Зборник радова САН LXIII — Математички институт САН, књ. 7, 1959
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LXIII
Institut Mathématique № 7, 1959

М. ТОМИЋ

О УНИФОРМНОЈ КОНВЕРГЕНЦИЈИ НЕКИХ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ РЕДОВА У БЛИЗИНИ НУЛЕ

1.1. Познати став Chaundy и Jolliffe-а [5] казује да је за тригонометриски синусни ред

$$g(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu x, \qquad a_\nu \downarrow 0, \tag{1.1}$$

$a_\nu = o(\nu^{-1})$ (односно $a_\nu = O(\nu^{-1})$) потребан и довољан услов за униформну конвергенцију (односно униформну ограниченост) у близини нуле. Шта више *за редове* (1.1) *чињеница да* $g(\theta)\to {}^1/_2\pi A$ *еквивалентна је са чињеницом да* $na_n \to A$ [6]. Овај последњи став може се и даље уопштавати. Тако је у [1] доказан овај став:

a) *Нека је* $0<\alpha<2$, $A>0$, $a_n \downarrow 0$; *тада из*

$$g(x)\simeq \frac{A\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\, x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to 0, \tag{1.2}$$

следи

$$a_n \simeq A n^{-\alpha} L(n), \qquad n\to\infty \tag{1.3}$$

и обрнуто.

Овде $L(t)$ означава споро променљиву функцију (види [1]).

Став важи и за $\alpha=0$ под условом да је a_n монотон и конвексан низ који тежи нули; тј. важи:

b) *Нека је* $A>0$ *и* a_n *један конвексан низ који тежи нули. Тада из*

$$a_n \simeq A L(n), \qquad n\to\infty, \tag{1.4}$$

следи

$$g(x)\simeq A\,\frac{1}{x}\, L\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x\to 0. \tag{1.5}$$

c) *Ако је* $A > 0$ и a_n *само монотоно тежи нули тада, обратно, из* (1.5) *следи* (1.4).

Из дела a) овога става следи очевидно и униформна конвергенција од (1.1) ако $a_\nu \to 0$ и ако се $g(x)$ понаша у близини нуле као

$$g(x) \simeq A L\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \to 0,$$

и где је $L(1/x)$ нека споро променљива функција која тежи нули кад $x \to 0$. Уствари у том случају из a) следи најпре

$$a_n \simeq A \frac{1}{n} L(n), \qquad n \to \infty. \tag{1.3'}$$

Због

$$a_\nu \downarrow 0 \qquad \text{и} \qquad n a_n \simeq A L(n) \to 0,$$

наведена теорема Chaundy и Jolliffe-а имплицира тада униформну конвергенцију од (1.1).

Ставимо сада

$$n a_n \equiv b_n \simeq M L(n), \qquad n \to \infty, \tag{1.4'}$$

и претпоставимо још да је $L(n)$ конвексан низ који тежи нули. Тада, ако је

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g^*(x) \sin \nu x \, dx \tag{1.6}$$

следи према b)

$$g^*(x) \simeq A \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \to 0. \tag{1.5'}$$

Најзад, ако се $g^*(x)$ понаша као у (1.5'), а b_n које је дато са (1.6) *монотоно тежи нули* (дакле не мора бити конвексно) имаћемо према c)

$$a_n \equiv \frac{b_n}{n} \simeq A \frac{1}{n} L(n), \tag{1.4'}$$

тако да у овом последњем случају, због $a_n \downarrow 0$ и $n a_n \equiv b_n \to 0$, следи униформна конвергенција од (1.1) у близини нуле, тј.

$$\sum_1^n a_\nu \sin \nu x = \sum_1^n \frac{b_\nu}{\nu} \sin \nu x \to 0, \qquad x \to 0,$$

за свако n.

Другим речима можемо казати да *из ӣри ӣреӣӣосӣавке*

$$1)\quad g^*(x)\simeq A\frac{1}{x}L\left(\frac{1}{x}\right),\qquad x\to 0,\qquad 2)\ b_\nu\downarrow 0$$

$$3)\quad (^*)\ b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g^*(x)\sin\nu x dx,\qquad \nu=1,2,\ldots$$

следи ӣрема сӣаву Chaundy и Jolliffe-а да

$$\sum_1^n a_\nu\sin\nu x\equiv\sum_1^n\frac{b_\nu}{\nu}\sin\nu x\to 0,\qquad x\to 0.$$

У овим ставовима очевидно $g^*(x)$ не мора бити ни L - интеграбилно, већ само такво да интеграл на десној страни у (*) постоји. У доказу свих тврђења наведених под a), b) и c) битна је претпоставка да b_ν монотоно теже нули, одакле, онда следи не само униформна конвергенција од (1.1), већ и асимптотско понашање функције дефинисане са (1.1) у близини нуле.

У овом раду, у овој тачки **1.1**, претпоставићемо да b_ν не само да нису монотони већ да су и произвољног знака. Очевидно, чим нема услова да су b_ν монотони, не може бити речи о асимптотском понашању коефицијената и функција дефинисаних синусним редовима са таквим коефицијентима. Али претпостављајући више о функцији $g^*(t)$ може се извести униформна конвергенција од

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\sin\nu x\equiv\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu}{\nu}\sin\nu x$$

у близини нуле. Тако, у тачки **2.1** доказаћемо овај

СТАВ 1. *Ако су $b_\nu\equiv(\nu a_\nu)$ Fourier-ови синусни коефицијенӣи једне неӣарне* L *— инӣеграбилне функције $g^*(t)$, ӣј.*

$$(^*)\qquad b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g^*(t)\sin\nu t\,dt,\qquad \nu=1,2,\ldots$$

где је $g^*(t)$ ограничено у (ε,π), $\varepsilon>0$ и где се $g^*(t)$ ӣонаша у близини нуле као

$$g^*(t)=o\left(\frac{1}{t\lg t}\right),\qquad t\to 0,$$

ӣада за свако n

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\sin\nu\theta\equiv\sum_{\nu=1}^{n}\frac{b_\nu}{\nu}\sin\nu\theta\to 0,\qquad \theta\to 0.$$

ПРИМЕДБА. Ако су b_ν Fourier-ови косинусни коефицијенти једне парне L-интеграбилне функције, тј.

$$b_0=0, \qquad b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g^*(t)\cos\nu t\,dt, \qquad \nu=1,2,\ldots,$$

тада на основу познатог правила о интеграцији члан по члан Fourier-овог реда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \cos\nu x,$$

следи већ и униформна конвергенција од

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\nu x \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{\nu}\sin\nu x, \qquad \text{за све } x.$$

1.2. У овој тачки посматраћемо обрасце Parseval-овог облика $\Sigma\, a_\nu \lambda_\nu$ где је

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{aligned} g(x) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum a_\nu\cos\nu x \\ f(x) &\sim \frac{\lambda_0}{2}+\sum \lambda_\nu\cos\nu x \end{aligned}$$

и

$$\begin{matrix} a_\nu \\ \lambda_\nu \end{matrix} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \begin{matrix} g(x) \\ f(x) \end{matrix} \cos\nu x\,dx,$$

и где се о функцијама $g(x)$ и $f(x)$ претпоставља да имају монотон карактер. Parseval-ове формуле таквога типа детаљно је студирала Sheila M. Edmonds [2, I, II, III] (II, теорема 15, и III, теореме 21, 22 и 23). У тим ставовима S. M. Edmonds показала је и када су, у исти мах у обрасцу

$$\text{(2.2)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{a_0\lambda_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\lambda_\nu,$$

оба израза (ред и интеграл) коначни или бесконачни.

У овом раду занимаћемо се само са конвергенцијом реда $\Sigma\, a_\nu \lambda_\nu$ не улазећи у то, када је тај збир једнак са левом страном у (2.2). Овде су и претпоставке различите од оних у [2].

У тачки **2.2** доказаћемо

СТАВ 2. a) *Нека је* $g(x) \in \mathbf{L}(0,\pi)$

$$\mathfrak{S}[g] \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \tag{2.3}$$

$a_\nu \geqq 0$, *и нека* $|g(x)|$ *има у близини нуле монотону мајоранту, тј.*

$$|g(x)| \leqq G(x), \quad G(x') \geqq G(x), \quad x' \leqq x, \qquad \int_0^\delta G(x)\,dx < \infty. \tag{2.4}$$

b) *Нека је* λ_ν *један двоструко монотон низ*[1] *који тежи нули, тј.*

$$\lambda_\nu \to 0, \quad \Delta\lambda_\nu = \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1} \geqq 0, \quad \Delta^2\lambda_\nu = \Delta(\Delta\lambda_\nu) \geqq 0,$$

и нека је

$$\int_0^x \left(\frac{\lambda_0}{2} + \sum \lambda_\nu \cos \nu t\right) dt = \frac{\lambda_0 x}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu \sin \nu x}{\nu}, \tag{2.5}$$

једна конвексна функција у близини нуле (не конкавна), тада $\Sigma a_\nu \lambda$ *конвергира, ако*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\right) \int_0^{\pi/n} |g(t)|\,dt = O(1). \tag{2.6}$$

b') *Претпоставка* b *може се заменити са*

$$\Delta\lambda_\nu \geqq 0, \quad \Delta^2\lambda_\nu \geqq 0 \quad \text{и} \quad \sum \frac{\lambda_\nu}{\nu} < \infty.$$

ПОСЛЕДИЦА. Ако је $g(x)$ ограничено у близини нуле, тада се може узети $\lambda_\nu \equiv 1$. Услов (2.6) је тада испуњен као и услов (2.5) и став 2 се своди на следећи Paley-ев став [5, став 81].

Ако је $g(x)$ *ограничено у близини нуле,* $\mathfrak{S}[g]$ *дато са* (2.3), *и* $a_\nu \geqq 0$, *тада је* $\Sigma a_\nu < \infty$.

2.1. Доказ става 1. a) Како су $b_\nu \equiv \nu a_\nu$ Fourier-ови коефицијенти **L**-интеграбилне функције $g^*(t)$ то $\nu a_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$. За $\theta \leqq 1/n$ имамо тада

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu a_\nu}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu \to 0, \quad n \to \infty.$$

[1]) Овај услов имплицира да је $(\lambda_0/2 + \Sigma\lambda_\nu \cos \nu x) \in \mathbf{L}\,(0, \pi)$.

b) Нека је сада $k<n$ и

$$(k+1)^{-1} \leqq \theta \leqq k^{-1},$$

тада из

$$\nu a_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g^*(t) \sin \nu t dt, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

следи

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n a_\nu \sin \nu\theta &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g^*(t) \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu\theta \sin \nu t}{\nu} \right) du = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\theta/2} + \int_{\theta/2}^\pi \right) g^*(t) \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu\theta \sin \nu t}{\nu} \right) dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Отуда је

$$|I_1| \leqq \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta/2} |g^*(t)| \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu\theta \sin \nu t}{\nu} \right| dt. \tag{1.9}$$

На основу једног Fejér-овог става [3] у вези са једним ставом Fejér-Lukács [4], израз[2])

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu\theta \sin \nu t}{\nu} \tag{1.10}$$

је позитиван у квадрату $0<t<\pi$, $0<\theta<\pi$, ако се последњи члан у њему замени са $(\sin n\theta \sin nt)/2n$.

---

[2]) Тај Fejér-ов [3] став гласи: *Потребан и довољан услов да*

$$f(\theta) \equiv \sum_{k=1}^n \lambda_k \sin k\theta \sin kt \geqq 0, \qquad (0<\theta<\pi,\ 0<t<\pi)$$

је да

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n k\lambda_k \sin kt \geqq 0, \qquad (0<t<\pi).$$

Овде је

$$\varphi(t) \equiv \sin t + \sin 2t + \cdots + \frac{1}{2} \sin nt,$$

и према Fejér-Lukács [4] $\varphi(t) \geqq 0$ је за $0 \leqq t \leqq \pi$ и свако n.

Најзад због $\nu a_\nu \to 0$ смена последњег члана у (1.10) са $(\sin n\theta \sin nt)/2n$ мења вредност збира у (1.8) за $o(1)$ кад $n\to\infty$.

Из (1.9) следи

$$|I_1| \leqq \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\sin\nu\theta \sin\nu\xi}{\nu} \int_0^{\theta/2} |g^*(t)|\, dt, \tag{1.11}$$

где $'$ над знаком збира означава да последњи члан у њему треба сменити са $(\sin n\theta \sin n\xi)/2n$. Овде је сада $0<\xi\leqq\theta/2$.

Ставимо

$$\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\sin\nu\theta\sin\nu\xi}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\sin\nu\theta\sin\nu\xi}{\nu} + \sum_{\nu=k+1}^{n}{}' \frac{\sin\nu\theta\sin\nu\xi}{\nu} = J_1 + J_2.$$

Како је $\theta\leqq k^{-1}$ то је

$$|J_1| \leqq \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\nu\sin\nu\xi}{\nu k} \leqq \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{k} |\sin\nu\xi| = O(1).$$

За $|J_2|$ важи, због $0<\xi\leqq\theta/2$, процена

$$|J_2| = \left| \sum_{k+1}^{n}{}' \frac{\sin\nu\theta\sin\nu\xi}{\nu} \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{k+1}^{n}{}' \frac{\cos(\theta-\xi)}{\nu} - \sum_{k+1}^{n}{}' \frac{\cos(\theta+\xi)}{\nu} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2(k+1)\sin\theta/4} + \frac{1}{2(k+1)\sin\theta/2} = O(1),$$

ако се при томе води рачуна да је

$$(k+1)^{-1} \leqq \theta \leqq k^{-1}.$$

На тај начин за свако довољно мало θ имаћемо униформно по θ

$$\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{\sin\nu\theta\sin\nu\xi}{\nu} = O(1).$$

Отуда, из (1.11) за θ довољно мало, због претпостављене **L**-интеграбилности од $g^*(t)$ у $(0,\pi)$ имамо

$$|I_1| \leqq O(1) \int_0^{\theta/2} |g^*(t)|\, dt = o(1), \qquad \theta\to 0.$$

С друге стране је, водећи рачуна да је (1.10) позитивно

$$|I_2| = \left| \int_{\theta/2}^{\pi} g^*(t) \left(\sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\sin \nu\theta \sin \nu t}{\nu} \right) dt \right| <$$

$$< \left| g^*\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \left| \int_0^{\pi} \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{\sin \nu\theta \sin \nu t}{\nu} dt = \left| g^*\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \sum_{\nu=0}^{[n/2]}{}' \frac{\sin (2\nu+1)\theta}{(2\nu+1)^2} \right. .$$

Сада, на основу једне примедбе P. Heywood-a [7], *из*

$$g(x) = \sum_1^{\infty} \lambda_\nu \sin \nu x, \qquad \lambda_\nu \downarrow 0, \quad u \quad \lambda_\nu \simeq A\nu^{-2}, \ \nu \to \infty$$

следи

$$g(x) \simeq Ax \lg 1/x, \qquad x \to 0.$$

Применом ове примедбе можемо извести најпре да је

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\theta}{(2\nu)^2} = O(\theta |\lg \theta|), \qquad \theta \to 0,$$

а отуда и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin (2\nu+1)\theta}{(2\nu+1)^2} = O(\theta |\lg \theta|), \qquad \theta \to 0.$$

Даље је због $k < n$, $(k+1)^{-1} \leqq \theta$,

$$\sum_{[n/2]+1}^{\infty} \frac{\sin (2\nu+1)\theta}{(2\nu+1)^2} \leqq \frac{A}{n} \leqq A\theta, \qquad \theta \to 0,$$

тако да је дефинитивно

$$\sum_0^{[n/2]} \frac{\sin (2\nu+1)\theta}{(2\nu+1)^2} = O(\theta |\lg \theta|), \qquad \theta \to 0.$$

Због претпоставке о функцији $g^*(\theta/2)$ дате у ставу 1, следи тада из (1.12)

$$|I_2| \leqq 2 \left| g^*\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \left(\sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{\sin (2\nu+1)\theta}{(2\nu+1)^2} \right) =$$

$$= o\left(\frac{1}{\theta |\lg \theta|} \right) O(\theta |\lg \theta|) = o(1), \qquad \theta \to 0,$$

и тиме је став 1 доказан.

2.2. Доказ става 2. Нека су $c_{n\nu}$ коефицијенти Cesàro-ове трансформације трећега реда:

$$(2.7') \qquad c_{n\nu} = \frac{\binom{n+3-\nu}{3}}{\binom{n+3}{3}} = \left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\left(1-\frac{\nu}{n+2}\right)\left(1-\frac{\nu}{n+3}\right),$$

$$\nu=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n;$$

тада је лако проверити да је

$$\Delta^2\{c_{n\nu}\lambda_\nu\} \geqq 0, \qquad \nu=0,\ 1,\ 2,\dots,n,$$

због $\Delta\lambda_\nu \geqq 0$ и $\Delta^2\lambda_\nu \geqq 0$, јер је

$$\Delta^2\{c_{n\nu}\lambda_\nu\} = \lambda_\nu\Delta^2(c_{n\nu})+2\Delta(c_{n\nu})\,\Delta\lambda_\nu+c_{n\nu}(\Delta^2\lambda_\nu).$$

Према добро познатом резултату L. Fejér-а следи тада

$$(2.7) \qquad P_{n\nu}(t) \equiv \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} c_{n\nu}\lambda_\nu \cos\nu t \geqq 0,$$

за свако t.

Посматрајмо сада

$$\left|\frac{\lambda_0 a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu c_{n\nu}\lambda_\nu\right| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi g(t)\,P_{n\nu}(t)\,dt\right|,$$

где је $P_{n\nu}(t)$ дефинисано са (2.7).

Тада је

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi g(t)P_{n\nu}(t)\,dt\right| &\leqq \frac{2}{\pi}\left(\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n} c_{n\nu}\lambda_\nu\right)\int_0^{\pi/n}|g(t)|\,dt+ \\ &+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/n}^{\delta}|g(t)|\,|P_{n\nu}(t)|\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|g(t)|\,|P_{n\nu}(t)|\,dt=I_1+I_2+I_3. \end{aligned}$$

Пре свега је

$$I_1 \leqq \left(\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\right)\int_0^{\pi/n}|g(t)|\,dt,$$

па је I_1 ограничено на основу услова (2.6).

На исти начин, будући да је δ утврђено, имамо

$$I_3 = \frac{\lambda_0}{\sin \delta/2} \int_{\delta}^{\pi} |g(t)|\, dt = O(1).$$

Посматрајмо најзад са $m/n \leqq \delta \leqq (m+1)/n$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^{\delta} |g(t)|\, |P_{n\nu}(t)|\, dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |g(t)|\, |P_{n\nu}(t)|\, dt.$$

На основу напред поменуте особине да је полином у загради позитиван имамо

$$I_2 \leqq \sum_{k=1}^{m-1} g(\xi_k) \left(\frac{\lambda_0 t}{2} + \sum_{\nu=1}^{\pi} c_{n\nu} \frac{\lambda_\nu \sin \nu t}{\nu} \right) \Bigg|_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{kn+1}{n}\pi} \leqq \sum_{k=1}^{m-1} i_k,$$

где је

$$i_k \leqq G\left(k \frac{\pi}{n}\right) \left\{ \frac{\lambda_0 \pi}{n} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_{n\nu} \frac{\lambda_\nu \sin \nu t}{\nu} \right) \Bigg|_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} \right\}.$$

Приметимо сада да је на основу једног Fejér-овог резултата [3] *аритметичка средина трећега реда делимичних збирова Fourier-овог реда једне конвексне функције (не конкавне) исто тако конвексна и да је испод функције.* Зато сада због $\lambda_n = o(1)$, $n \to \infty$ (тј. због непрекидности од $\lambda_0 t/2 + \Sigma(\lambda_\nu/\nu) \sin \nu t$) следи

$$\left(\sum c_{n\nu} \frac{\lambda_\nu \sin \nu t}{\nu} \right) \Bigg|_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.9}$$

Водећи рачуна о овоме, имамо

$$i_k \leqq \frac{C}{n} G\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

и како $G(x)$ монотоно опада, биће најзад, због $m/n = O(1)$,

$$I_2 \leqq \frac{C_1}{n} \sum_{k=1}^{m} G\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leqq C_2 \int_0^{\delta} G(x)\, dx, \tag{2.10}$$

а тиме је због претпоставке (1.4) доказан став 2 при условима a) и b).

Да став 2 важи и при услову b′) следи из чињенице да се у случају $\Sigma a_\nu/\nu < \infty$, образац (2.9) може опет оценити са $O(1/n)$.

Најзад, Paley-ев став следи из чињенице да за ограничено $g(t)$ образац (2.9) постаје, према напред поменутом Fejér-овом ставу, функција ограничене варијације.

(Саопштено 8 априла 1959)

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sc.* **10** (1956), 101-120.

[2] S. M. Edmonds — The Parseval Formulae for monotonic Functions I, II, III, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **43** (2), (1947), 289 – 306; **46** (2), (1950), 231 – 267.

[3] L. Fejér — On the Properties of the Arithmetical Means of the Partial Sums of Fourier Series, *Journ. of Math. and Phys.* **13** (1), (1934), 1 – 17.

[4] ——— Einige Sätze die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen ..., *Monatsh. für Math. und Phys.* **35** (2), (1928), 305—344.

[5] Hardy and Rogosinki — Fourier Series, Cambridge (1950).

[6] ——— Notes on Fourier Series I. On sine Series with positive Coefficients, *Journ. London Math. Soc.* **18** (1943), 50.

[7] P. Heywood — Note on a Theorem of Hardy on Trigonometrical Series, *Journ. London Math. Soc.* **93** (3), (1954), 373 – 378.

SUR LA CONVERGENCE UNIFORME DE CERTAINES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES AU VOISINAGE DE ZÉRO

M. TOMIĆ (Beograd)

1.1. D'après le théorème connu de Chaundy et Jolliffe [5], $a_\nu = o(\nu^{-1})$ est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence uniforme de (1.1) $(a_\nu \to 0)$ au voisinge de zéro. De plus, pour (1.1) avec $a_\nu \to 0$ on a d'aprés [1]:

De

$$g(x) \sim \frac{A\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi/2} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \to \infty,\ 0 < \alpha < 2,\ A > 0,$$

résulte

$$a_n \simeq A n^{-\alpha} L(n), \qquad n \to \infty,$$

et inversement. $L(t)$ désigne ici „une fonction à croissance lente“ [1].

De ce résultat on en déduit aussi la conlusion suivante. *Les trois hypothèses*

$$1) \quad g^*(x) \simeq A \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to 0, \quad 2)\ b_\nu \downarrow 0, \quad 3)\ b_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g^*(x) \sin \nu x \, dx,$$

impliquent pour tout n, en vertu du théorème de Chaundy et Jolliffe,

$$(A) \qquad \sum_1^n a_\nu \sin \nu x \equiv \sum_1^n \frac{b_\nu}{\nu} \sin \nu x \to 0, \qquad x \to 0.$$

Dans cette note nous allons donner les conditions relatives à la fonction $g^*(x)$ sous lesquelles on a (A), en supprimant en même temps la condition 2), c. à. d. la monotonie de b_ν. On démontre dans § 2.2 le

THÉOREME 1. *$\Sigma b_\nu \sin \nu x$ étant la série de Fourier d'une fonction $g^*(t)$ impaire L-intégrable, bornée dans (ε, π), $\varepsilon > 0$, telle que*

$$g^*(t) = o\left(\frac{1}{t \lg t}\right), \qquad t \to 0,$$

alors la formule (A) aura lieu pour tout n.

1.2. Ce théorème se déduit à l'aide de l'estimation de la formule (1.8) pour $(k+1)^{-1} \leq \theta \leq k^{-1}$. A cet effet, pour évaluer (1.9) on utilise un resultat de Fejér [3] d'après lequel le polynôme (1.10) est positif dans le carré $0 < t < \pi$, $0 < \theta < \pi$ si son dernier coefficient est remplacé par $1/2n$. Usant le même résultat on obtient l'estimation pour I_2 (formule (1.12)) en tenant compte du fait que d'après P. Heywood [7] *de*

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_\nu \sin \nu x, \quad \lambda_\nu \downarrow 0, \quad et \quad \lambda_\nu \simeq A \nu^{-2}$$

résulte $g(x) \simeq A x \lg 1/x$.

2.1. Dans ce paragraphe nous considérons la formule $\Sigma a_\nu \lambda_\nu$, de type de Perseval, où a_ν et λ_ν sont les coefficients de Fourier de $f(x)$ et $g(x)$ donnés par (2.1). Les formules de Parseval où f, g, a_ν et λ_ν ont un caracterère monotone sont étudiées par S. M. Edmonds [2]. Dans 2.2 nous démontrons le

THÉOREME 2. a) *Soient* $g(x) \in L(0, \pi)$, $\mathfrak{S}[g]$ *donnée par* (2.3), $a_\nu \geq 0$ *et* $|g(x)|$ *admet au voisinage de zéro une majorante* $G(x)$, *monotone et décroissante,* L*-intégrable* (*les conditions* (2.4)). b) $\lambda_\nu \downarrow 0$, *et* λ_ν *forment une suite deux fois monotone. La fonction*

$$\int_0^x f(t)\,dt \equiv \frac{\lambda_0 x}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu \sin \nu x}{\nu} \tag{2.5}$$

soit convexe au voisinage de zéro (non-concave), alors $\Sigma a_\nu \lambda_\nu < \infty$ *si*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu\right) \int_0^{\pi/n} |g(t)|\,dt = O(1), \quad n \to \infty. \tag{2.6}$$

Les conditions b) *peuvent être remplacées par les suivantes:*

b′) $$\Lambda\lambda_\nu \geqq 0, \quad \Delta^2 \lambda_\nu \geqq 0 \quad et \quad \Sigma\lambda_\nu/\nu < \infty.$$

Corollaire. Si $g(t)$ est bornée on peut prendre $\lambda_\nu \equiv 1$. Les conditions (2.5) et (2.6) du théorème précédent étant alors remplies, on obtient ainsi le résultat suivant dû à Paley [5]: *Soit* $g(x)$ *bornée,* $\mathfrak{S}[g]$ *donnée par* (2.3) *et* $a_\nu \geq 0$, *alors* $\Sigma a_\nu < \infty$.

2.2. Pour démontrer ce théorème 2, nous formons d'abord le polynôme $P_{n\nu}$ (2.7) où $c_{n\nu}$ désignent les coefficients de la transformation de Cesàro d'ordre 3 (formule (2.7′)). La formule (2.8) qui donne en réalité $\Sigma a_\nu \lambda_\nu$ (à cause de $a_\nu \geq 0$) peut se majorer par $I_1 + I_2 + I_3$. La condition (2.6) se réduit à $I_1 = O(1)$. Les hypothèses faites sur λ_ν donnent la positivité de $P_{n\nu}$ et, d'après un théorème de Fejér [3], les moyennes arthmétiques d'ordre 3 de sommes partielles de $\mathfrak{S}[f]$ seront convexe et au-dessous de f toutes les fois lorsque f est convexe. Or, de là, résulte (2.9). La mojorante monotone $G(x)$ (avec les conditions (2.4)) nous a conduit finalement à $I_2 = O(1)$. L'estimation $I_3 = O(1)$ est évidente.