Зборник радова САН LXIII — Математички институт САН књ. 7, 1959
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LXIII
Institut Mathématique № 7, 1959

МИРКО СТОЈАКОВИЋ

ПРИМЕНА ХИПЕРМАТРИЦА НА ВИШЕДИМЕНЗИОНАЛНУ ИНТЕРПОЛАЦИЈУ

У радовима [1], [2], [3] изложио сам неколико ставова о посредној и непосредној инверзији матрица Вандермондовог типа. Изложио сам у тим радовима и примену добивених резултата на проблем једнодимензионалне интерполације. У [1] дао сам резиме, у [2] доказе главних резултата а у [3] дао сам неке допуне проширујући своју методу и на друге класе матрица. Овде резултате из тих радова и даље проширујем на нове класе матрица што омогућује и примену на проблем вишедимензионалне интерполације.

1. Нека је

(1) $$V_n=[v_{ij}]=[x_{i-1}^{j-1}]; \quad (i,j=1,2,\ldots,n+1;\ x_\nu^0\equiv 1),$$

Вандермондова матрица величина $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тада је према [1]

$$V_n^{-1}=S_n\,V_n'\,L_n,$$

где је

(2) $$S_n=[s_{ij}]; \quad s_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}\sigma_{n+2-i-j}; & (i+j\leqslant n+2)\\ 0; & (i+j>n+2),\end{cases}$$

а σ_{ik} су елементарне симетричне функције величина $x_0, x_1, \ldots, x_n$;

(3) $$L_n=[l_{ij}]; \quad l_{ij}=\begin{cases}(-1)^j : L_{j,n}(x_{j-1}); & (i=j)\\ 0; & (i\neq j)\end{cases}$$

а $L_{j,n}(x)$ је

(4) $$L_{j,n}(x)=\prod_{\nu=0}^{j-2}(x-x_\nu)\prod_{\nu=j}^{n}(x_\nu-x).$$

Према овим обрасцима, број T_n операција које је потребно извршити да би се добила матрица V_n^{-1} полазећи од познате матрице V_n и познатих величина $x_0, x_1, \ldots, x_n$ састављен је овако:

a) За израчунавање разлика величина x_ν

$$\begin{array}{ccccc}
x_n-x_{n-1}, & x_n-x_{n-2},\ldots, & x_n-x_2, & x_n-x_1, & x_n-x_0\\
& x_{n-1}-x_{n-2},\ldots, & x_{n-1}-x_2, & x_{n-1}-x_1, & x_{n-1}-x_0\\
& & \cdots & \cdots & \cdots\\
& & x_3-x_2, & x_3-x_1, & x_3-x_0\\
& & & x_2-x_1, & x_2-x_0\\
& & & & x_1-x_0
\end{array}$$

потребно је извршити свега $\binom{n+1}{2}$ одузимања.

b) За израчунавање производа разлика из тачке a) треба извршити свега n^2-1 множења. (Извесном рационализацијом поступка може се овај број нешто и смањити али ми на томе не инсистирамо).

c) За израчунавање вредности елементарних симетричних функција величина $x_0, x_1, \ldots, x_n$ потребно је извршити $\binom{n+1}{2}$ сабирања и $\binom{n+1}{2}-1$ множење.

d) За израчунавање производа $S_n V_n'$ потребно је извршити $(n+1)\binom{n+1}{2}$ сабирања и $(n+1)\binom{n}{2}$ множења.

e) За израчунавање производа $(S_n V_n')L_n$ потребно је извршити $(n+1)^2$ дељења.

При овим срачунавањима броја потребних операција узето је у обзир да Вандермондова матрица има један ред јединица а исто тако да се и троугаона матрица S_n састоји делом из нула а делом из јединица, што знатно смањује број потребних множења и сабирања.

Укупно се на овај начин добија

$$T_n=\frac{2n^3+9n^2+7n-2}{2} \tag{5}$$

операција. За $n=1$ (матрице формата 2×2) наш поступак је „лошији“ од уобичајеног поступка који захтева да се елементи адјунговане матрице деле вредношћу детерминанте матрице: по нашем поступку треба 8 операција а по класичном свега 5. За $n=2$ по нашем поступку треба 32 операције а по класичном 35. Што је n веће то је предност нашег поступка изразитија. Шта више наш поступак је по броју операција рационалнији и од других поступака који су разрађени за матрице општег или специјалног типа. Видети например [5], стр. 248–274 и [6].

2. У раду [4] навели смо неке ставове о хиперматрицама. Тим именом називали смо матрице дефинисане на прстену специјално на подскупу комутативних матрица прстена квадратних матрица. Овде ћемо показати како се једна класа те врсте матрица на природан начин појављује у проблему вишедимензионалне интерполације, доказаћемо ставове о инверзији те врсте матрица и искористити ту инверзију за решење проблема вишедимензионалне интерполације.

3. Нека је

$$z=f(x,y)=\sum_{i=0}^{m} x^i\left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\,y^j\right) \tag{6}$$

функција од две променљиве x, y која за

$$x=x_\nu\,; \qquad \nu=0,1,\ldots,m,$$

$$y=y_\mu\,; \qquad \mu=0,1,\ldots,n,$$

има вредности

$$z=z_{\nu\mu}.$$

Тада, за одређивање коефицијената a_{ij} треба решити систем $(m+1)\,(n+1)$ линеарних једначина по непознатима a_{ij} којих такође има $(m+1)\,(n+1)$ на број. Тај систем гласи

$$z_{\nu\mu}=\sum_{i=0}^{m} x_\nu^i\left(\sum_{j=0}^{n}\right) a_{ij}\,y_\mu^j\;; \quad \nu=0,1,\ldots,m;\ \mu=0,1,\ldots,n. \tag{7}$$

Нека је Z вектор-врста чији су елементи $y^k x^l$; $k=0,1,\ldots,m$; $l=0,1,\ldots,n$ сређени лексикографски по растућим вредностима експонената k, l (и где се узима по дефиницији $x^0\equiv y^0\equiv 1$). Нека је A вектор-врста чији су елементи $a_{\nu\mu}$ такође сређени лексикографски по растућим вредностима индекса $\nu\mu$. Нека такође и Z_0 буде вектор-врста чији су елементи $z_{\nu\mu}$ лексикографски сређени по растућим вредностима индекса $\nu\mu$. Нека је најзад $V_{m,n}$ матрица система (7). Њене су врсте једнаке оној вредности вектора Z коју овај узима кад је $x=x_\nu$, $y=y_\mu$ и кад се те вредности лексикографски ређају у матрици $V_{m,n}$. Са овим ознакама тражени полином (6) пише се

$$z=ZA' \tag{8}$$

а систем (7) пише се

$$Z_0'=V_{m,n}\,A'. \tag{9}$$

Из овог задњег је

(10) $$A' = V_{m,n}^{-1} Z_0',$$

а онда (8) постаје

(11) $$z = Z V_{m,n}^{-1} Z_0',$$

па се проблем налажења функције z своди на инверзију матрице $V_{m,n}$.

4. Нека је сад A_n нека матрица формата $n \times n$ дефинисана на телу k скалара $\alpha, \beta, \ldots$. Прстен матрица A_n пресликаћемо изоморфно на подпрстен прстена матрица формата $mn \times mn$ и то на два различита начина.

ДЕФИНИЦИЈА 1. *Нека је*

(12) $$\mathfrak{D}_m A_n \stackrel{def}{=} [\alpha_{ij}]; \quad m = 1, 2, \ldots$$

где је

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \text{нула матрица формата } n \times n \text{ ако је } i \neq j: \\ A_n \quad \text{ако је } i = j; \; i, j, = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Према овој дефиницији матрица $\mathfrak{D}_m A_n$ састоји се од матрица A_n као блокова на главној дијагонали и нула матрица ван главне дијагонале. Оператор $\mathfrak{D}_m$ може се применити и на сам скалар α (као матрицу формата 1×1). $\mathfrak{D}_m \alpha$ је тада једноставно „скаларна матрица" то јест матрица која има елеменат α на главној дијагонали а остали елементи су јој једнаки нули. Познато је да је скуп скаларних матрица изоморфан телу скалара на коме су те матрице дефинисане.

ДЕФИНИЦИЈА 2. *Нека је* $A_n = [\alpha_{ij}]$ *матрица формата* $n \times n$ *дефинисана на* K *и нека је*

(13) $$\mathfrak{M}_m A_n \stackrel{def}{=} [\mathfrak{D}_m \alpha_{ij}]; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; \; m = 1, 2, \ldots$$

Према овој дефиницији матрица $\mathfrak{M}_m A_n$ добија се из матрице A_n кад се у овој најпре сваки елеменат α_{ij} трансформише у скаларну матрицу $\mathfrak{D}_m \alpha_{ij}$ формата $m \times m$ а онда из оваквих матрица састави и сама матрица $\mathfrak{M}_m A_n$.

Лако је видети да су скупови $\{\mathfrak{M}_m A_n\}$, $\{\mathfrak{D}_m A_n\}$, $\{A_n\}$ за утврђени природни број m међусобно изоморфни у односу на операцију сабирања и множења матрица односно сабирања и множења у телу скалара.

ТЕОРЕМА 1.

$$\mathfrak{M}_m (A+B) = \mathfrak{M}_m A + \mathfrak{M}_m B ;$$

(14)
$$\mathfrak{M}_m (AB) = \mathfrak{M}_m A \, \mathfrak{M}_m B ;$$

$$(\mathfrak{M}_m A)^{-1} = \mathfrak{M}_m (A^{-1}) ;$$

$$\mathfrak{M}_m (\mathfrak{M}_p A) = \mathfrak{M}_{mp} A .$$

Потпуно исте операције важе и за оператор $\mathfrak{D}_m$.

Ова теорема следи из поменутих изоморфизама.

Тако, за матрицу

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

имамо

$$\mathfrak{D}_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

а

$$\mathfrak{M}_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

док је

$$\mathfrak{D}_2 (\mathfrak{M}_2 A_2) = \mathfrak{M}_2 (\mathfrak{D}_2 A_2),$$

то јест оператори $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{M}$ су комутативни:

ТЕОРЕМА 2. *Важи увек*

(15)
$$\mathfrak{D}_p (\mathfrak{M}_q A_n) = \mathfrak{M}_q (\mathfrak{D}_p A_n).$$

Нека су сад W_1 и W_2 Вандермондове матрице величина $x_0, x_1, \ldots, x_m$ респективно величина $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

ТЕОРЕМА 3. *Важи увек*

(16)
$$V_{m,n} = \mathfrak{D}_{1+m} W_2 \mathfrak{M}_{1+n} W_1 .$$

Доказ се састоји у верификацији. Ми ћемо верификацију провести на примеру величина x_0, x_1, x_2 и y_0, y_1 то јест кад је $m=2$, $n=1$. То ће уштедети простор а једном утврђени лексикографски поредак величина омогућује да се закључак прошири и на општи случај. У овом случају је

$$V_{2,1}=\begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & x_1^2 y_1 \\ 1 & y_2 & x_1 & x_1 y_2 & x_1^2 & x_1^2 y_2 \\ 1 & y_1 & x_2 & x_2 y_1 & x_2^2 & x_2^2 y_1 \\ 1 & y_2 & x_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & x_2^2 y_2 \\ 1 & y_1 & x_3 & x_3 y_1 & x_3^2 & x_3^2 y_1 \\ 1 & y_2 & x_3 & x_3 y_2 & x_3^2 & x_3^2 y_2 \end{bmatrix},$$

па се лако увиђа да је та матрица производ матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 \end{bmatrix} = \mathfrak{D}_3 W_2, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 & 0 & x_0^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_0 & 0 & x_0^2 \\ 1 & 0 & x_1 & 0 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & x_1^2 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & x_2^2 \end{bmatrix} = \mathfrak{M}_2 W_1,$$

где је

$$W_1=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}, \quad W_2=\begin{bmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{bmatrix}.$$

Сада примењујући релацију инверзије из теореме 1 на израз за матрицу $V_{m,n}$ из теореме 3 добијамо

$$V_{m,n}^{-1}=\mathfrak{M}_{1+n} W_1^{-1} \mathfrak{D}_{1+m} W_2^{-1}, \tag{16'}$$

а онда релација (11) гласи

$$z=Z\left(\mathfrak{M}_{1+n} W_1^{-1} \mathfrak{D}_{1+m} W_2^{-1}\right) Z_0', \tag{17}$$

што и претставља формулу за дводимензионалну интерполацију. У овој формули посебно се врши инверзија Вандермондових матрица W_1 и W_2 и од њих формирају после инверзије хиперматрице $\mathfrak{M}_{1+n} W_1^{-1}$ и $\mathfrak{D}_{1+m} W_2^{-1}$. Треба још истаћи да се интерполациони полином добија у облику сређеном (лексикографски) по степенима променљивих што није случај ни код једне до сада познате формуле за интерполацију.

5. Изложићемо још и случај интерполације полиномима са три променљиве.

Нека је

$$u = f(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{m} x^{\nu} \left(\sum_{\mu=0}^{n} y^{\mu} \left(\sum_{\eta=0}^{p} a_{\nu\mu\eta} z^{\eta} \right) \right), \tag{18}$$

функција од три променљиве x, y, z која за

$$\begin{aligned} x &= x_i\,; & i &= 0, 1, \ldots, m, \\ y &= y_j\,; & j &= 0, 1, \ldots, n, \\ z &= z_k\,; & k &= 0, 1, \ldots, p, \end{aligned} \tag{19}$$

има вредности

$$u = u_{i,k}. \tag{19'}$$

Тада задатак да се одреде коефицијенти $a_{\nu\mu\eta}$ захтева да се реши по непознатим величинама $a_{\nu\mu\eta}$ систем линеарних једначина

$$u_{ijk} = \sum_{\nu=0}^{m} x_i^{\nu} \left(\sum_{\mu=0}^{n} y_j^{\mu} \left(\sum_{\eta=0}^{p} a_{\nu\mu\eta} z_k^{\eta} \right) \right), \tag{20}$$

којих има $(m+1)(n+1)(p+1)$ на број са исто толико непознатих. Матрица тог система нека је $V_{m,n,p}$. Нека је A вектор-врста чији су елементи $a_{\nu\mu\eta}$ сређени лексикографским поретком по индексима $\nu\mu\eta$; исто то нека важи и за вектор врсту U_0 са елементима u_{ijk}. Нека је U вектор-врста чији су елементи $x^{\nu} y^{\mu} z^{\eta}$ сређени лексикографски по растућим вредностима експонената $\nu\mu\eta$ (и где се по дефиницији ставља $x^0 = y^0 = z^0 \equiv 1$).

Са тим ознакама систем (20) пише се овако

$$U_0' = V_{m,n,p} A'. \tag{21}$$

Одавде је

$$A' = V_{m,n,p}^{-1} U_0'. \tag{22}$$

Како се функција u може записати са

$$u = UA' \tag{23}$$

то из претходног следи

$$u = U V_{m,n,p}^{-1} U_0', \tag{24}$$

па се проблем налажења функције u своди на инверзију матрице $V_{m,n,p}$.

ТЕОРЕМА 4. *Важи увек*

$$V_{m,n,p} = (\mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)} W_3)\,(\mathfrak{D}_{m+1}\mathfrak{M}_{p+1} W_2)\,(\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)} W_1),$$

где су W_1, W_2, W_3 *респективно Вандермондове матрице величина* $x_0, x_1, \ldots, x_m;\ y_0, y_1, \ldots, y_n;\ z_0, z_1, \ldots, z_p$.

Доказ опет добијамо верификацијом на специјалном случају при чему једном за увек утврђени лексикографски поредак величина са којима се оперише обезбеђује проширење добивеног закључка и на општи случај. Нека је ради уштеде у простору $m=1$, $n=2$, $p=3$. У овом специјалном случају матрица $V_{1,2,3}$ гласи

$$V_{1,2,3} = \begin{bmatrix} W_3 & y_0 W_3 & y_0^2 W_3 & x_0 W_3 & x_0 y_0 W_3 & x_0 y_0^2 W_3 \\ W_3 & y_1 W_3 & y_1^2 W_3 & x_0 W_3 & x_0 y_1 W_3 & x_0 y_1^2 W_3 \\ W_3 & y_2 W_3 & y_2^2 W_3 & x_0 W_3 & x_0 y_2 W_3 & x_0 y_2^2 W_3 \\ W_3 & y_0 W_3 & y_0^2 W_3 & x_1 W_3 & x_1 y_0 W_3 & x_1 y_0^2 W_3 \\ W_3 & y_1 W_3 & y_1^2 W_3 & x_1 W_3 & x_1 y_1 W_3 & x_1 y_1^2 W_3 \\ W_3 & y_2 W_3 & y_2^2 W_3 & x_1 W_3 & x_1 y_2 W_3 & x_1 y_2^2 W_3 \end{bmatrix}.$$

па се лако увиђа да је она производ матрица

$$\mathfrak{D}_6 W_3,\quad \mathfrak{D}_2 \mathfrak{M}_4 W_2,\quad \mathfrak{M}_{12} W_1$$

одакле следи тврђење у наведеном специјалном случају а и у општем случају јер број величина x_ν, y_μ, z_η не игра у закључивању нарочиту улогу.

Примењујући сада ставове о инверзији производа матрица и ставове о инверзији хиперматрица из теореме 1, можемо за функцију u према (24) писати

$$u = U\,(\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)} W_1^{-1}\, \mathfrak{D}_{m+1}\mathfrak{M}_{p+1} W_2^{-1}\, \mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)}) W_3^{-1})\, U_0', \tag{25}$$

што и претставља формулу за тродимензионалну интерполацију. У овој формули посебно се врши инверзија Вандермондових матрица W_1, W_2, W_3 и посебно од ових формирају хиперматрице $\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)} W_1^{-1}$, $\mathfrak{D}_{m+1} \mathfrak{M}_{p+1} W_2^{-1}$, $\mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)} W_3^{-1}$. Као што се из наведене формуле види, интерполациони полином се добија у облику сређеном (лексикографски) по степенима променљивих.

Сада се лако може уочити правилност у распореду Вандермондових матрица и оператора $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{D}$ у обрасцу (25) и одатле извести закључак о томе како гласи интерполациони образац за општи случај: Производ индекса оператора $\mathfrak{M}, \mathfrak{D}$ и формата Вандермондове матрице на коју се ти оператори примењују у сваком случају је исти. (У (25) то је број $(m+1)(n+1)(p+1)$.) Почиње се најширим могућим оператором $\mathfrak{M}$ па се поступно уводи оператор $\mathfrak{D}$ док на крају не преостане само оператор $\mathfrak{D}$. (У (25) за матрицу W_1^{-1} најшири могући оператор $\mathfrak{M}$ јесте $\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)}$. Прелази се на матрицу W_2^{-1} и оператор $\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)}$ смењује са $\mathfrak{D}_{m+1} \mathfrak{M}_{p+1}$. Најзад прелази се на матрицу W_3^{-1} и оператор $\mathfrak{D}_{m+1} \mathfrak{M}_{p+1}$ смењује са $\mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)}$.) Уосталом, према нашем раду [4] оператор $\mathfrak{D}$ из образаца (11′) и (25) може се и сасвим изоставити а да не дође до двосмислености. Образац (25) тада гласи

$$u = U\,(\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)} W_1^{-1})\,(\mathfrak{M}_{p+1} W_2^{-1})\,(W_3^{-1})\,U_0'. \tag{26}$$

Објаснимо примену овог обрасца неким једноставним примером. Узмимо да је $m=n=p=1$ и да је

x_0	x_1	y_0	y_1	z_0	z_1
1	2	3	4	5	6

u_{000}	u_{001}	u_{010}	u_{011}	u_{100}	u_{101}	u_{110}	u_{111}
1	2	1	1	2	1	1	2

Интерполациони полином тада гласи

$$u = a_{000} + a_{001}\,z + a_{010}\,y + a_{011}\,yz + a_{100}\,x + a_{101}\,xz + a_{110}\,xy + a_{111}\,xyz,$$

а систем линеарних једначина по $a_{\nu\mu\eta}$ гласи

$$\begin{aligned}
a_{000} + 5_{001} + 3a_{010} + 15a_{011} + a_{100} + 5a_{101} + 3a_{110} + 15a_{111} &= 1,\\
a_{000} + 6_{001} + 3a_{010} + 18a_{011} + a_{100} + 6a_{101} + 3a_{110} + 18a_{111} &= 2,\\
a_{000} + 5_{001} + 4a_{010} + 20a_{011} + a_{100} + 5a_{101} + 4a_{110} + 20a_{111} &= 1,\\
a_{000} + 6_{001} + 4a_{010} + 24a_{011} + a_{100} + 6a_{101} + 4a_{110} + 24a_{111} &= 1,\\
a_{000} + 5_{001} + 3a_{010} + 15a_{011} + 2a_{100} + 10a_{101} + 6a_{110} + 30a_{111} &= 2,
\end{aligned}$$

$$a_{000}+6_{001}+3a_{010}+18a_{011}+2a_{100}+12a_{101}+6a_{110}+36a_{111}=1,$$

$$a_{000}+5_{001}+4a_{010}+20a_{011}+2a_{100}+10a_{101}+8a_{110}+40a_{111}=1,$$

$$a_{000}+6_{001}+4a_{010}+24a_{011}+2a_{100}+12a_{101}+8a_{110}+48a_{111}=2.$$

Унутрашњу структуру матрице $V_{1,1,1}$ овог система није лако сагледати; међутим је према теореми (4)

$$V_{1,1,1}=\mathfrak{D}_4\, W_3\, \mathfrak{D}_2\, \mathfrak{M}_2\, W_2\, \mathfrak{M}_1\, W_1,$$

где је

$$W_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix},\quad W_2=\begin{bmatrix}1&3\\1&4\end{bmatrix},\quad W_3=\begin{bmatrix}1&5\\1&6\end{bmatrix}.$$

Како је

$$W_1^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix},\quad W_2^{-1}=\begin{bmatrix}4&-3\\-1&1\end{bmatrix},\quad W_1^{-3}=\begin{bmatrix}6&-5\\-1&1\end{bmatrix},$$

биће

$$V_{1,1,1}^{-1}=\mathfrak{M}_4\, W_1^{-1}\, \mathfrak{D}_2\, \mathfrak{M}_2\, W_2^{-1}\, \mathfrak{D}_4\, W_3^{-1},$$

где је

$$\mathfrak{M}_4\, W_1^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0&0&-1&0&0&0\\0&2&0&0&0&-1&0&0\\0&0&2&0&0&0&-1&0\\0&0&0&2&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&1&0&0\\0&0&-1&0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{D}_4\, W_3^{-1}=\begin{bmatrix}6&-5&0&0&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&6&-5&0&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&6&-5&0&0\\0&0&0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&6&-5\\0&0&0&0&0&0&-1&1\end{bmatrix}.$$

а

$$\mathfrak{D}_2\mathfrak{M}_2 W_2^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

па је стога

$$V_{1,1,1}^{-1} = \begin{bmatrix} 48 & -40 & -36 & 30 & -24 & 20 & 18 & -15 \\ -8 & 8 & 6 & -6 & 4 & -4 & -3 & 3 \\ -12 & 10 & 12 & -10 & 6 & -5 & -6 & 5 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -24 & 20 & 18 & -15 & 24 & -20 & -18 & 15 \\ 4 & -4 & -3 & 3 & -4 & 4 & 3 & -3 \\ 6 & -5 & -6 & 5 & -6 & 5 & 6 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

а како је

$$u = UV_{1\,1,1}^{-1}U_0'; \quad U_0 = [1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2]; \; U = [1, z, y, yz, x, xz, xy, xyz],$$

биће интерполациони полином

$$u = -78 + 15z + 21y - 4yz + 59x - 11xz - 16xy + 3xyz,$$

па је сад лако проверити да он испуњава постављене услове.

На крају приметимо да формула (25) садржи у себи и формулу (17) а ова са своје стране садржи формулу за једнодимензионалну иитерполацију наведену у [1], [2], [3]. Збиља, ако је $p=0$, имаћемо у формули (25)

$$W_3^{-1} \equiv [1], \quad \mathfrak{M}_{(n+1)\,(p+1)}\, W_1^{-1} = \mathfrak{M}_{n+1}\, W_1^{-1},$$

$$\mathfrak{D}_{m+1}\, \mathfrak{M}_{p+1} W_2^{-1} = \mathfrak{D}_{m+1}\, \mathfrak{M}_1 W_2^{-1} = \mathfrak{D}_{m+1} W_2^{-1},$$

$$\mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)}\, W_3^{-1} = \mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)}[1],$$

па се добија формула (17). Ако је сада и $n=0$ имаћемо даље у формули (17)

$$\mathfrak{M}_{n+1} W_1^{-1} = \mathfrak{M}_1 W_1^{-1} = W_1^{-1},$$

$$W_2^{-1} = [1], \quad \mathfrak{D}_{1+m} W_2^{-1} = \mathfrak{D}_{1+m}[1],$$

а то даје раније изведену формулу

$$z = Z W_1^{-1} Z_0'$$

зз интерполацију полиномом са само једном променљивом.

(Саопштено 24 децембра 1958)

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Stojaković — Solution du problème d'inversion d'une classe importante de matrices. *CR Paris* **246** (1958), 1133–1135.

[2] ——— Sur une formule d'interpolation par polynômes. *Годишњак филозофског факултета* Нови Сад, **3** (1958).

[3] ——— О једној формули за интерполацију. *Зборник радова Машинског факултета* Београд (1958).

[4] ——— Quelques remarques sur les hypermatrices. *Publ. Inst. math. Ac. serbe sci.* **11** (1957), 33-42.

[5] K. S. Kunc — Numerical analysis. New York, 1957.

[6] В. Н. Фадеева — Вычислительные методы линейной алгебры. Москва 1950.

SUR UNE FORMULE D'INTERPOLATION PAR POLYNÔMES À PLUSIEURS VARIABLES

M. STOJAKOVIĆ (Beograd)

Dans nos articles [1], [2], [3], nous avons donné la formule d'inversion éxplicite

$$V_n^{-1} = S_n V_n' L_n$$

de la matrice vandermondienne V_n où V_n' est la transposée de V_n, S_n la matrice triangulaire et L_n la matrice diagonale définies ici par (2), (3), (4), ce que nous avons alors appliqué à la déterminantion du polynôme d'intérpolation d'une seule variable.

Nous donnons ici les formules d'inversion des matrices qui corréspondent au problème le plus général d'intérpolation par polynômes à plusieurs variables. Nous donnons ici les définitions et les formules pour le cas de trois variables en laissant au lecteur le soin de faire la généralisation qui est dailleurs très naturelle.

DÉFINITION 1. *Soit*

$$u=f(x, y, z)=\sum_{\nu=0}^{m} x^{\nu}\left(\sum_{\eta=0}^{n} y^{\mu}\left(\sum_{\eta=0}^{p} a_{\nu\mu\eta}\, z^{\eta}\right)\right),$$

le polynôme à trois variables x, y, z *qui pour* $x=x_i,\ y=y_j,\ z=z_k$ *a la la valeur* $u=u_{ijk}$; $i=0, 1, \ldots, m$; $j=0, 1, \ldots, n$; $k=0, 1, \ldots, p$.

Soit A (résp. $U; U_0$) la matrice-ligne dont les elements $a_{\nu\mu\eta}$ (résp. $x^{\nu} y^{\mu} z^{\eta}$; u_{ijk}) sont ordonnés par l'ordre léxicographique des indices $\nu\mu\eta$ (résp. des éxposants $\nu\mu\eta$; résp. des indices ijk).

THÉORÈME 1. *La matrice* $V_{m,n,p}$ *des coefficients du système des équations linéaires algébriqués*

$$u_{ijk}=f(x_i, y_j, z_k); \qquad i=0, 1, \ldots, m;\ j=0, 1, \ldots, n;\ k=0, 1, \ldots, n,$$

ou dans la forme matricielle

$$U_0'=V_{m,n,p}\, A',$$

aux inconnues $a_{\nu\mu\eta}$ *satisfait à la relation*

$$V_{m,n,p}=(\mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)}\, W_3)\,(\mathfrak{D}_{m+1}\,\mathfrak{M}_{p+1}\, W_2)\,(\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)}\, W_1),$$

W_1, W_2, W_3 *étant résp. les matrices vandermondiennes des quantités* $x_0, x_1, \ldots, x_m$; $y_0, y_1, \ldots, y_n$; $z_0, z_1, \ldots, z_p$ *et* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{M}$ *les opérateurs définis par la*

DÉFINITION 2. *Soit* A_n *la matrice quelconque d'ordre* $(n\times n)$ *définie sur le corps* K *de scalaires* $\alpha, \beta, \ldots$. *Alors, posons*

$$\mathfrak{D}_m\, A_n \overset{def}{=} [\beta_{ij}]\ ;\ \beta_{ij}=\begin{cases} \text{matrice zéro si } i\neq j \\ A_n \text{ si } i=j;\ j, i=1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

$$\mathfrak{M}_m\, A_n \overset{def}{=} [\mathfrak{D}_m\, \alpha_{ij}],\ \alpha_{ij} \text{ étant les éléments de } A_n.$$

THÉOREME 2.

$$\mathfrak{M}_m (A+B) = \mathfrak{M}_m A + \mathfrak{M}_m B; \qquad \mathfrak{D}_m (A+B) = \mathfrak{D}_m A + \mathfrak{D}_m B;$$

$$\mathfrak{M}_m (AB) = \mathfrak{M}_m A \, \mathfrak{M}_m B; \qquad \mathfrak{D}_m (AB) = \mathfrak{D}_m A \, \mathfrak{D}_m B;$$

$$(\mathfrak{M}_m A)^{-1} = \mathfrak{M}_m (A^{-1}); \qquad (\mathfrak{D}_m A)^{-1} = \mathfrak{D}_m (A^{-1});$$

$$\mathfrak{M}_m (\mathfrak{M}_p A) = \mathfrak{M}_{mp} A; \qquad \mathfrak{D}_m (\mathfrak{D}_p A) = \mathfrak{D}_{mp} A.$$

THÉORÈME 3.

$$(*) \quad u = U V_{m,n,p}^{-1} U_0' = U \left(\mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)} W_1^{-1} \mathfrak{D}_{m+1} \mathfrak{M}_{p+1} W_2^{-1} \mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)} W_3^{-1}\right) U$$

Pour $p=0$ la formule (*) donne

$$W_3^{-1} = [1]; \quad \mathfrak{M}_{(n+1)(p+1)} W_3^{-1} = \mathfrak{M}_{n+1} W_1^{-1}; \quad \mathfrak{D}_{m+1} \mathfrak{M}_{p+1} W_2^{-1} = \mathfrak{D}_{m+1} W_1^{-1};$$

$$\mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)} W_3^{-1} = \mathfrak{D}_{(m+1)(n+1)}[1] = E \quad \text{(matrice unité)};$$

u ne dépend donc de la variable z et nous obtenons la formule (17) d' interpolation par polynômes à deux varables

$$u = U \left(\mathfrak{M}_{n+1} W_1^{-1} \mathfrak{D}_{m+1} W_2^{-1}\right) U_0'.$$

Si l' on a aussi $n=0$ cette dernière formule donne

$$W_2^{-1} = [1]; \quad \mathfrak{D}_{n+1} W_2^{-1} = \mathfrak{D}_{m+1}[1] = E; \quad \mathfrak{M}_{n+1} W_1^{-1} = \mathfrak{M}_1 W_1^{-1} = W_1^{-1};$$

u ne depend donc que d'une seule variable x et nous obtenons la formule d' interpolation par polynômes à une seule variable x

$$u = U W_1^{-1} U'_0,$$

ce qui été déjà exposé dans [1], [2], [3].