Зборник радова Српске академије наука и уметности LXIX
Математички институт књ. 8, 1960
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences et d'Arts LXIX
Institut Mathématique № 8, 1960

J. КАРАМАТА

О CANTOR-ОВИМ БРОЈНИМ СИСТЕМИМА

CANTOR-ови ставови о развијању реалних бројева у редове облика (2) су нешто допуњени и дат је прегледнији доказ.

У једном од својих првих радова G. CANTOR [2] (види и [1], [3], [5] и [6]) је проучавао могућност једнозначног претстављања реалних бројева редовима облика

$$\frac{d_1}{q_1}+\frac{d_2}{q_1 q_2}+\frac{d_3}{q_1 q_2 q_3}+\cdots$$

и добио ове резултате[1]:

Нека је $\{q_n\}$ *низ природних бројева подвргнутих једино услову*

$$q_n \geqq 2, \ \forall n \varepsilon N. \tag{1}$$

Сваки реалан број t, $0<t\leqq 1$, *може се претставити на један и само један начин бесконачним редом облика*

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}, \tag{2}$$

тако да су „децимале" d_n *цели бројеви који задовољавају услов*

$$0\leqq d_n \leqq q_n-1, \ \forall n\varepsilon N. \tag{3}$$

Претпоставка да је ред (2) бесконачан садржи у себи услов

$$d_n>0 \ \text{за бесконачно много } n \varepsilon N. \tag{4}$$

[1] У овом раду систематски употребљавамо ове ознаке и скраћенице: N — низ природних бројева, $0\bar{\varepsilon} N$; Q — скуп рационалних бројева; R — скуп реалних бројева; $A \Longrightarrow B$ — „A имплицира B" или „из A следи B"; $A \rightleftarrows B$ — „из A следи B и обрнуто"; $\exists$ — постоји (најмање један); $\forall$ — ма који (ма какав био); $\forall\, x\varepsilon N$ — ма који природни број x; (a, b) — највећи заједнички делитељ бројева a и b.

Овај став следи из чињенице што су при оваквом развитку децимале d_n дате изразима

$$d_n=[q_1 q_2 \ldots q_n t]^{\star}-q_n[q_1 q_2 \ldots q_{n-1} t]^{\star}, \quad n \varepsilon N, \tag{5}$$

где је

$$[x]^{\star}=\text{највећи цео број који је} < x.$$

Заиста, ако ставимо

$$t_n=q_1 q_2 \ldots q_{n-1} t-[q_1 q_2 \ldots q_{n-1} t]^{\star}, \quad n=2,3,\ldots, \quad t_1=t, \tag{6}$$

и из (5) и (6) елиминишемо заграде $[\;]^{\star}$, биће

$$q_n t_n=d_n+t_{n+1}, \quad \forall n \varepsilon N, \tag{7}$$

а отуда следи

$$t_n=\frac{d_n}{q_n}+\frac{d_{n+1}}{q_n q_{n+1}}+\frac{d_{n+2}}{q_n q_{n+1} q_{n+2}}+\cdots, \quad \forall n \varepsilon N, \tag{8}$$

што за $n=1$ даје $t_1=t$, тј. ред (2).

При томе

$$(5) \Longrightarrow (3)$$

јер је

$$0 \leqq [n x]^{\star}-n[x]^{\star} \leqq n-1, \quad \forall n \varepsilon N \text{ и } x \varepsilon R,$$

а

$$(6) \text{ и } (8) \Longrightarrow (4)$$

јер је

$$x-[x]^{\star}>0, \quad \forall x \varepsilon R.$$

Исто тако лако можемо увидети да је под условима (3) и (4) развитак (2) једнозначан, јер

$$(3),\ (4) \text{ и } (8) \Longrightarrow 0<t_n \leqq 1, \quad \forall n \varepsilon N, \tag{9}$$

а према (2) и (8) је

$$t=\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{d_\nu}{q_1 q_2 \ldots q_\nu}+\frac{t_n}{q_1 q_2 \ldots q_{n-1}};$$

отуда следи да је са (3) и (4) низ $\{d_n\}$ једнозначно одређен изразима (5).

Напомињемо да све ово важи за $\forall q_n \varepsilon R$ ако је само

$$0<q_1 q_2 \ldots q_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty;$$

тада децимале d_n нису дате обрасцем (5) већ са (7) и

$$d_n=[q_n t_n]^{\star},$$

(види W. Sierpinski [4]).

Поред овог става Cantor даје и два критеријума да би $t \varepsilon Q$, и то:

a. *Ако низ природних бројева* $\{q_n\}$ *задовољава поред услова* (1) *још и услов*

$$\forall\ k \varepsilon N,\ \exists\ n_k \varepsilon N,\ \text{такво да } k \text{ дели } q_1 q_2 \ldots q_n,\ \forall\, n \geqq n_k, \tag{10}$$

тада, да би $t \varepsilon Q$, *потребно је и довољно да*

$$\exists\ n_0 \varepsilon N \ \text{такво да је } d_n = q_n - 1,\ \forall\, n \geqq n_0 .$$

b. *Ако низ* $\{q_n\}$ *задовољава услов* (1) *и ако је он периодичан почев од извесног n-а, да би* $t \varepsilon Q$, *потребно је и довољно да и низ децимала* $\{d_n\}$ *буде периодичан почев од извесног индекса n.*

Приметимо најпре да је и критеријум a. непосредна последица обрасца (5), и да из овога можемо добити и следећи нешто прецизнији резултат:

c. *Нека је* $C \subseteq Q$, *такав да* $a/b \varepsilon C$ ако је $(a, b) = 1$ *и ако*

$$\exists\ k \varepsilon N \ \text{такво да } b \text{ дели } q_1 q_2 \ldots q_{n-1},\ \forall\, n \geqq k.$$

Да би збир t реда (2) *био број скупа C, тј. да би* $t \varepsilon C$, $0 < t \leqq 1$, *потребно је и довољно да*

$$\exists\ k \varepsilon N \ \text{такво да је } d_n = q_n - 1,\ \forall\, n \geqq k.$$

Јер, ако b дели $q_1 q_2 \ldots q_{n-1}$, биће, према (5),

$$d_n = q_1 q_2 \ldots d_n t - 1 - q_n (q_1 q_2 \ldots q_{n-1} t - 1) = q_n - 1,\ \forall\, n \geqq k\,;$$

обрнуто, ако ово важи, биће

$$t = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{d_n}{q_1 \ldots q_n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q_n - 1}{q_1 \ldots q_n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{d_n}{q_1 \ldots q_n} + \frac{1}{q_1 \ldots q_{k-1}} \varepsilon C.$$

Ако низ $\{q_n\}$ испуњава услов (10) тада је $C = Q$, па је према томе Cantor-ов став a. садржан у c.

Изгледа, међутим, да се у општем случају, тј. кад се о низу $\{q_n\}$ ништа не претпостави, не могу добити задовољавајући критеријуми за рационалност збира t редова облика (2).

Ипак постоји потпуна аналогија између развијања рационалних бројева у редове облика (2) и у периодичне децималне разломке ако при томе, правило које важи за децималне разломке овако формулишемо:

Сваки рационални број

$$t = \frac{a}{b},\quad 0 < a < b,\quad (a, b) = 1 \quad \text{или} \quad t = a = b = 1, \tag{11}$$

може се једнозначно развити у бесконачан периодичан децималан разломак облика

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{10^n}, \quad d_n \in \{0, 1, 3, \ldots, 9\}, \quad \forall n \in N;$$

ако са l означимо дужину периоде а са $k-1$ број цифара које претходе периоду, тада су k и l најмањи природни бројеви такви да

$$b \text{ дели } 10^{k-1}(10^l-1);$$

најзад, $\exists\, t' \in Q$ такво да је

$$d_n\, 10^{l-1}+d_{n+1}\, 10^{l-2}+\cdots+d_{n+l-1}=t'(10^l-1), \quad \forall n \geqq k.$$

Познато је наиме да

$$\forall\ b \in N, \ \exists\ k, l \in N \text{ такви да } b \text{ дели } 10^{k-1}(10^l-1),$$

и, ма како изгледало на први поглед изненађујуће, слично важи и кад низ десетица ($q_n=10$, $\forall n \in N$) заменимо произвољним низом $\{q_n\}$ ако је само $q_n \geqq 2$, $\forall n \in N$; наиме,

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, b \in N, \ \exists \text{ бесконачан скуп } N_b \subseteq N, \text{ такав да } b \text{ дели} \\ q_1 q_2 \ldots q_{n-1}(q_n q_{n+1} \ldots q_{m-1}-1), \quad \forall\, n, m \in N_b. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Шта више, ако је $t \in Q$, облика (11), и ако образујемо ма који од скупова N_b који одговара имениоцу b броја t, тада $\exists\, t' \in Q$ такво да је

$$\begin{aligned} d_n q_{n+1} \cdots q_{m-1} + d_{n+1} q_{n+2} \cdots q_{m-1} + \cdots + d_{m-2} q_{m-1} + d_{m-1} = \\ = t'(q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1} - 1), \quad \forall\, n, m \in N_b. \end{aligned} \tag{13}$$

Да бисмо ово увидели, приметимо најпре да према (6)

$$t \in Q \Longrightarrow t_n \in Q, \quad \forall\, n \in N,$$

тако да можемо, према (9), ставити

$$t_n=\frac{a_n}{b_n} \quad \text{са} \quad a_n, b_n \in N, \ 0<a_n<b_n,$$

$$(a_n, b_n)=1 \ \text{или} \ a_n=b_n=1$$

и

$$t=t_1=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b},$$

а тада се (6) своди на

$$\frac{a\, q_1 q_2 \cdots q_{n-1}}{b}=[q_1 q_2 \cdots q_{n-1}\, t]^{*}+\frac{a_n}{b_n}. \tag{14}$$

Из (14) видимо да

$$b_n \text{ дели } b, \ \forall n \in N,$$

и да се, према томе, низ $\{t_n\}$ састоји само из коначног броја различитих чланова.

Даље можемо показати да је

$$t_n = t_m \rightleftharpoons b \text{ дели } q_1 q_2 \dots q_{n-1} (q_n q_{n+1} \dots q_{m-1} - 1). \tag{15}$$

Ово следи непосредно из

$$q_1 q_2 \dots q_{n-1} (q_n q_{n+1} \dots q_{m-1} - 1) \frac{a}{b} = [q_1 q_2 \dots q_{m-1} t]^* - [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^* + t_m - t_n \,.$$

а ову једначину добићемо из (6).

Како низ $\{t_n\}$ може имати само коначно много различитих чланова, то се извесни чланови морају поновити бесконачно много пута, па ако означимо са $N_b \subseteq N$ скуп индекса једног таквог бесконачног низа, тј.

$$t_n = t_m \rightleftharpoons n, m \in N_b \,, \tag{16}$$

тада видимо да

$$(15) \text{ и } (16) \Longrightarrow (12),$$

јер број $b \in N$ можемо произвољно бирати.

Ако ставимо још

$$t_n = t_m = t', \ \forall \ n, m \in N_b \,,$$

и ако приметимо да из (8) следи

$$t_n = \frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} + \frac{t_m}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} \,,$$

то из (15) и ове једначине добивамо и тврђење (13).

Напоменимо још да услов облика (13) претставља истовремено и критеријум, иако веома сложен, за рационалност збира редова облика (2). Јер, ако постоји број $t' \in Q$ и бесконачан скуп $N_b \subseteq N$ такав да (13) важи, тада је $t \in Q$. Заиста, ако са

$$n < m < r < s < \dots$$

означимо један бесконачан низ бројева из N_b, биће, према (13),

$$\frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \dots + \frac{d_{m-1}}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} = t' \left(1 - \frac{1}{q_n \cdots q_{m-1}}\right),$$

$$\frac{d_m}{q_m} + \frac{d_{m+1}}{q_m q_{m+1}} + \dots + \frac{d_{r-1}}{q_m q_{m+1} \cdots q_{r-1}} = t' \left(1 - \frac{1}{q_m \cdots q_{r-1}}\right),$$

$$\frac{d_r}{q_r} + \frac{d_{r+1}}{q_r q_{r+1}} + \dots + \frac{d_{s-1}}{q_r q_{r+1} \cdots q_{s-1}} = t' \left(1 - \frac{1}{q_r \cdots q_{s-1}}\right),$$

. . . .

а како је, према (8),

$$t_n = \frac{d_n}{q_n} + \ldots + \frac{d_{m-1}}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} + \frac{t_m}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}},$$

$$t_m = \frac{d_m}{q_m} + \ldots + \frac{d_{r-1}}{q_m q_{m+1} \cdots q_{r-1}} + \frac{t_r}{q_m q_{m+1} \cdots q_{r-1}},$$

$$t_r = \frac{d_r}{q_r} + \ldots + \frac{d_{s-1}}{q_r q_{r+1} \cdots q_{s-1}} + \frac{t_s}{q_r q_{r+1} \cdots q_{s-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

то је

$$t_n = t'\left(1 - \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} + \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1}} - \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{r-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q_n q_{n+1} \cdots q_{r-1}} - \ldots\right) = t' \varepsilon Q, \quad \text{а} \quad t_n \varepsilon Q \Longrightarrow t \varepsilon Q.$$

Одавде можемо добити и CANTOR-ов критеријум b. Јер ако су низови $\{q_n\}$ и $\{d_n\}$ периодични са периодом l_1, односно l_2, тада ће (13) бити испуњено ако за скуп N_b узмемо извесну аритметичку прогресију чија је разлика једнака најмањем заједничком садржатељу бројева l_1 и l_2.

Обрнуто, ако је $t \varepsilon Q$ и низ $\{q_n\}$ периодичан са периодом l, тада из (5) и (12) следи да и низ $\{d_n\}$ мора бити периодичан са периодом која је дељива са l. Јер, ако ставимо

$$q = q_n q_{n+1} \cdots q_{n+l-1},$$

и (12) применимо на низ

$$q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q, q, q, \ldots,$$

добићемо да

$$\exists\, r \varepsilon N \text{ тако да } b \text{ дели } q_1 q_2 \ldots q_{n-1}(q^r - 1),$$

а отуда следи, према (15), да је

$$t_n = t_{n+rl}, \quad \forall\, n \geqq n_0.$$

Како, према (5),

$$q_n = q_m \text{ и } t_n = t_m \Longrightarrow d_n = d_m,$$

јер је

$$d_m = [q_1 q_2 \cdots q_{n-1}(q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1} - 1)\, t + q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_m t]^\star -$$

$$- q_m [q_1 q_2 \cdots q_{n-1}(q_n q_{n+1} \cdots q_{m-1} - 1)\, t + q_1 q_2 \cdots q_{n-1} t]^\star =$$

$$= [q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_m t]^\star - q_m [q_1 q_2 \cdots q_{n-1} t]^\star,$$

то мора и низ $\{d_n\}$ бити периодичан, са периодом дужине rl.

(Примљено 17-VI-1960)

НАВОДИ

[1] T. BRODEN — Über Darstellung von reellen Funktionen mit... *Math. Ann.* **51** (1889), 299—320, § 1.

[2] G. CANTOR — Über die einfachen Zahlensysteme. *Zeitschr. für Math. u. Phys.* **14** (1869), 121—128, или *Gesammelte Abhandl.* Berlin, 1932, 35—42.

[3] G. FABER — Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen. *Math. Ann.* **60** (1905), 196—203.

[4] W. SIERPINSKI — Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries. *C. R. Soc. Sciences de Varsovie* (1911), 66—77.

[5] M. STEPHANOS — Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables. *Bull. Soc. Math. France* **7** (1878—79), 81—83.

[6] E. STRAUSS — Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst funktionentheoretischer Anwendung. *Acta Math.* **11** (1887—8), 13—18.

SUR LES SYSTÈMES NUMÉRIQES DE CANTOR

Par J. KARAMATA (Genève)

Soit $\{q_n\}$ une suite de nombres naturels satisfaisant à l'unique condition

$$q_n \geqq 2, \ \forall n \varepsilon N.$$

G. CANTOR [2] a montré que tout nombre réel t, $0<t\leqq 1$, est développable d'une seule manière en série de la forme

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{q_1 q_2 \dots q_n}, \tag{1}$$

à condition que la suite des „décimales" $\{d_n\}$ soit une suite d'entiers tels que

$$0 \leqq d_n \leqq q_n - 1,$$

et que

$$0<d_n, \text{ pour une infinité de } n.$$

Il montre en outre que, a) si

$$\forall k, \ \exists n_k \varepsilon N \text{ tel que } k \text{ divise } q_1 q_2 \dots q_n, \ \forall n \geqq n_k \tag{2}$$

alors, $t \varepsilon Q$ si et seulement si

$$d_n = q_n - 1, \text{ à partir d'un } n,$$

b) si la suite $\{q_n\}$ est périodique à partir d'un n, alors $t\varepsilon Q$ si et seulement si la suite $\{d_n\}$ est périodique à partir d'un n.

On montre que le premier théorème est une conséqueuce très simple du fait que la suite des décimales $\{d_n\}$ est donnée par

$$d_n = [q_1 q_2 \dots q_n t]^* - q_n [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^*, \qquad (3)$$

où $[x]^*$ désigne le plus grand entier $< x$. Il suffit en effet de poser

$$t_n \stackrel{\text{def}}{=} q_1 q_2 \dots q_{n-1} t - [q_1 q_2 \dots q_{n-1} t]^*,$$

pour $n = 2, 3, \dots,$ et $t_1 = t$.

La proposition a) est de même une conséquence immédiate de (3), car on en déduit sans peine la suivante.

Soit $C \subseteq Q$ tel que $\frac{a}{b} \varepsilon C$ si et seulement si $(a, b) = 1$ et s'il existe k tel que

$$b \text{ divise } q_1 q_2 \dots q_{n-1}, \ \forall n \geqq k;$$

pour que $t \varepsilon C$, $0 < t \leqq 1$, il faut et il suffit que

$$\exists\ k \varepsilon N \text{ tel que } d_n = q_n - 1, \ \forall n \geqq k.$$

Ce résultat contient la proposition a) de Cantor car $(2) \Longrightarrow C = Q$.

On peut de même en déduire la proposition b) en montrant au préalable que $\forall b \varepsilon N$, $\exists$ un ensemble infini $N_b \subseteq N$ tel que

$$b \text{ divise } q_1 q_2 \dots q_{n-1} (q_n q_{n+1} \dots q_{m-1} - 1), \quad \forall n, m \varepsilon N_b;$$

il en découle une analogie presque complète entre les développements des nombres rationnels en séries de la forme (1) et leur développement en fractions décimales.