$, модули $\omega_k^p(\delta; f)$ и $\omega_k^p(\delta; \tilde{f})$ увек величине истог реда.

3. НАЈБОЉА АПРОКСИМАЦИЈА ФУНКЦИЈЕ. (i) Нека је H_n скуп тригонометриских полинома T реда $\leqq n$. За дато $f \varepsilon C$, скуп бројева $\Delta_C(f; T)$, када T пролази све полиноме из H_n, ограничен је с доње стране, те има инфимум; овај ћемо означити са

$$E_n = E_n(f) = \inf_{T \varepsilon H_n} \Delta_C(f; T).$$

$E_n(f)$ је *најбоља аироксимација функције* f полиномина из H_n. E. Borel [8] је показао да за свако n *иосшоји* у H_n полином $T_n^*(f)$ такав да је

$$\Delta_C(f; T_n^*) = E_n(f)$$

и тиме оправдао уведену терминологију. Из Чебышев-љевих резултата (види, например, И. П. Натансон [26*a*]) следи да за свако n постоји само један такав полином $T_n^*(f)$. Низ $T_n^*(f)$, $n = 1, 2, \ldots$, је низ *шригономешриских иолинома најбоље аироксимације функције* f реда $\leqq n$, и њиме је, дакле, остварен један поступак апроксимације $T_n(f)$.

Јасно је да E_n не расте са n, а из Weierstrass-овог става следи да $E_n \to 0$ када $n \to \infty$.

На аналоган начин се дефинише најбоља апроксимација функције у простору L^p, $p \geqq 1$:

$$E_n(f)_{L^p} = \inf_{T \varepsilon H_n} \Delta_{L^p}(f; T).$$

(ii) Од D. Jackson-а [19*a*, *b*] потичу прве процене најбоље апроксимације. Ако $f \varepsilon C$ [illegible] има модул непрекидности $\omega(\delta; f)$, тада је

$$E_n(f) \leqq K\,\omega(n^{-1}; f).$$

Одавде специјално следи:

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha\,,\ 0 < \alpha \leqq 1 \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}), \tag{3.1}$$

$$f \varepsilon \mathbf{W} \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-1} \log n)\,. \tag{3.2}$$

Општије, ако f има има непрекидан r-ти извод $f^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots$, тада је

$$E_n(f) \leqq K_r\, n^{-r}\, \omega(n^{-1};\ f^{(r)})$$

и специјално

$$f^{(r)} \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha\,,\ 0 < \alpha \leqq 1 \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}). \tag{3.3}$$

Ове резултате пренео је у простор L^p, $p \geqq 1$,[11] E. S. Quade [30]. Он је показао да ако f има извод $f^{(r)}$ у L^p да је тада

$$E_n(f)_{L^p} \leqq K_{r,p}\, n^{-r}\, \omega^p(n^{-1};\ f^{(r)}),\ r = 0, 1, 2, \ldots,$$

и специјално

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha^p\,,\ p \geqq 1,\ 0 < \alpha \leqq 1 \Longrightarrow E_n(f)_{L^p} = O(n^{-\alpha}).$$

(iii) Jackson-ови ставови закључују из диференцијалних особина функције о њеној најбољој апроксимацији $E_n(f)$. С. Н. Бернштейн [7*a*, *b*] је, обрнуто, полазећи од најбоље апроксимације функције закључио о њеним диференцијалним особинама. Он је показао да

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha}),\ 0 < \alpha \leqq 1 \Longrightarrow \begin{cases} f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha\,,\ 0 < \alpha < 1; \\ f \varepsilon \mathbf{W}\,,\ \alpha = 1; \end{cases} \tag{3.4}$$

и општије, да

$$E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}),\ r = 1, 2, \ldots,\ 0 < \alpha \leqq 1 \Longrightarrow \begin{cases} f^{(r)} \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha\,,\ 0 < \alpha < 1; \\ f^{(r)} \varepsilon \mathbf{W},\ \alpha = 1\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Инверзне ставове у којима се закључује о модулу непрекидности функције или њеног извода дао је de la Vallée Poussin [40*a*]:

Нека је $\Omega(x)$ монотона функција која $\to 0$ када $x \to \infty$ и нека је

$$\int^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x} < \infty\,.$$

Ако је

$$E_n(f) \leqq n^{-r}\, \Omega(n)\,,\quad r = 0, 1, \ldots,$$

[11] И у друге општије просторе.

тада f има непрекидан r-ти извод и

$$\omega(\delta; f^{(r)}) \leqq K_r \left\{ \delta \int_a^{a/\delta} \Omega(x)\, dx + \int_{1/\delta}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x} \right\},$$

где K_r и a не зависе од δ.

Специјално, ако се, поред већ наведених услова за $\Omega(x)$, може наћи константа α таква да $x^\alpha \Omega(x)$ не опада (од извесног x_0), тада је

$$\omega(\delta; f^{(r)}) \leqq K_r \int_{1/\delta}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x}.$$

Услов $\int^{\infty} x^{-1} \Omega(x)\, dx < \infty$ је битан; например, за $r=1$ од њега зависи да ли ће f' бити непрекидна или прекидна функција.

Овај DE LA VALLÉE POUSSIN-ов резултат важи и у простору L^p, $p \geqq 1$. E. S. QUADE [30] је показао да из

$$E_n(f)_{L^p} \leqq n^{-r} \Omega(n), \quad r = 0, 1, \ldots,$$

следи да f има апсолутно непрекидан извод $f^{(r-1)}$, да постоји $f^{(r)}$ скоро свуда и да је

$$\omega^p(\delta; f^{(r)}) \leqq K_{r,p} \left\{ \delta \int_a^{a/\delta} \Omega(x)\, dx + \int_{1/\delta}^{\infty} \Omega(x) \frac{dx}{x} \right\}.$$

Специјално, одавде следи

$$E_n(f)_{L^p} = O(n^{-\alpha}) \Longrightarrow \begin{cases} f \varepsilon^1 \Lambda_\alpha^p, & 0 < \alpha < 1; \\ \omega^p(\delta; f) = O(\delta |\log \delta|), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Примећујемо да се исказ за $\alpha = 1$ може побољшати када је $p > 1$, користећи ZYGMUND-ов резултат за простор L^p из наредне тачке (iv) и § 2.1 (iv).

(iv) Из (3.1) и (3.4) непосредно следи став еквиваленције

$$f \varepsilon^1 \Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha < 1. \tag{3.6}$$

За $\alpha = 1$ овај исказ више не важи. Могло би се зато помислити да било исказ

$$f \varepsilon^1 \Lambda_1 \Longrightarrow E_n(f) = O(n^{-1}), \tag{3.7}$$

било исказ

$$E_n(f) = O(n^{-1}) \Longrightarrow f \varepsilon \mathbf{W}, \tag{3.8}$$

није довољно прецизан. Међутим, оба су у извесном смислу најбоља могућа, као што то показују функције $\varphi = |\sin x|$ и $\psi = \Sigma \nu^{-2} \sin \nu x$. (види И. П. НАТАНСОН [26 *a*], стр. 92-94). Наиме, с једне стране,

$\varphi \varepsilon {}^1\Lambda_1$, а за њу је $E_n(\varphi) > [2\pi(2n+1)]^{-1}$ те се (3.7) не може побољшати; с друге стране, $E_n(\psi) = O(n^{-1})$, а ψ не прииада ${}^1\Lambda_1$, тако да се у (3.8) **W** не може заменити са ${}^1\Lambda_1$.

Питање карактеризације класе функција за коју је $E_n(f) = O(n^{-1})$ решио је A. Zygmund [44*b*] уводећи класу ${}^2\Lambda_1$; он је показао да важи став еквиваленције:

$$(3.9) \qquad f \varepsilon {}^2\Lambda_1 \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-1}).$$

С обзиром на ${}^1\Lambda_\alpha = {}^2\Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, (3.6) и (3.9) можемо овако написати:

$$(3.10) \qquad f \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha \leqq 1.$$

Општије, из (3.3) и првог исказа у (3.5) следи

$$f^{(r)} \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}) \text{ за } r = 1, 2, \ldots;\ 0 < \alpha < 1.$$

што заједно са Zygmund-овим резултатом

$$f^{(r)} \varepsilon {}^2\Lambda_1 \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-1}) \text{ за } r = 1, 2, \ldots,$$

можемо писати у облику

$$(3.11) \qquad f^{(r)} \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}) \text{ за } r = 1, 2, \ldots;\ 0 < \alpha \leqq 1.$$

Слични резултати постоје у простору L^p, $p \geqq 1$. Из E. S. Quade-ових резултата у (ii) и (iii), непосредно следи

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha^p \Longleftrightarrow E_n(f)_{L^p} = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha < 1.$$

Примећујемо да су овај став еквиваленције, без доказа, исказали G. H. Hardy и J. E. Littlewood [17]. Нетривијалан став еквиваленције

$$f \varepsilon {}^2\Lambda_1^p \Longleftrightarrow E_n(f)_{L^p} = O(n^{-1})$$

дао је A. Zygmund [44*b*]. Слични искази важе и за извод $f^{(r)}$.

(v) Zygmund-ов резултат указао је на значај модула непрекидности другог реда када је реч о најбољој апроксимацији. То је потстакло многе ауторе, да уведу и модуле непрекидности вишег реда. Тако је С. Б. Стечкин [33*a*] дао најопштију формулацију Jackson-овом ставу:

$$(3.12) \qquad f^{(r)} \varepsilon C \Longrightarrow E_n(f) \leqq K_{r,k}\, n^{-r}\, \omega_k(n^{-1}; f^{(r)}),\ r = 0, 1, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots$$

Слично важи у простору L^p, $p \geqq 1$:

$$f^{(r)} \varepsilon L^p \Longrightarrow E_n(f)_{L^p} \leqq K_{r,k,p}\, n^{-r}\, \omega_k^p(n^{-1}; f^{(r)}),\ r = 0, 1, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots$$

Из Jackson-овог директног и de la Vallée Poussin-овог инверзног става за модуле непрекидности, не може се простим спајањем добити став еквиваленције. Зато су даље испитивања ишла у правцу да се погодно ограничи функција $\Omega(x)$ у de la Vallée Poussin-овом ставу тако да инверзни став заједно са директним да непосредно став еквиваленције.

С. Б. Стечкин [33*a*] дао је *довољне* услове за функцију $\varphi(\delta)$ да би

$$E_n(f)=O[\varphi(n^{-1})] \Longrightarrow \omega_k(\delta;f)=O[\varphi(\delta)].$$

Ово заједно са исказом (3.12) за $r=0$, даје став еквиваленције.

С. М. Лозинский [23] је дао *потребне* и *довољне* услове за функцију $\varphi(\delta)$ да би важио став еквиваленције:

Нека је Φ класа функција φ, таквих да је: 1) $\varphi(\delta)$ непрекидна за $0 \leqq \delta < \infty$; 2) $0<\varphi(\delta') \leqq \varphi(\delta'')$ за $0<\delta' \leqq \delta''$; 3) $\varphi(0)=0$.

1° Нека је k цео позитиван број, $\varphi \varepsilon \Phi$ и нека постоји број $K>1$ такав да је

$$\limsup_{\delta\to+0} \frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)} < K^k. \tag{3.13}$$

Тада је за сваку непрекидну функцију f

$$\omega_k(\delta;f)=O[\varphi(\delta)] \Longleftrightarrow E_n(f)=O[\varphi(n^{-1})]. \tag{3.14}$$

Ако (3.13) није испуњено, тада постоји непрекидна функција f таква да важи исказ на десној страни у (3.14), али не важи онај на левој.

2° Нека је k цео позитиван број, $\varphi \varepsilon \Phi$, и нека постоји број $K>1$ такав да је

$$1<\liminf_{\delta\to+0} \frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)} \leqq \limsup_{\delta\to+0} \frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)} < K^k. \tag{3.15}$$

Тада је за сваку непрекидну функцију f

$$f^{(r)} \varepsilon C \text{ и } \omega_k(\delta;f^{(r)})=O[\varphi(\delta)] \Longleftrightarrow E_n(f)=n^{-r}O[\varphi(n^{-1})]. \tag{3.16}$$

Ако услов (3.15) није испуњен, постоји непрекидна функција f таква да важи исказ на десној страни у (3.16), али не важи онај на левој.

(vi) С. Б. Стечкин [33*a*], А. Ф. Тиман [36*a*], као и А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [38] заједно, формулисали су инверзне ставове аналогно ономе како је то учинио de la Vallée Poussin (види (iii)), употребљујући при томе суме уместо интеграла. Прецизније:

1° Ако $f \varepsilon L^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, тада је

$$\omega_k^p(n^{-1};f) \leqq K_{p,k}\, n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu-1}(f)_{L^p} \quad (k=1,2,\ldots).$$

2° Ако $f \varepsilon L^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, и за неко фиксирано r $(=1,2,\ldots)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(f)_{L^p} < \infty$$

тада f има r-ти извод $f^{(r)} \varepsilon L^p$ и

$$\omega_k^p(n^{-1};f^{(r)}) \leqq K_{p,k,r}\left\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f)_{L^p} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_{\nu-1}(f)_{L^p} \right\} (k=1,2,\ldots)$$

Стеклов-љев резултат се односи само на случај $p=\infty$, тј. када је реч о простору M. Искази 1° и 2° садрже Бернштейн-ов, Zygmund-ов, de la Vallée Poussin-ов и Quade-ов резултат из (iii) и (iv).

Процене у последња два изказа су за $p=1$ и $p=\infty$ најбоље могуће; за $1<p<\infty$ то, међутим, више није случај (види и А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [38] и A. Zygmund [44*e*]). М. Ф. Тиман [37] побољшао је ове исказе за $1<p<\infty$:

1° Ако $f\varepsilon L^p$, $1<p<\infty$,

$$\omega_k^p(n^{-1};f)\leqq\begin{cases}K_{p,k}\,n^{-k}\left\{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{kp-1}E_{\nu-1}^p(f)_{L^p}\right\}^{1/p}, & 1<p\leqq 2;\\ K_{p,k}\,n^{-k}\left\{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{2k-1}E_{\nu-1}^2(f)_{L^p}\right\}^{1/2}, & 2\leqq p<\infty.\end{cases}$$

2° Ако $f\varepsilon L^p$, $1<p<\infty$, и за неко фиксирано r $(=1,2,\ldots)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_{L^p}<\infty,$$

тада f има r-ти извод $f^{(r)}\varepsilon L^p$ и важи

$$\omega_k^p(n^{-1},f^{(r)})\leqq$$

$$\leqq\begin{cases}K_{p,k,r}\left\{n^{-k}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{p(k+r)-1}E_{\nu-1}^p(f)_{L^p}\right)^{1/p}+\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_{L^p}\right\}, & 1<p\leqq 2;\\ K_{p,k,r}\left\{n^{-k}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{2(k+r)-1}E_{\nu-1}^2(f)_{L^p}\right)^{1/p}+\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_{\nu-1}(f)_{L^p}\right\}, & 2\leqq p<\infty.\end{cases}$$

(vii) J. Favard [13*a*, *b*] први је поставио питање најбоље могуће константе у директним ставовима за $E_n(f)$ и успео да одреди ову за класу функција $W^{(r)}$. Наиме, он је показао да је[12]

$$\mathrm{E}_C[1\,W^{(r)};E_n(f)]=\sup_{f\varepsilon 1W^{(r)}}\|f-T_n^*\|_C=\mathbf{K}_r\,n^{-r}\begin{pmatrix}r=1,2,\ldots\\ n=1,2,\ldots\end{pmatrix},$$

где је

$$\mathbf{K}_r=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Слично важи за класу $\overline{W^{(r)}}$ (Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2])

$$\mathrm{E}_C[\overline{1\,W^{(r)}};E_n(f)]=\tilde{\mathbf{K}}_r\,n^{-r}\begin{pmatrix}r=1,2,\ldots\\ n=1,2,\ldots\end{pmatrix},$$

[12] Види и § 9 (ii).

где је

$$\tilde{\mathbf{K}}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Аналогни резултати постоје (Н. И. Ахиезер [1], стр. 210) и за апроксимацију у средњем ($p \geqq 1$):

$$\mathrm{E}_{L^p}[1\, W^{(r)}; E_n(f)] = \mathbf{K}_r n^{-r} \text{ и } \mathrm{E}_{L^p}[\overline{1\, W^{(r)}}; E_n(f)] = \tilde{\mathbf{K}} n^{-r}, \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

са истим константама $\mathbf{K}_r$ и $\tilde{\mathbf{K}}_r$.

Favard-ова испитивања продужили су Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2], B. Sz. Nagy [25*a*] и други (види Н. И. Ахиезер [1], стр. 191 и даље).

Аналоган проблем за класе $W^{(r)}$ и $W_L^{(r)}$, $0 < r < 1$, решио је В. К. Дзядык [11*b*]. Он је показао да је

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}; E_n(f)] = \mathrm{E}_C[1\, W_L^{(r)}; E_n(f)] = \frac{4}{\pi} \mathbf{C}_r \sin\frac{r\pi}{2} n^{-r} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где је

$$\mathbf{C}_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

С. Б. Стечкин [33*e*] одредио је најбољу апроксимацију класе $W^{(r)}(\beta)$; $0 < r < 1$, $r < \beta \leqq 2-r$:

$$\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)}(\beta); E_n(f)] = \mathrm{E}_L[1\, W_L^{(r)}(\beta); E_n(f)] = \frac{4}{\pi} \mathbf{C}_r \sin\frac{\beta\pi}{2} n^{-r},$$

где је $\mathbf{C}_r$ иста константа као у претходном Дзядык-овом резултату.

В. К. Дзядык [11*a*] посматрао је класу функција које имају апсолутно непрекидан $(r-1)$-и извод $f^{(r-1)}$ који је са своје стране интеграл функције $\varphi = f^{(r)}$ ограничене варијације. Нека је $\varphi = g + h$, где је g функција скока и h апсолутно непрекидна. Тада је

$$E_n(f)_L = \frac{4}{\pi^2} \mathbf{K}_{r+1} n^{-r-1} \sum_{\nu} |\delta_\nu| \qquad \left(\sum_{\nu} |\delta_\nu| > 0\right)$$

где су δ_ν скокови функције g у $[-\pi, \pi)$ а $\mathbf{K}_r$ Favard-ова константа.

(viii) Све процене, како у директним тако и у инверзним ставовима, које смо до сада навели биле су са горње стране.

Прву процену с доње стране дао је још С. Н. Бернштейн [7*b*]. Он је показао да ако су a_ν и b_ν Fourier-ови коефицијенти од f да је тада

$$E_n(f) \geqq \left(\frac{1}{2} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)\right)^{1/2}.$$

С. Б. Стечкин дао је процене с доње стране сасвим другог карактера. У два своја рада [33*a*, *b*] он је показао да када је реч о *реду величине* модула непрекидности односно најбоље апроксимације важе следећи ставови[13]:

1° Ако је k цео позитиван број и $0<\alpha<k$, тада је

$$E_n(f)\sim n^{-\alpha} \Longleftrightarrow \omega_k(\delta; f)\sim \delta^{\alpha}.$$

2° Ако је $\alpha>0$, k и r цели позитивни бројеви такви да је $0\leqq r<\alpha$ и $k+r>\alpha$, тада је

$$E_n(f)\sim n^{-\alpha} \Longleftrightarrow \omega_k(\delta; f^{(r)})\sim \delta^{\alpha-r}.$$

С. М. Лозинский [23] уопштио је ове Стечкин-ове резултате, узимајући уместо степена општије поредбене функције. Он је показао да његови резултати које смо навели у (v) под 1° и 2° важе непромењено и за обострану процену; треба једино знак O свуда заменити са $\sim$.

(ix) Ако је f непрекидна функција, таква не мора да буде њој коњугована функција $\tilde{f}$. Другим речима, из $E_n(f)\to 0$ уопште не следи $E_n(\tilde{f})\to 0$ када $n\to\infty$. Али, ако и претпоставимо да је $\tilde{f}$ непрекидна, остаје отворено питање шта се може рећи о брзини којом $E_n(\tilde{f})\to 0$ кад се зна брзина којом $E_n(f)\to 0$. Овим проблемом бавила се Н. К. Бари [5] и дала следећи одговор:

Нека је Φ класа функција φ таквих да $\varphi(\delta)$ не опада, $\varphi(0)=0$ и $\varphi(\delta)>0$ за $0<\delta<2\pi$. Ако $\varphi\varepsilon\Phi$, из $E_n(f)=O[\varphi(n^{-1})]$ следи непрекидност коњуговане функције $\tilde{f}$ тада и само тада ако је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)<\infty. \tag{3.17}$$

Услов[14]

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)=O\left[\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]. \tag{3.18}$$

је потребан и довољан да би

$$E_n(f)=O[\varphi(n^{-1})] \Longleftrightarrow E_n(\tilde{f})=O[\varphi(n^{-1})]. \tag{3.19}$$

[13] Било да су у питању функције или низови, $\varphi\sim\psi$ значи да постоје две позитивне константе K_1 и K_2 такве да је $0<K_1\leqq\varphi/\psi\leqq K_2$.

[14] Услов (3.18) еквивалентан је Лозинский-евом услову: постоји константа $K>1$ таква да је

$$\liminf_{\delta\to+0}\frac{\varphi(K\delta)}{\varphi(\delta)}>1.$$

Функција $\varphi(\delta)=\delta^{\alpha}$, $0<\alpha\leqq 1$, очигледно задовољава услове (3.17) и (3.18). Исказ (3.19) може се, у овом специјалном случају, добити и примењујући редом инверзни део исказа (3.10), затим исказ (2.5) и најзад директни део исказа (3.10) по схеми:

$$E_n(f)=O(n^{-\alpha}) \Longrightarrow f\varepsilon^2\Lambda_\alpha \Longrightarrow \tilde{f}\varepsilon^2\Lambda_\alpha \Longrightarrow E_n(\tilde{f})=O(n^{-\alpha}).$$

Примећујемо да под истим условима исказ (3.19) важи у простору, L^p, $p\geqq 1$, тј.

$$E_n(f)_{L^p}=O[\varphi(n^{-1})] \Longleftrightarrow E_n(\tilde{f})_{L^p}=O[\varphi(n^{-1})].$$

Овај резултат није интересантанза $p>1$, јер из познатог M. Riesz-овог става, $\|\tilde{f}\|_{L^p}\leqq K_p\|f\|_{L^p}$ $(p>1)$, следи

$$E_n(\tilde{f})_{L^p}\leqq K_p E_n(f)_{L^p},$$

па су за $p>1$ величине $E_n(f)_{L^p}$ и $E_n(\tilde{f})_{L^p}$ увек истог реда.

Наведене резултате уопштили су у једном заједничком раду Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [6]. Они су показали: Ако $\varphi\varepsilon\Phi$ и задовољен је услов (3.18), тада су $2r+2$ исказа (за фиксирано $r=0,1,\ldots$)

$$E_n(f^{(p)})=n^{p-r}O[\varphi(n^{-1})],\quad p=0,1,\ldots,r;$$

$$E_n(\tilde{f}^{(q)})=n^{q-r}O[\varphi(n^{-1})],\quad q=0,1,\ldots,r;$$

међу собом еквивалентни.

Услов (3.18) је овде неопходан. Наиме, ако он за неко $\varphi\varepsilon\Phi$ није испуњен, тада за свако r постоји функција f таква да r-ти исказ из прве групе важи а да r-ти исказ из друге групе не важи.

Примећујемо да овај Бари-Стечкин-ов резултат важи и ако свуда знак O заменимо са $\sim$.

На други начин поредио је С. Б. Стечкин [33*d*] величине $E_n(f)$ и $E_n(\tilde{f})$. Он је показао:

Ако $f\varepsilon C$ и ако је за неко фиксирано $r=0,1,\ldots$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu(f)<\infty,$$

тада $\tilde{f}$ има непрекидан r-ти извод $\tilde{f}^{(r)}$ и

$$E_n(\tilde{f}^{(r)})\leqq K_r\left\{(n+1)^r E_n(f)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu(f)\right\}.$$

Сличан исказ важи и у простору L^p, $p\geqq 1$. За $p>1$ такав исказ није интересантан.

(x) У дефиницији најбоље апроксимације функције f

$$E_n(f) = \inf_{T \varepsilon H_n} \|f - T\| \tag{3.20}$$

H_n је класа тригонометриских полинома реда $\leqq n$, који иначе не подлежу никаквом ограничењу. Говоримо од *једностраној* најбољој апроксимацији $E_n^+(f)$ функције f ако inf узимамо преко класе H_n^+ тригонометриских полионома T реда $\leqq n$ за које важи $T \geqq f$ (или $T \leqq f$). Појам једностране најбоље апрексимације у простору C није интересантан, јер је ту

$$E_n^+(f) \leqq 2 E_n(f);$$

међутим, он се показао веома корисним у простору L^p, а специјално у простору L.[15]

T. Ganelius [16] је испитивао једностраву најбољу апроксимацију тригонометриским полиномима у простору L и показао:

Нека је H_r, $r = 1, 2, \ldots$, класа функција које имају непрекидан $(r-1)$-и извод $f^{(r-1)}$ и овај је интеграл неке функције f_r ограничене варијације. Тада за $f \varepsilon H_r$ и свако n постоји полином T_n реда $(n-1)$ тако да је

$$T_n \geqq f$$

и

$$\|f - T_n\|_L \leqq \mathbf{C}_r V(f_r) n^{-r-1}. \tag{3.21}$$

$V(f)$ је тотална варијација функције f, а

$$\mathbf{C}_r = \frac{1}{4\pi (r+1)!} \left\{ \sup b_{r+1} - \inf b_{r+1} \right\}$$

где је

$$b_m(x) = -2m! \sum_{k=1}^{\infty} k^{-m} \cos(kx - m\pi/2), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Константа $\mathbf{C}_r$ у (3.21) је најбоља могућа. Примећујемо да тада важи и $V(T_n - f) \leqq K_r V(f_r) n^{-r}$.

4. АПРОКСИМАЦИЈА FOURIER-ОВИМ СУМАМА. (i) Нека је

$$s_n(f) = s_n(f; x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x \tag{4.1}$$

низ делимичних сума Fourier-овог реда функције f.

H. Lebesgue-ов [22 *b*, *c*] резултат

$$|f(x) - s_n(f; x)| \leqq (3 + \log n) E_n(f) \qquad (n \geqq 2). \tag{4.2}$$

[15] H. Weyl [41], L. Fejér [14], J. Karamata [20] и G. Freud [15] користили су једностраву апроксимацију *алгебарским* полиномима у разним гранама Анализе.

показује да је апроксимација поступком $s_n(f)$ незнатно слабија од најбоље могуће апроксимације $E_n(f)$.

Користећи процене за $E_n(f)$ за разне класе функција (§ 3), добијамо из (4.2) одговарајуће процене за поступак $s_n(f)$. Например, користећи директни део исказа (3.10) односно (3.11), добијамо

$$f \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha, \quad 0 < \alpha \leqq 1 \implies f - s_n(f) = O(n^{-1} \log n),$$

односно

$$f^{(r)} \varepsilon {}^2\Lambda_\alpha, \quad r = 1, 2, \ldots; \; 0 < \alpha \leqq 1 \implies f - s_n(f) = O(n^{-r-\alpha} \log n).$$

Нигде се овде симбол O не може заменити симболом o. Примећујемо да се за $\alpha = 1$, заменом класе ${}^2\Lambda_1$ класом ${}^1\Lambda_1$ не може добити ништа бољи резултат.

У простору L^p, $p \geqq 1$, аналогон исказа (4.2) се битно разликује према томе да ли је $p > 1$ или је $p = 1$. E. S. Quade [30] је показао да је

$$\|f - s_n(f)\|_{L^p} \leqq \begin{cases} K_p E_n(f)_{L^p} & \text{за } p > 1; \\ K(1 + \log n) E_n(f)_L & \text{за } p = 1; \end{cases}$$

одакле специјално следи

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha^p, \quad p \geqq 1, \quad 0 < \alpha \leqq 1 \implies \|f - s_n(f)\|_{L^p} = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & p > 1; \\ O(n^{-\alpha} \log n), & p = 1. \end{cases}$$

(ii) Најбоља могућа константа у директним исказима за поступак $s_n(f)$ није до данас одређена ни за једну специјалну класу функција Међутим, А. Н. Колмогоров-у [21] успело је да нађе асимптотско понашање најбоље могуће апроксимације за класу $W^{(r)}$, $r = 1, 2, \ldots$; наиме,

$$E_C[1\, W^{(r)}; s_n(f)] = \sup_{f \varepsilon 1 W^{(r)}} \| f - s_n(f) \|_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} + O(n^{-r}).$$

Аналоган резултат важи и у простору L; у горњем исказу треба само C формално заменити са L (С. М. Никольский [27*e*].

С. М. Никольский [27*b*, *c*] и В. Т. Пинкевич [28] уопштили су Колмогоров-љев резултат у два корака: први га је пренео на класу $W^{(r)}$, $r > 0$, а други на још општију класу $W^{(r)1}\Lambda_\alpha$, $r \geqq 0$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Њихов резултат гласи:

$$E_C[1\, W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha; s_n(f)] = E_C[\overline{1\, W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha}; s_n(f)] =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2} \frac{\log n}{n^{r+\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt + O(n^{-r-\alpha}). \tag{4.3}$$

И. Г. Соколов [32] и С. Г. Селиванова [31] дали су прецизнију границу за константу која зависи од r и α у другом члану асимптотског обрасца (4.3).

Даље уопштење постигао је С. М. Никольский [27 *c*] уводећи, уместо Lipschitz-ове, класу Λ_φ функција чији је модул непрекидности $\omega(\delta;f)\leqq\varphi(\delta)$, где је $\varphi(\delta)$ непрекидна, неопадајућа и конвексна функција за коју је $\varphi(0)=0$. Он је показао да је

$$\mathrm{E}_C[\Lambda_\varphi; s_n(f)]=\frac{2}{\pi^2}\log n\int_0^{\pi/2}\varphi\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt+O\left[\varphi\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Аналогон исказа (4.3) за класу $W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha$ потиче од А. В. Ефимов-а [11*a*]. Како класе ${}^1\Lambda_\alpha$ и ${}^2\Lambda_\alpha$ дају најбољу апроксимацију $E_n(f)$ истог реда величине (види (3.3) и (3.11)), то ће на основу (4.2), то бити случај и код апроксимације поступком $s_n(f)$; једина разлика је у константи првог члана и у процени другог:

$$\mathrm{E}_C[1\,W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha; s_n(f)]=\mathrm{E}_C[\overline{1\,W^{(r)}\,{}^2\Lambda_\alpha}; s_n(f)]=$$

$$=\frac{\mathbf{K}_2(\alpha)}{\pi^2}\,\frac{\log n}{n^{r+\alpha}}+O\left(\frac{\log\log n}{n^{r+\alpha}}\right)$$

$$(r\geqq 0,\ \ 0<\alpha\leqq 1)$$

где је

$$\mathbf{K}_2(\alpha)=\sup_{f\varepsilon 1\,{}^2\Lambda_\alpha}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx\right|.$$

Што се тиче константе $\mathbf{K}_2(\alpha)$ примећујемо, да у исказу (4.3) фигурише константа

$$\mathbf{K}_1(\alpha)=2^{1+\alpha}\int_0^{\pi/2}t^\alpha\sin t\,dt=\sup_{f\varepsilon 1\,{}^1\Lambda_\alpha}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,dx\right|.$$

А. В. Ефимов [12 *a*] је дао аналогне резултате и за класу $W^{(r)}(\beta)\,{}^2\Lambda_\alpha$.[16]

(iii) С. М. Никольский [27 *f*] добио је интересантне резултате за функције које имају r-ти извод $f^{(r)}$, $r\geqq 0$, ограничене варијације. Навешћемо неке од њих:

1° Нека су x_ν, $\nu=1,2,\ldots$, тачке прекида од $f^{(r)}$ у $[0,2\pi]$ и нека су δ_ν скокови у тим тачкама. Тада је

$$\|f-s_n(f)\|_{L^p}=\mathbf{C}_{r,p}\,(\sum_\nu|\delta_\nu|^p)^{1/p}\,n^{-r-1/p}+o(n^{-r-1/p}),\ \ 1<p\leqq\infty,$$

где је константа $\mathbf{C}_{r,p}$ дата одређеним интегралом; нарочито једноставна је $\mathbf{C}_{0,\infty}={}^1/_2$.

2° Ако са $V(f)$ означимо тоталну варијацију од f у $[0,2\pi]$, тада у простору L важи

$$\|f-s_n(f)\|_L\leqq K\,V(f^{(r)})\,n^{-r-1}\log n.$$

[16] Види и најновији рад А. В. ЕФИМОВ-а [12 *c*] где се третирају аналогна питања за класу функција чији Weyl-ов извод $f^{(r)}$ има модул непрекидности $\omega_1(\delta)$ односно $\omega_2(\delta)$.

5. АПРОКСИМАЦИЈА FEJÉR-ОВИМ СУМАМА. (i) Fejér-ови полиноми $\sigma_n(f)$ функције f дефинисани су са

$$\sigma_n(f)=\sigma_n(f;x)=\frac{s_0(f)+s_1(f)+\ldots+s_n(f)}{n+1}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

тј. добијају се применом Cesàro-вог (C, 1) поступка збирљивости на на Fourier-ов ред функције f. Како је код овог поступка збирљивост, матрица поступка дата са $\gamma_\nu^n=1-\frac{\nu}{n+1}$, то се, на основу (1.2), поступак $\sigma_n(f)$ засићује и његова најбоља апроксимација је реда $1/n$.

(ii) Први директан став за поступак $\sigma_n(f)$ потиче од С. Н. Бернштейн-а [7a]:

$$(5.1)\qquad f\varepsilon\,{}^1\Lambda_\alpha,\ 0<\alpha\leqq 1\Longrightarrow f-\sigma_n(f)=\begin{cases}O(n^{-\alpha}),\ 0<\alpha<1;\\ O(n^{-1}\log n),\ \alpha=1.\end{cases}$$

Овде се O не може заменити са o.

Аналогон овог Бернштейн-овог става у простору L^p, $p\geqq 1$, дао је E. S. Quade [30]:

$$f\varepsilon\,{}^1\Lambda_\alpha^p,\ p\geqq 1,\ 0<\alpha\leqq 1\Longrightarrow \|f-\sigma_n(f)\|_{L^p}=\begin{cases}O(n^{-\alpha}) & \text{за } \alpha<1 \text{ и } p\geqq 1,\\ & \alpha=1 \text{ и } p>1,\\ O(n^{-1}\log n) & \text{за } \alpha=p=1.\end{cases}$$

С. М. Никольский је посветио неколико својих радова директним ставовима за поступак $\sigma_n(f)$. Тако је показао

1° у раду [27a]:

$$(5.2)\qquad E_C[1\,{}^1\Lambda_\alpha;\ \sigma_n(f)]=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot n^{-\alpha}+o(n^{-\alpha}),\ 0<\alpha<1;\\ \frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n}+o\left(\frac{\log n}{n}\right),\ \alpha=1;\end{cases}$$

2° у раду [27c]:

$$f\varepsilon\,W^{(r)},\ r\geqq 0\Longrightarrow f-\sigma_n(f)=\begin{cases}O(n^{-r}),\ 0\leqq r<1;\\ O(n^{-1}\log n),\ r=1;\\ O(n^{-1}),\ r>1;\end{cases}$$

и

$$f\varepsilon\,W^{(r)}\,{}^1\Lambda_\alpha,\ r\geqq 0,\ 0\leqq\alpha\leqq 1\Longrightarrow f-\sigma_n(f)=\begin{cases}O(n^{-r-\alpha}),\ 0\leqq r+\alpha<1;\\ O(n^{-1}\log n),\ r+\alpha=1;\\ O(n^{-1}),\ r+\alpha>1;\end{cases}$$

3° у радовима [27*c*, *e*]:

(5.3) $\mathrm{E}_C[1\, W^{(r)};\, \sigma_n(f)] = \mathrm{E}_L[1\, W^{(r)};\, \sigma_n(f)] = \mathbf{K}_r\, n^{-1} + O(n^{-r}),\ r > 1,$

где, када је r цео број $=2, 3, \ldots$, константа $\mathbf{K}_r$ има једноставан облик

$$\mathbf{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^r}.$$

Примећујемо да се ни у једном од исказа у 1° и 2° симбол O не не може заменити симболом o.

Прегледа ради, наводимо овде и неке резултате А. В. Ефимов-а [12*a*], који падају у најновије време:

$$1^\circ\ f(x) - \sigma_{n-1}(f; x) = -\frac{1}{2\pi} \int_a^{\infty} \left[f\left(x + \frac{2t}{n}\right) + f\left(x - \frac{2t}{n}\right) - 2f(x) \right] \frac{dt}{t^2} +$$
$$+ O[\omega_2(n^{-1}; f)],$$

где је a произвољна константа. Овај резултат за $\omega_2(\delta; f) = \delta$ дао је M. Zamansky [42*a*].

$$2^\circ \qquad \tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_{n-1}(f; x) =$$
$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{a_1} \left[f\left(x + \frac{t}{n}\right) - f\left(x - \frac{t}{n}\right) \right] \frac{\sin t}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где је a_1 најмањи корен једначине $\int_0^u t^{-1} \sin t\, dt = \pi/2$.

$$3^\circ \qquad \mathrm{E}_C[\overline{1\,{}^2\Lambda_1};\, \sigma_n(f)] = \frac{1}{2\log(\sqrt{2}+1)} \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Са гледишта најбоље апроксимације поступком $\sigma_n(f)$, нарочито је интересантан исказ (5.3); он показује да за $r > 1$ сужавање класе више не утиче на апроксимацију већ само на процену другог члана. Међутим, питање нетривијалне класе функција која постиже најбољу апроксимацију поступка $\sigma_n(f)$, овим резултатом није решено. То је постигао G. Alexits [3*a*], показавши да

(5.4) $$f \varepsilon \overline{{}^1\Lambda_1} \Longrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}).$$

Због ратних прилика, овај резултат који је претходио Никольский-евим наведеним под 2° и 3°, остао је дуго незапажен, тако да су у истом правцу чињени и други покушаји.

Тако је A. Zygmund [44c] показао да за функције типа потенцијалног реда, тј. оне чији је Fourier-ов ред облика

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}, \tag{5.5}$$

важи

$$|f(x) - \sigma_n(f)| \leqq K\omega\left(\frac{2\pi}{n}\right) \tag{5.6}$$

где је $\omega(\delta)$ модул непрекидности од f. Одавде специјално следи

$$f \varepsilon\, {}^1\Lambda_1 \Longrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}).$$

Аналогон ставу (5.6) важи и у простору $L^p, p \geqq 1$.

(iii) Један неинтересантан став еквиваленције за поступак $\sigma_n(f)$ следи непосредно из Бернштейн-овог инверзног става (3.4) за најбољу апроксимацију $E_n(f)$. Наиме, ако је $f - \sigma_n(f) = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, тим пре је $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$, па на основу поменутог Бернштейн-овог става следи $f \varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha$. Заједно са првим исказом у (5.1) ово даје став еквиваленције

$$f \varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha < 1. \tag{5.7}$$

Овакав начин закључивања ефикасан је увек када одређени поступак $T_n(f)$ даје за неку класу функција M апроксимацију реда $\varphi(n)$, а за поступак најбоље апроксимације $E_n(f)$ и пар (M, φ) важи став еквиваленције. Ниједан од исказа 2° у (ii), а специјално исказ (5.4), не може се на овај начин обрнути. Међутим, M. Zamansky [42a] је показао да

$$f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}) \Longrightarrow f \varepsilon\, \overline{{}^1\Lambda_1},$$

што заједно са (5.4) даје став сатурације за поступак $\sigma_n(f)$:

$$f \varepsilon\, \overline{{}^1\Lambda_1} \Longleftrightarrow f - \sigma_n(f) = O(n^{-1}). \tag{5.8}$$

Оба исказа, (5.7) и (5.8), су ставови еквиваленције за поступак $\sigma_n(f)$, али, по класи функција која у њима фигурише, став сатурације (5.8) отступа од ставова еквиваленције (5.7), што оправдава увођење специјалног назива за исказ (5.8).

(iv) G. Alexits [3b] пренео је став сатурације за поступак $\sigma_n(f)$ у простор L^p, $p \geqq 1$, а J. Favard [13d] га је уопштио на апроксимацију Gesàro-вим сумама k-тог реда $\sigma_n^k(f)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ове су дефинисане са

$$\sigma_n^k(f) = \sigma_n^k(f; x) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\nu}{n+2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\nu}{n+k}\right)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Из (1.2) следи да се поступак $\sigma_n^k(f)$ засићује и да је његова најбоља апроксимација реда $1/n$. Класа сатурације за поступак $\sigma_n^k(f)$

1) у простору C је класа оних функција f чија коњугована функција $\tilde{f} \varepsilon\, {}^1\Lambda_1$;

2) у простору L је класа оних функција f чија коњугована функција $\tilde{f}$ је ограничене варијације;

3) у простору L^p, $p > 1$, је класа оних функција f чија је коњугована функција $\tilde{f}$ еквивалентна апсолутно непрекидној функцији g која има извод $g' \varepsilon\, L^p$.

Другим речима, став сатурације за поступак $\sigma_n^k(f)$ гласи:

$$\|f-\sigma_n^k(f)\|_{C,L^p}=O(n^{-1}) \Longleftrightarrow \begin{cases} f \varepsilon\, \overline{{}^1\Lambda_1} \text{ (у простору } C); \\ \tilde{f} \text{ ограничене варијације (у простору } L); \\ \tilde{f} \text{ еквивалентна апсолутно непрекидној} \\ \text{функцији } g \text{ чији извод } g' \varepsilon\, L^p \text{ (у простору } L^p, p>1). \end{cases}$$

Познато је да је поступак $\sigma_n^k(f)$ као поступак *збирљивости* утолико ефикаснији уколико је k веће. Наведени резултат показује да је он као поступак *апроксимације*, бар у погледу реда величине апроксимације, еквивалентан за свако k. Разлика постоји само у најбољој могућој константи која до данас није одређена.

(v) С обзиром на последњу примедбу, од интереса је упоредити у погледу апроксимације поступак $\sigma_n^k(f)$ са Hölder-овим поступком $H_n^k(f)$, јер су ова два поступка, с гледишта збирљивости, еквивалентни.

Hölder-ов поступак $H_n^k(f)$, примењен на Fourier-ов ред функције f, дефинисан је k-троструком интерацијом поступка $\sigma_n(f)$. Експлицитно он је дат са

$$H_n^k(f)=H_n^k(f;x)=\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^n(k)\,(a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x) \quad (k=1, 2, \ldots)$$

где је

$$h_\nu^n(k)=1-\frac{\nu}{n+1}-\frac{\nu}{n+1}\left\{\pi_{\nu,n}^{(1)}+\ldots+\pi_{\nu,n}^{(k-1)}\right\}$$

и

$$\pi_{\nu,n}^{(m)}=\sum_{i_m=\nu}^{n}\frac{1}{i_m+1}\sum_{i_{m-1}=\nu}^{i_m}\frac{1}{i_{m-1}+1}\cdots\sum_{i_2=\nu}^{i_3}\frac{1}{i_2+1}\sum_{i_1=\nu}^{i_2}\frac{1}{i_1+1}.$$

Како је

$$|1-h_\nu^n(k)| \sim A_\nu \frac{\log^{k-1} n}{n}, \quad n \to \infty \ (A_\nu > 0)$$

то се поступак $H_n^k(f)$ засићује и његова најбоља апроксимација је реда $n^{-1}\log^{k-1} n$. С. Аљанчић [4a, b] је дао став сатурације за поступак $H_n^k(f)$:

$$\|f-H_n^k(f)\|_{C,\,L^p}=O\left(\frac{\log^{k-1} n}{n}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} f\,\varepsilon\,\overline{{}^1\Lambda_1}\ (\text{у простору } C); \\ \tilde{f} \text{ ограничене варијације (у простору } L); \\ \tilde{f} \text{ еквивалентна апсолутно непрекидној функцији } g \text{ чији извод } g'\varepsilon L^p \text{ (у простору } L^p, \\ p>1). \end{cases}$$

У сваком од наведених простора, класа сатурације је, дакле, иста као код поступка $\sigma_n^k(f)$, али одговарајућа апроксимација је слабија. Поредећи, за исто k, поступке $\sigma_n^k(f)$ и $H_n^k(f)$, видимо да два поступка еквивалентна у погледу збирљивости то не морају бити и у погледу апроксимације. Слично, поредећи поступке $H_n^k(f)$, за две различите вредности k, видимо да од два поступка један може бити ефикаснији у погледу збирљивости а да је при томе ефективно слабији у погледу апроксимације. Другим речима, ефикасност неког поступка у погледу збирљивости не мора да утиче на ред апроксимације коју он пружа, и обрнуто.

6. АПРОКСИМАЦИЈА RIESZ-ОВИМ ТИПИЧНИМ СРЕДИНАМА. (i) Riesz-ов поступак типичних средина је нарочито погодан да се илуструје место става сатурације у оквиру ставова еквиваленције за поступке који се засићују.

Нека је λ_n низ бројева који монотоно тежи бесконачности и нека је $p>0$. Riesz-ов поступак, примењен на Fourier-ов ред функције f, дефинисан је са

$$R(f;x;\lambda_n;p)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{\lambda_n}\right)^p(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

Овај поступак се засићује и најбоља апроксимација му је реда $1/\lambda_n$. Специјално, $R(f;x;n^\lambda;1)$ где је $\lambda>0$, означаваћемо са $R_n^\lambda(f)$; његова најбоља апроксимација је реда $1/n^\lambda$. Примећујемо да је $R_n^1(f)=\sigma_{n-1}(f)$.

(ii) Поступак $R_n^\lambda(f)$ испитивало је у погледу апроксимације више аутора. A. Zygmund [44d], се ограничио на $\lambda=1,2,\ldots$ и показао:

1° За *парно* λ и цео број $r\leqq\lambda$

$$f\,\varepsilon\,W^{(r)} \Longrightarrow f-R_n^\lambda(f)=O(n^{-r}). \tag{6.1}$$

2° За *непарно* λ и $r\leqq\lambda-1$ опет важи (6.1), али за $r=\lambda$ следи само

$$f\,\varepsilon\,W^{(r)} \Longrightarrow f-R_n^\lambda(f)=O(n^{-r}\log n),$$

и логаритам на десној страни не може се уклонити.

3° Оштије, ако је $r < \lambda$

$$f \varepsilon W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-r-\alpha}).$$

Овај резултат важи и за $\alpha = 1$ уколико λ није непарно и $r = \lambda - 1$.

Аналогни искази важе и за класе $\overline{W^{(r)}}$ односно $\overline{W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha}$; формално треба једино реч „паран" заменити са „непаран" и обрнуто.

Специјално, ако је f типа потенцијалног реда [види (5.5)], када је $\tilde{f} = -if$, (6.1) важи независно да ли је λ парно или непарно.

(iii) B. Sz. Nagy [25*b*] испитивао је апроксимацију поступцима који су дефинисани суматорном функцијом (види § 9). Општи резултати до којих је дошао садрже и исказе о апроксимацији поступком $R_n^\lambda(f), \lambda > 0$ (не обавезно цео број). У том раду B. Sz. Nagy је увео класу функција $W^{(r)}(0)$, $r > 0$ (види § 2.2), као класу оних функција

$$f \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$$

за које је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

Fourier-ов ред неке ограничене функције. Примећујемо да се класа $W^{(r)}(0)$ може и овако дефинисати: $f \varepsilon W^{(r)}(0)$ ако

$$f \cos \frac{r\pi}{2} + \tilde{f} \sin \frac{r\pi}{2} \varepsilon W^{(r)}.$$

Одавде се види да се $W^{(r)}(0)$ за целе парне вредности r своди на $W^{(r)}$ а за целе непарне на $\overline{W^{(r)}}$. Обрнуто је случај код коњуговане класе $\overline{W^{(r)}(0)}$.

Нека су λ и r позитивни бројеви; тада

$$1^\circ\ f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-\alpha}), & \lambda > \alpha; \\ O(n^{-\alpha} \log n), & \lambda = \alpha; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < \alpha; \end{cases}$$

$$2^\circ\ f \varepsilon W^{(r)}(0) \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-r}), & \lambda \geqq r; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < r; \end{cases}$$

$$3^\circ\ f \varepsilon \overline{W^{(r)}(0)} \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-r}), & \lambda > r; \\ O(n^{-r} \log n), & \lambda = r; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < r; \end{cases}$$

$$4^\circ\ f \varepsilon W^{(r)}(0)\,{}^1\Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow f - R_n^\lambda(f) = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha}), & \lambda > r + \alpha; \\ O(n^{-r-\alpha} \log n), & \lambda = r + \alpha; \\ O(n^{-\lambda}), & \lambda < r + \alpha. \end{cases}$$

Нигде се у исказима 1—4° симбол O не може заменити симболом o.

Неке од ових резултата B. Sz. Nagy дао је и у прецизнијем облику. Нека је

$$\mathbf{K}_{r,\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r-\lambda+1}}.$$

Тада је

$$\mathrm{E}_C\left[\overline{1\,W^{(r)}(0)};\ R_n^\lambda(f)\right] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\log n}{n^r} + O(n^{-r}), & \lambda = r; \\ \mathbf{K}_{r,\lambda}\, n^{-\lambda} + O(n^{-r}), & \lambda < r; \end{cases}$$

$$\mathrm{E}_C\left[\overline{1\,W^{(r)}(0)\,{}^1\Lambda_\alpha};\ R_n^\lambda(f)\right] = \begin{cases} \dfrac{2^\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{t^\alpha}{\sin t}\,dt \cdot n^{-\lambda} + O(n^{-r-\alpha}), & \lambda = r; \\ \mathbf{K}_{r,\lambda}\, n^{-\lambda} + O(n^{-r-\alpha}), & \lambda < r. \end{cases}$$
$$(0 < \alpha < 1)$$

Од наведених директних ставова само се први исказ у 1° може тривијално обрнути (види § 5 (iii)) и тако добити став еквиваленције

$$f \varepsilon\, {}^1\Lambda_\alpha \Longleftrightarrow f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-\alpha}) \text{ за } 0 < \alpha < 1 \text{ и } \lambda > \alpha.$$

M. Zamansky [42*b*] је дао за поступак $R_n^\lambda(f)$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, нетривијални став еквиваленције, и то став сатурације:

$$f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-\lambda}) \Longleftrightarrow \begin{cases} f^{(\lambda-1)} \varepsilon\, {}^1\Lambda_1, & \lambda \text{ парно}, \\ f^{(\lambda-1)} \varepsilon\, \overline{{}^1\Lambda_1}, & \lambda \text{ непарно}. \end{cases}$$

Примећујемо да је директни део овог исказа садржан већ у Zygmund-овим резултатима из (ii).

(iv) У § 3 (iv) видели смо да је код ставова еквиваленције за поступак $E_n(f)$ адекватна класа функција типа ${}^2\Lambda_1$ (види § 2.2 (iii)). С. Аљанчић [4 *d*] је показао да је то случај и код ставова еквиваленције поступка $R_n^\lambda(f)$, с изузетком става сатурације код кога је адекватна класа функција типа ${}^1\Lambda_1$. Другим речима, поступци $E_n(f)$ и $R_n^\lambda(f)$, од којих се само други засићује, показују у погледу ставова еквиваленције подједнако понашање све до тренутка засићења поступка $R_n^\lambda(f)$. Прецизније:

Нека је $\lambda > 0$, $\beta \leqq \lambda$ и ставимо $\beta = r + \alpha$ са $r = 0, 1, \ldots$ и $0 < \alpha \leqq 1$. Тада је

$$f - R_n^\lambda(f) = O(n^{-\beta}) \Longleftrightarrow \begin{cases} f^{(r)} \varepsilon\, {}^2\Lambda_\alpha, & \beta < \lambda; \\ f \varepsilon\, W^{(\beta)}(0), & \beta = \lambda. \end{cases}$$

Специјално, ако је f типа потенцијалног реда (види (5.5)), када је $\tilde{f} = -if$, класа сатурације $W^{(\beta)}(0)$ своди се на $W^{(\beta)}$.

С. Аљанчић [4*a*, *c*] је дао став сатурације и за поступак $R(f; x; \lambda_n; 1)$, а из општих резултата G. Sunouchi-а и C. Watari-а [34] следи, као специјални случај, класа сатурације за поступак $R(f; x; n^\lambda; p)$, $\lambda > 0$. Последња два аутора одредила су класу сатурацоје и у простору L^p, $p \geqq 1$.

(v) Однос става сатурације према другим ставовима еквиваленције који постоји код поступака $R_n^\lambda(f)$, није ограничен само на овај поступак. Слично важи и за поступак $\rho_n(f)$ који је дао Rogosinski; овај је дефиносан са

$$\rho_n(f) = \rho_n(f; x) = {}^1/_2 \{s_n(f; x+\pi/2n) + s_n(f; x-\pi/2n)\}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} \cos\frac{\pi\nu}{2n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Поступак $\rho_n(f)$ се засићује и најбоља апроксимација му је реда n^{-2}.

С. Н. Бернштейн [7*c*] је показао да

$$(6.2) \qquad f \varepsilon^1 \Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha \leqq 1 \implies f - \rho_n(f) = O(n^{-\alpha}),$$

а према једној A. Zygmund-овој [36*d*] примедби

$$(6.3) \qquad f' \varepsilon^1 \Lambda_\alpha,\ 0 < \alpha \leqq 1 \implies f - \rho_n(f) = O(n^{-1-\alpha}).$$

Оба ова исказа се могу тривијално обрнути када је $0 < \alpha < 1$ и тако добити ставови еквиваленције. Но за $\alpha = 1$ ситуација у ова два исказа је битно различита. Наиме, први се може побољшати (С. Аљанчић [4*d*])

$$f \varepsilon^2 \Lambda_1 \implies f - \rho_n(f) = O(n^{-1})$$

и тек као такав тривијално обрнути, док се други исказ може (нетривијално) обрнути (G. Sunouchi и C. Watari [34]), тако да је $W^{(1)1}\Lambda_1 = W^{(2)} = W^{(2)}(0)$ класа сатурације поступка $\rho_n(f)$.

7. АПРОКСИМАЦИЈА DE LA VALLÉE POUSSIN-ОВИМ СУМАМА. (i) De la Vallée Poussin-ове суме $V_n(f)$ (види [40*a*]) дефинисане су са

$$V_n(f) = V_n(f; x) = 2\sigma_{2n-1}(f) - \sigma_{n-1}(f) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n-1} s_\nu(f)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{2n-1} \gamma_\nu^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

где је

$$\gamma_\nu^n = \begin{cases} 1, & 0 \leqq \nu \leqq n; \\ 2 - \nu/n, & n \leqq \nu \leqq 2n. \end{cases}$$

Основни резултат за de la Vallée Poussin-ове суме $V_n(f)$ јесте да оне дају апроксимацију истог реда као полиноми најбоље апроксимације T_n^*, тј.

$$f-V_n(f)=O[E_n(f)]. \tag{7.1}$$

Примећујемо једино да су тригонометриски полиноми $V_n(f)$ реда $2n-1$ за разлику од T_n^* који су реда $\leqq n$.

Исказом (7.1) у принципу је код поступка $V_n(f)$ решено питање директних, инверзних и ставова еквиваленције за поједине класе функција. Наиме, сваком директном ставу за $E_n(f)$ одговара на основу (7.1) и директан став за $V_n(f)$. Исто тако, сваком ставу еквиваленције за $E_n(f)$, на основу (7.1), тривијално одговара став еквиваленције за поступак $V_n(f)$ (види примедбу после (5.7)). Једино питање које остаје отворено то је најбоља могућа константа у директним ставовима.

(ii) Уопштена de la Vallée Poussin-ова сума

$$\tau_{n,p}(f) \quad (p=p(n)=0, 1, \dots, n)$$

дефинисана је са

$$\tau_{n,p}(f)=\tau_{n,p}(f;x)=\frac{(n+1)\sigma_n(f)-(n-p)\sigma_{n-p-1}(f)}{p+1}=\frac{1}{p+1}\sum_{\nu=n-p}^{n} s_\nu(f)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu^n(p)(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

где је

$$\gamma_\nu^n(p)=\begin{cases}1, & 0\leqq\nu\leqq n-p;\\ \dfrac{n-\nu+1}{p+1}, & n-p\leqq\nu\leqq n.\end{cases}$$

Специјално

$$\tau_{2n-1,n-1}(f)=V_n(f),\quad \tau_{n,0}(f)=s_n(f),\quad \tau_{n,n}(f)=\sigma_n(f). \tag{7.2}$$

De la Vallée Poussin [40*c*,*a*] је показао да је

$$|f(x)-\tau_{n,p}(f;x)|\leqq 2\frac{n+1}{p+1}E_{n-p}(f). \tag{7.3}$$

Одавде се види да апроксимација de la Vallée Poussin-овим сумама битно зависи од односа бројева n и $p=0, 1, \dots, n$. Ако $p/n\to\theta$, $n\to\infty$, у принципу треба разликовати случајеве: 1° $\theta=0$; 2° $0<\theta<1$ и 3° $\theta=1$. За $\theta=0$ суме $\tau_{n,p}(f)$ су „блиске" Fourier-овим сумама $s_n(f)$, а за $\theta=1$ оне су „блиске" Fejér-овим сумама $\sigma_n(f)$ (види (7.2)).

Случај $\theta=0$ испитао је А. Ф. Тиман [36 *b*] и показао да је

$$E_C[1\,W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha;\tau_{n,p}(f)]=E_C[1\,\overline{W^{(r)\,1}\Lambda_\alpha};\tau_{n,p}(f)]=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\frac{1}{n^{r+\alpha}}\log\frac{n}{p+1}\int_0^{\pi/2}t^\alpha\sin t\,dt+O(n^{-r-\alpha})$$

$$(r\geqq 0,\ 0<\alpha\leqq 1)$$

Интересантно је упоредити овај резултат са одговарајућом проценом (4.3) за $s_n(f)$.

Случај $0<\theta\leqq 1$ посматрао је С. А. Теляковский [38 *a*, *b*]. За $0<\theta\leqq 1$ већ из (7.3) следи

$$f\,\varepsilon\,W^{(r)}\ \text{или}\ \overline{W^{(r)}}\implies f-\tau_{n,p}(f)=O(n^{-r})\quad(r=1,2,\ldots).$$

Теляковский је прецизирао овај резултат, показавши да је

$$E_C[1\,W^{(r)};\tau_{n,p}(f)]=\mathbf{C}_{r,\theta}\,n^{-r}+o(n^{-r})\quad(r=1,2,\ldots)$$

где је константа $\mathbf{C}_{r,\theta}$ дата вишеструким одређеним интегралом. За $\theta=1$, Теляковский је разликовао два случаја, према томе да ли је $n-p=\text{const}$ или $n-p\to\infty$.

А. В. Ефимов [12 *b*] испитивао је апроксимацију поступком $\tau_{n,p}(f)$ не претпостављајући да постоји гранична вредност количника p/n када $n\to\infty$. Он је показао:

1° Нека је $\varphi(\delta)$ позитивна функција која је модул непрекидности (види § 2.1) и означимо са Λ_φ класу функција чији је модул непрекидности $\omega(\delta)\leqq\varphi(\delta)$. Тада је

$$E_C[{}^1\Lambda_\varphi;\tau_{n,p}(f)]=\begin{cases}\dfrac{C_1^{(n)}(\varphi)}{\pi}\log\dfrac{n}{p+1}+O\left[\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)\right], & 0\leqq p\leqq\dfrac{n}{2};\\[2ex] \dfrac{2}{\pi(p+1)}\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right], & \dfrac{n}{2}\leqq p\leqq n-1;\end{cases}$$

где је

$$C_1^{(n)}(\varphi)=\sup_{f\varepsilon\Lambda_\varphi}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right|.$$

2° За свако $0\leqq p\leqq n-1$ и $0<\alpha\leqq 1$ важи

$$E_C[1\,{}^2\Lambda_\alpha;\tau_{n,p}(f)]=B_{n,p}(\alpha)+O(n^{-\alpha})$$

где је

$$B_{n,p}(\alpha)=\begin{cases} C_2^{(n)}(\alpha)\log\dfrac{n}{p+1}+O\left(\dfrac{\log\log n}{n^{\alpha}}\right), & 0\leqq p\leqq\dfrac{n}{2},\ 0<\alpha\leqq 1;\\ O(n^{-\alpha}), & n/2\leqq p\leqq n-1,\ 0<\alpha<1;\\ \dfrac{1}{\pi(p+1)}\log\dfrac{n+1}{n-p}, & \dfrac{n}{2}\leqq p\leqq n-1,\ \alpha=1;\end{cases}$$

и

$$C_2^{(n)}(\alpha)=\sup_{f\in{}^1\Lambda_\alpha}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right|.$$

Не постављајући никаква ограничења у погледу односа бројева n и p, А. Д. Щербина [45] је показала да

$$|\tilde{f}(x)|\leqq 1 \Longrightarrow |f(x)-\tau_{n,p}(f;x)|\leqq\frac{4}{\pi^2}\log\frac{n}{p+1}+O(1).$$

8. АПРОКСИМАЦИЈА DE LA VALLÉE POUSSIN-ОВИМ ИНТЕГРАЛОМ. De la Vallée Poussin-ов интегралом (види [40 *a*] и [26 *a*], стр. 183)

$$\mathbf{V}_n(f)=\mathbf{V}_n(f;x)=\frac{h_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu^n(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

где је

$$h_n=\frac{2n(2n-2)\ldots 4.2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}$$

и

$$\gamma_\nu^n=\frac{(n!)^2}{(n-\nu)!\,(n+\nu)!}=1-\frac{\nu^2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{8.1}$$

дефинисан је поступак апроксимације тригонометриским полиномима. На основу (8.1) он се засићује и његова најбоља апроксимације је реда $1/n$.

И. П. Натасон [26 *b*] је показао да је за $0<\alpha\leqq 1$

$$\mathrm{E}_C[{}^1\Lambda_\alpha;\mathbf{V}_n(f)]=\frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)n^{-\alpha/2}+o(n^{-\alpha}).$$

Општије директне ставове дао је P. L. Butzer [10 *a*]. Он је показао да је у простору C

$$f-\mathbf{V}_n(f)=O[\omega_2(n^{-1/2};f)]$$

и

$$f-\mathbf{V}_n(f)=n^{-1/2}O[\omega_1(n^{-1/2};f')],$$

а у простору $L^p, p \geqq 1$,

$$\|f - \mathbf{V}_n(f)\|_{L^p} = O[\omega_2^p(n^{-1/2}; f)]$$

и

$$f' \varepsilon^1 \Lambda_\alpha^p, \ 0 < \alpha \leqq 1 \implies \|f - \mathbf{V}_n(f)\|_{L^p} = O(n^{-\frac{1}{2}(1+\alpha)}).$$

P. L. Butzer[17] [10 c] је наслутио, а G. Sunouchi и C. Watari [34] су доказали став сатурације за de la Vallée Poussin-ов интеграл:

$$\|f - \mathbf{V}_n(f)\|_{C, L^p} = O(n^{-1}) \iff \begin{cases} f' \varepsilon^1 \Lambda_1 \text{ (у простору } C), \\ f' \text{ ограничене варијације (у простору } L) \\ f'' \varepsilon L^p \text{ (у простору } L^p, \ p > 1). \end{cases}$$

9. АПРОКСИМАЦИЈА СУМАТОРНОМ ФУНКЦИЈОМ. (i) Нека је функција $g(t)$ дефинисана у размаку $[0,1]$ и нека је $g(0) = 1$ и $g(1) = 0$. Овом „суматорном" функцијом дефинисан је поступак апроксимације

$$G_n(f) = \sum_{\nu=1}^{n-1} g\left(\frac{\nu}{n}\right)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Ако је $g(t)$ непрекидна у тачки $t = 0$ и ограничене варијације у $[0,1]$, поступак G_n, као поступак збирљивости, је регуларан.

Суматорни поступак G_n садржи као специјалне случајеве:

1° Fourier-ове суме када је $g(t) = 1, \ 0 \leqq t < 1$;

2° Fejér-ове суме када је $g(t) = 1 - t$;

3° Rogosinski-еве суме када је $g(t) = \cos(\pi t/2)$;

4° Riesz-ове суме $R_n(f; n^\lambda; p)$ када је $g(t) = (1 - t^\lambda)^p$;

5° De la Vallée Poussin-ове суме спадају исто тако у суматорне поступке, само како су оне тригонометриски полиноми $(2n-1)$-ог реда, то је код одговарајуће суматорне функције g размак $[0,2]$ а не $[0,1]$ основан и

$$V_n(f) = \sum_{\nu=1}^{2n-1} g\left(\frac{\nu}{n}\right)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \tag{7.4}$$

где је

$$g(t) = \begin{cases} 1, \ 0 \leqq t \leqq 1; \\ 2 - t, \ 1 \leqq t \leqq 2. \end{cases}$$

6° Jackson-de la Vallée Poussin-ов интеграл

$$J_n(f) = J_n(f; x) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \frac{\sin^4 t}{t^4} dt,$$

где је

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt,$$

[17] Појам сатурације пренео је P. L. Butzer [10 b, c] и на сингуларне интеграле који нису тригонометриски полиноми.

такође одређује један суматорни поступак, истог типа као што су de la Vallée Poussin-ове суме. Наиме (види Н. И. Ахиезер [1]),

$$J_n(f)=\sum_{\nu=1}^{2n-1} g\left(\frac{\nu}{n}\right)(a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x)$$

где је

$$g(t)=\begin{cases} 1-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{4}t^3, & 0\leqq t\leqq 1; \\ \frac{1}{4}(2-t)^3, & 1\leqq t\leqq 2. \end{cases}$$

(ii) У § 3 (vi) смо навели да је J. Favard одредио најбољу могућу константу за поступмк $E_n(f)$ и класу $W^{(r)}$. Он је то постигао на тај начин што је ефективно конструисао поступак апроксимације $G_n^*(f)$, који се за класу $W^{(r)}$ поклапа са најбољом апроксимације функције не само по реду величине апроксимације већ и по најбољој могућој константи. За поступак $G_n^*(f)$, дакле, важи

$$\sup_{f\varepsilon 1 W^{(r)}} \|f-G_n^*(f)\|_C=\sup_{f\varepsilon 1 W^{(r)}} E_n(f).$$

Favard-ов поступак $G_n^*(f)$ је један суматорни поступак дефинисан функцијом

$$g^*(t)=1-t^r\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\left\{\frac{1}{(2\nu-t)^r}+\frac{1}{(2\nu+t)^r}\right\}$$

када је r парно, и

$$g^*(t)=1-t^r\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2\nu-t)^r}-\frac{1}{(2\nu+t)^r}\right\}$$

када је r непарно.

(iii) B. Sz. Nagy [26 *b*] испитивао је апроксимацију општим суматорним функцијама и дао низ директних ставова за класе ${}^1\Lambda_\alpha$, $W^{(r)}(0)$, $\overline{W^{(r)}(0)}$, $W^{(r)}(0)\,{}^1\Lambda_\alpha\,(r\geqq 0,\ 0<\alpha\leqq 1)$. За те опште ставове упућујемо на оригинални рад, а овде, примера ради, наводимо само један:

Нека је

1) $g(t)$ апсолутно непрекидна у $[0,1]$ и нека је $g'(t)$ ограничене варијације сем у околини коначно много тачака;

2) $|g'(+0)|+\frac{1}{2\pi}\int_{+0}^{1-0}(1-u)\left\{2+\log\frac{1+u}{1-u}\right\}|dg'(t)|<\infty$;

3) $\int|t-a|^{1-\alpha}|dg'(t)|<\infty$ у околини сваке изузетне тачке a из 1).

Тада

$$f \varepsilon {}^1\Lambda_\alpha, \quad 0<\alpha<1 \implies f-G_n(f)=O(n^{-\alpha}).$$

Из Nagy-ових општих ставова добија се за специјалне суматорне поступке $s_n(f), \sigma_n(f), R(f; n^\lambda; p), \rho_n(f)$ читав низ резултата, већ познатих и нових. Оне за поступак $R_n^\lambda(f)$ навели смо § 6.

(iv) Овде ћемо се задржати још на Jackson-de la Vallée Poussin-овом интегралу $J_n(f)$. Овај поступак апроксимације се засићује и његова најбоља апроксимација је реда $1/n^2$. Поменућемо само став сатурације, у коме инверзни део потиче од G. Sunouchi-а и C. Watari-а [34]:

$$\|f-J_n(f)\|_{C,L^p}=O(n^{-2}) \iff \begin{cases} f'(x)\,\varepsilon\,{}^1\Lambda_1 \text{ (у простору } C); \\ f'(x) \text{ огран. варијације (у простору } L); \\ f''(x)\,\varepsilon\,L^p \text{ (у простору } L^p,\ p>1) \end{cases}$$

10. ЛИНЕАРНИ ПОСТУПЦИ АПРОКСИМАЦИЈЕ. (i) Нека је

$$\gamma_\nu^n (\nu=0, 1, \ldots, n+1;\ \gamma_0^n=1;\ \gamma_{n+1}^n=0)$$

произвољна троугаона матрица бројева и нека је

$$\Gamma_n(f)=\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu^n (a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x).$$

линеарни поступак аproксимације примењен на Fourier-ов ред функције f.

А. Ф. Тиман [36 *b*] је испитивао апроксимацију линеарним поступцима. Он је поставио питање које услове треба да задовољава матрица γ_ν^n да би одговарајући линеарни поступак $\Gamma_n(f)$ давао апроксимацију истог реда величине као најбоља апроксимација $E_n(f)$. А. Ф. Тиман је дошао до ових резултата:

1° Да би линеарни поступак $\Gamma_n(f)$ када $n\to\infty$ давао за *све* класе $W^{(r)}{}^1\Lambda_\alpha$ и $\overline{W^{(r)}{}^1\Lambda_\alpha}$ $(0\leqq\alpha<1)$ апроксимацију истог реда величине као $\sup\limits_f E_n(f)$, *потребно* је да је

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-\gamma_\nu^n}{\nu^r(n-\nu+1)}=\frac{\log n}{n^r}+O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{9.1}$$

Услов (9.1) није довољан као што показује линеарни поступак $\overline{\Gamma}_n(f)$ дефинисан матрицом

$$\overline{\gamma}_\nu^n=\begin{cases} 1, & 0\leqq\nu\leqq[n/2]; \\ 0, & [n/2]<\nu\leqq n+1, \end{cases}$$

који задовољава (9.1) а за који је

$$E_C[W^{(r)1}\Lambda_\alpha\,;\overline{\Gamma}_n(f)] \sim \frac{\log n}{n^{r+\alpha}}.$$

2° Нека је матрица γ_ν^n линеарног поступка $\Gamma_n(f)$ таква да бројеви

$$\delta_\nu^n = \frac{1-\gamma_\nu^n}{\nu},\ 0<\nu\leqq n+1;\ \delta_0^n=0,$$

задовољавају

$$\delta_\nu^n \leqq \delta_{\nu+1}^n,\quad \delta_\nu^n - 2\delta_{\nu+1}^n + \delta_{\nu+2}^n \geqq 0. \tag{9.2}$$

Тада је услов (9.1) *потребан* и *довољан* да би поступак $\Gamma_n(f)$ за све класе $W^{(r)1}\Lambda_\alpha$ и $\overline{W^{(r)1}\Lambda_\alpha}$ $(0\leqq\alpha<1)$ давао апроксимацију истог реда величине као $\sup\limits_f E_n(f)$.

А. Ф. Тиман је дао и неколико општих процена за апроксимацију линеарним поступком, и то како с горње тако и с доње стране. Овде ћемо навести само две најједноставније.

1° Ако матрица γ_ν^n поступка $\Gamma_n(f)$ задовољава услове

$$\gamma_\nu^n \geqq \gamma_{\nu+1}^n \quad \text{и} \quad \gamma_\nu^n - 2\gamma_{\nu+1}^n + \gamma_{\nu+2}^n \leqq 0,$$

тада је за $0<\alpha<1$

$$\left.\begin{array}{l} E_C[1^1\Lambda_\alpha;\Gamma_n(f)] \\ E_C[\overline{1^1\Lambda_\alpha};\Gamma_n(f)] \end{array}\right\} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt \cdot \sum_{\nu=1}^n \frac{\gamma_\nu^n}{n-\nu+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

2° Ако матрица γ_ν^n поступка $\Gamma_n(f)$ задовољава услове (9.2), тада је за $0<\alpha<1$

$$E_C[W^{(r)1}\Lambda_\alpha\,;\Gamma_n(f)] =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt \cdot \left|\sum_{\nu=1}^n \frac{1-\gamma_\nu^n}{\nu^r(n-\nu+1)} - \frac{\log n}{n^r}\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Овај резултат важи и за $\alpha=1$ ако десну страну помножимо са 2.

(ii) G. Sunouchi и C. Watari [34] дали су читав низ ставова сатурације за специјалне поступке апроксимације (види §§ 6 (iv), 8, 9 (iv)) користећи један општи инверзан став. Нека је *квадратном* матрицом $\gamma_\nu^n(\nu=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots)$ дефинисан поступак апроксимације

$$\Gamma_n(f) = \Gamma_n(f;x) = \sum_{\nu=1}^\infty \gamma_\nu^n(a_\nu\cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)$$

Ако постоје позитивни бројеви c, r и ρ такви да је

$$\lim_{n\to\infty} n^r [1-\gamma_\nu^n] = c\,\nu^\rho \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

и ако са F означимо тригонометриски ред

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\rho (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x),$$

тада из

$$\| f - \Gamma_n(f) \|_{C, L^p} = O(n^{-r})$$

следи да је

1) F Fourier-ов ред неке скоро свуда ограничене функције (у простору C),

2) F Fourier-Sieltjes-ов ред неке функције ограничене варијације (у простору L),

3) F Fourier-ов ред неке функције из L^p (у простору L^p, $p > 1$).

Још општији став сатурације за квадратне поступке $\Gamma_n(f)$ дао је недавно H. Buchwalter [9 *a*]:

Нека је $\varphi(n)$ позитивна функција која тежи нули када $n \to \infty$ и нека је низ λ_ν такав да је

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1} \to \infty, \quad \lambda_{\nu+1} = O(\lambda_\nu).$$

Претпоставимо још да је

1) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu^n| < \infty$ за свако $n = 0, 1, \ldots;$

2) $1 - \gamma_\nu^n \sim \lambda_\nu \varphi(n)$ за свако $\nu = 0, 1, \ldots$ и $n \to \infty$;

3) γ_ν^n и $\dfrac{\gamma_\nu^n - \gamma_{\nu+1}^n}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu}$ монотоно теже нули када $\nu \to \infty$ за свако довољно велико n;

4) $\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \,|\lambda_{\nu-1} - 2\lambda_\nu + \lambda_{\nu+1}| + n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = O(\lambda_n)$.

Под наведеним условима поступак $\Gamma_n(f)$ се засићује, најбоља апроксимација му је реда $\varphi(n)$, и

$$\| f - \Gamma_n(f) \|_{C, L^p} = O[\varphi(n)]$$

Код G. Sunouchi-а и C. Watari-а параметар n не мора да буде цео позитиван број, те су могући и други гранични прелази а не само $n \to \infty$. Например, за $\gamma_\nu^n = n^\nu$, $0 < n < 1$ и $n \to 1-0$ обухваћен је Abel-ов поступак.

тада и само тада ако је

1) $g=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\,\nu^{-1}(a_\nu\sin\nu x-b_\nu\cos\nu x)\,\varepsilon\,{}^1\Lambda_1$ (у простору C);

2) $g\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\,\nu^{-1}(a_\nu\sin\nu x-b_\nu\cos\nu x)$ ограничене варијације (у простору L);

3) $g\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\,(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\,\varepsilon\,L^p$ (у простору L^p, $p>1$).

(iii) Појам сатурације третирало је у општим просторима више аутора (J. Favard [13 *d*], P. L. Butzer [10 *a, b, c*], K. Zeller [43], H. Buchwalter [9 *b, c*]), но то излази из оквира овог приказа. Овде наводимо само да из општих Buchwalter-ових резултата следи класа сатурације за Hölder-ове (§ 5 (v)) и Riesz-ове (§ 6 (iv)) суме, као и за Nörlund-ове суме у простору L^p, $p>1$.

НАВОДИ[1]

[1] Ахиезер, Н. И. — Лекции по теории апроксимации. Москва-Ленинград, 1947.

[2] Ахиезер, Н. И. и Крейн, М. Г. — О наилучшем приближении тригонометричкими суммами дифференцируемих периодических функций. *Доклады* **15** (1937), 107—112.

[3] Alexits, G. — *a*. Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier. *Matematikai es Fezikai Lapok* **48** (1941), 410—422.

b. Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér. *Acta. math. Hungaricae* **3** (1952), 29—42.

[4] Aljančić, S. — *a*. Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz. *C. R.* **246** (1958), 2567—9.

b. Meilleure approximation et classes de saturation du procédé de Hölder dans les espaces C et L^p. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **12** (1958), 109—124.

c. Classe de saturation du procédé des moyennes typiques de Riesz. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **13** (1959), 113—122.

d. Approximation des fonetions continues par les moyennes typiques de leurs séries de Fourier (још необјављено).

[5] Бари, Н. К. — О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций. *Известия* **19** (1955), 285—302.

[6] Бари, Н. К. и Стечкин, С. Б. — Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Труды Моск. мат. общ.* **5** (1956), 483—522.

[1] Доклады=Доклады Академии Наук СССР.
Известия=Известия Академии Наук СССР — Серия математическая.
C. R.=Comptes rendus Paris

[7] Бернштейн, С. Н. — *a*. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. *Сообщ. Харьк. мат. общ.* (2) **13** (1912), 49—194.

b. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. *Mém. Acad. Roy. Belgique* (2) **4** (1912), 1—104.

c. Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques. *C. R.* **191** (1930). 976—979.

[8] Borel, E. — Leçons sur les fonctions de variables réelles. Paris, 1905.

[9] Buchwalter H. — *a*. Saturation de certains procédés de sommation. *C. R.* **248** (1959), 909—912.

b. Saturation dans un espace normé. *C. R.* **250** (1960), 651—653.

c. Saturation sur un groupe abélien localement compact. *C. R.* **250** (1960), 808—811.

[10] Butzer, P. L. — *a*. On the singular integral of de la Vallée-Poussin. *Arch. Math.* **7** (1956), 295—309.

b. Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. *Math. Ann.* **133** (1957), 410—425.

c. Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren. *Math. Zeitschrift.* **70** (1958), 93—112.

[11] Дзядык, В. К. — *a*. О наилучшем приближении в среднем периодических функций с особенностями. *Доклады* **77** (1951), 949—952.

b. О наилучшем приближении на классе периодических функций имеющих ограниченную s-ю производню $(0 < s < 1)$. *Известия* **17** (1953), 135—162.

[12] Ефимов, А. В. — *a*. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. *Известия* **22** (1958), 81—116.

b. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. *Известия* **23** (1959) 737—770.

c. Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье. *Известия* **24** (1960), 243—296.

[13] Favard, J. — *a*. Sur l'approximation des fonctions périodiques par les polynômes trigonométriques. *C. R.* **203** (1936), 1122—1124.

b. Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par les polynômes trigonométriques. *Bull. Soc. Math. France* (2) **61** (1937), 209—224, 243—256.

c. Colloques d'Analyse Harmonique Nancy, Paris, **15**, (1949), 97—110.

d. Sur la saturation des procédés de sommation. *Math. pures et appl.* **36** (1957), 359—372.

[14] Fejér, L. — Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen. *Math. Zeitschrift* **37** (1933), 287—309.

[15] Freud, G. — Restglied eines Tauberschen Satzes. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **2** (1951), 299—308; **3** (1952), 299—307.

[16] Ganelius, T. — On one-sided approximation by trigonometrical polynomials. *Math. Scand.* **4** (1956), 247—258.

[17] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. — A convergence criterion for Fourier series. *Math. Zeitschr.* **28** (1928), 612—634.

[18] Hille, E. — On the analytical theory of semi-groups. *Proc. Acad. U. S. A.* **28** (1942), 421—424.

[19] Jackson, D. — *a*. The theory of approximation. *American Math. Soc. Coll. Publ.* **XI** (1930).

b. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Diss. Göttingen, 1911.

c. On approximations by trigonometrical sums and polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **13** (1912), 491—515.

[20] KARAMATA, J. — Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze welche eine Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. *Journal für die reine u. angew. Math.* **164** (1931), 27—29.

[21] KOLMOGOROFF, A. N. — Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. *Ann. of Math.* **36** (1935), 521—526.

[22] LEBESGUE, H. — *a*. Sur la repprésentation approchée des fonctions. *Rend. Palermo* (1908).

b. Sur les intégrales singulières. *Ann. de Toulouse* **1** (1909), 25—117.

c. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. *Bull. Soc. Math. France* **38** (1910), 184—210.

[23] ЛОЗИНСКИЙ, С. М. — Обращение теорем Джексона. *Доклады* **83** (1952), 645—647.

[24] MARCHAUD, A. — Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles. *Journ. Math. pures et appl.* (9) **6** (1927), 337—425.

[25] NAGY, B. SZ. — *a*. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall. *Berichte d. math.-phys. Kl. Acad. d. Wiss. zu Leipzig* **90** (1938), 103—134.

b. Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier. *Hungarica Acta math.* **1** (1948), 14—52.

[26] НАТАНСОН, И. П. — *a*. Конструктивная теория функций. Москва—Ленинград, 1951.

b. О приближённом представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица, с помощью интеграла Валле-Пуссена. *Доклады* **54** (1946), 11—14.

[27] НИКОЛЬСКИЙ, С. М. — *a*. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворящих условию Липшица, суммами Фейера. *Известия* **4** (1940), 501—508.

b. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье. *Доклады* **32** (1941), 386—389.

c. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами. *Труды мат. инст. Стеклова* **15** (1945), 1—76.

d. Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности. *Доклады* **52** (1946), 191—194.

e. Приближение функций, тригонометрическими полиномами в среднем. *Известия* **10** (1946), 207—256.

f. Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации. *Известия* **13** (1949), 513—532.

[28] ПИНКЕВИЧ, В. Т. — О порядке остаточного члена ряда Фурье функций дифференцируемых в смысле Вейла. *Известия* **4** (1940), 521—528.

[29] PRIVALOFF, I. I. — Sur les fonctions conjuguées. *Bull. Soc. Math. France* **44** (1916), 100—103.

[30] QUADE, E. S. — Trigonometric approximation in the mean. *Duke Math. Journ.* **3** (1937), 529—543.

[31] СЕЛИВАНОВА, С. Г. — Приближение суммами Фурье функций имеющих производную, удовлетворяющую условию Липшица. *Доклады* **105** (1955), 909—912.

[32] СОКОЛОВ, И. Г. — Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций. *Доклады* **103** (1955), 23—26.

[33] СТЕЧКИН, С. Б. — *a*. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. *Известия* **15** (1951), 219—242.

b. О наилучших приближениях периодических функций тригонометрическими полиномами. *Доклады* **83** (1952), 651—654.

c. Об абсолютной сходимости рядов Фурье. *Известия* **19** (1955), 221—246.

d. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами. *Известия* **20** (1956), 197—206.

e. О наилучшем приближении некоторых классов функций тригонометрическими полиномами. *Известия* **20** (1956), 643—648.

[34] SUNOUCHI, G. and WATARI, C. — On the determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions. *Proc. Japan Academy* **34** (1958), 477—481.

[35] ТЕЛЯКОВСКИЙ, С. А. — *a*. Приближение дифференцируемых функций суммами Валле-Пуссена. *Доклады* **121** (1958), 426—429.

b. О приближении дифференцируемых функций линейным средними их рядов Фурье. *Известия* **24** (1960), 213—242.

[36] ТИМАН, А. Ф. — *a*. Исследования по теории приближения функций. Днепропетровск, 1951.

b. Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье. *Известия* **17** (1953), 99—134.

[37] ТИМАН, М. Ф. — Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах $L^p(1 \leqq p \leqq \infty)$. *Мат. сборник* **46** (1958), 125—132.

[38] ТИМАН, А. Ф. и ТИМАН, М. Ф. — Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем. *Доклады* **71** (1950), 17—20.

[39] TITCHMARSH, E. C. — The theory of functions, sec. ed., Oxford University Press, 1939.

[40] VALLÉE-POUSSIN, J. DE LA — *a*. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, 1919.

b. Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée. *Bull. Acad. Belgique* (1908).

c. Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné. *C. R.* **166** (1918), 799—802.

[41] WEYL, H. — Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins. *Math. Annalen* **77** (1916), 313—352.

[42] ZAMANSKY, M. — *a*. Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier. *Ann. Ec. Norm. Sup.* **66** (1949), 19—93.

b. Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques. *Ann. Ec. Norm. sup.* (3) **67** (1950), 161—198.

[43] ZELLER, K. — Saturation bei äquivalenten Summierungsverfahren. *Math. Zeitschrift* **71** (1959), 109—112.

[44] ZYGMUND, A. — *a*. Trigonometric series, sec. ed., Cambridge 1959.

b. Smooth functions. *Duke Math. Journal* **12** (1945), 47—76.

c. On the degree of approximation of functions by Fejér means. *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 274—278.

d. The approximation of functions by typical means of their Fourier series. *Duke Math. Journal* **12** (1945), 695—704.

e. A remark on the integral modules of continuity. *Univ. Nac. Tucuman Revista* **A-7** (1950), 259—269.

[45] ЩЕРБИНА, А. Д. — Об одном методе суммирования рядов сопряженных рядам Фурье. *Мат. сборник* **27** (1950), 156—170.

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА САНУ
Бр. I8

QUELQUES RÉSULTATS RÉCENTS SUR L'APPROXIMATION PAR POLYNOMES TRIGONOMÉTRIQUES

S. ALJANČIĆ (Belgrade)

Soit C l'espace des fonctions continues périodiques de période 2π et à valeur moyenne nulle. Soit $T_n(f)$ un procédé d'approximation qui à tout $f \varepsilon C$ fait correspondre un polynome trigonométrique d'ordre $\leqq n$. Soit $M \subset C$. L'ensemble

$$(\star) \qquad \{\| f - T_n(f) \|_C\}_{f \varepsilon M}$$

caractérise le procédé $T_n(f)$ par rapport à la classe de fonctions continues M. Les problèmes suivants se posent:

(A) Pour un procédé $T_n(f)$ particulier et une classe M donnée, déterminer une majorante de l'enssmble $(\star)$. Un tel énoncé,

$$f \varepsilon M \Longrightarrow \| f - T_n(f) \|_C \leqq K \varphi(n),$$

est un théorème directe.

(B) Pour un procédé $T_n(f)$ particulier et une fonction positive $\varphi(n)$ qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$, déterminer la classe de fonction M pour laquelle $\varphi(n)$ est une majorante de l'ensemble $(\star)$. Un tel énoncé,

$$\| f - T_n(f) \|_C \leqq K \varphi(n) \Longrightarrow f \varepsilon M$$

est un téorème inverse.

(C) Pour un procédé $T_n(f)$ particulier, déterminer une classe M et une fonction $\varphi(n)$, de sorte que pour M et φ a lieu simultanément le théorème directe et le théorème inverse. Un tel énoncé,

$$f \varepsilon M \Longleftrightarrow \| f - T_n(f) \|_C \leqq K \varphi(n),$$

est un théorème d'équivalence.

Dans le cas des théorèmes directes on peut poser aussi la question de la meilleure constante K pour la classe M donnée, ce qui revient à déterminer

$$E_C[M; T_n(f)] = \sup_{f \varepsilon M} \| f - T_n(f) \|_C .$$

En général on n'arrive qu'à déterminer le comportement asymptotique de $E_C[M; T_n(f)]$ lorsque $n \to \infty$.

Certains procédés d'approximation $T_n(f)$ sont saturés, c. à. d. il existe une fonction $\varphi_T(n)$ et une classe M_T (dite de saturation) telle que

1° $\|f - T_n(f)\|_C = o[\varphi_T(n)] \Longrightarrow f \equiv 0$;

2° $\|f - T_n(f)\|_C = O[\varphi_T(n)] \Longleftrightarrow f \varepsilon M_T$.

L'énoncé sur la classe de saturation d'un tel procédé est donc un théorème d'équivalence de nature particulière; on lui donne le nom du théorème de saturation.

On pose des questions analogues dans l'espace L^p, $p \geqq 1$.

Dans le présent exposé on donne un aperqu sur les théorèmes directes, inverses, d'équivalence et de saturation, et sur quelques questions qui s'y rattachent, pour quelques procédés d'approximation particuliers: meilleure approximation $E_n(f)$ (§ 3), sommes de Fourier $s_n(f)$ (§ 4), de Fejér $\sigma_n(f)$ (§ 5), de Hölder $H_n^k(f)$ (§ 5), de Riesz $R_n^\lambda(f)$ (§ 6), de Rogosinski $\rho_n(f)$ (§ 6), de de la Vallée Poussin $\tau_{n,p}(f)$ (§ 7), intégrale de de la Vallée Poussin $V_n(f)$ (§ 8), intégrale de Jackson—de la Vallée Poussin $J_n(f)$ (§ 9) et pour les procédés linéaires $\Gamma_n(f)$ (§ 10) et ceux définis par une fonctions sommatoire $G_n(f)$ (§ 9).