Зборник радова САН LXIII — Математички институт САН књ. 7, 1959
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LXIII
Institut Mathématique № 7, 1959

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О ЈЕДНОМ ТИПУ ЕЛИПТИЧКОГ ИНТЕГРАЛА III ВРСТЕ И О ЊЕГОВИМ ПРИМЕНАМА

Постанак различитих облика нормалних типова елиптичких интеграла био је условљен гледиштима са којих су се посматрали елиптички интеграли или елиптичке функције. Док Legendre, например, иде за тим да интеграл у коме се појављује квадратни корен полинома III или IV степена редукује на најједноставнију форму, Weierstrass-у је стално пред очима веза свих елиптичких функција са σ-функцијом. Jacobi, опет, бира типове који дозвољавају непосредно развијање у редове итд.

Показало се, још, да није оправдано дати извесном типу елиптичког интеграла III врсте неку нарочиту предност, а с тим у вези и неко нарочито функционално обележје, јер су се нашле многе друге равноправне форме; поготово, што се овакви интеграли који садрже три аргумента могу свести на функције које садрже свега два аргумента. Но у великом броју случајева, нарочито у применама, показало се да је ипак оправдано узети неки тип за нормалан, јер се у таквим случајевима радило о много једноставнијим трансформацијама.

При свођењу једног нормалног типа на други јављају се релације које би се могле поделити у две категорије. У једној се веза између два нормална типа интеграла III врсте изражава елементарним функцијама. У другој категорији се у везама појављују и елиптички интеграли ниже врсте. Интеграли прве групе могли би се назвати „сродни“ интеграли. Они друге групе били би „слични“. Тако напр. Jacobi-јев нормални тип

$$\Pi^{J}_{(n,k,\varphi)} = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \Delta(\alpha) \sin^2\theta}{(1-k^2 \sin^2\alpha \sin^2\theta)\, \Delta(\theta)}\, d\theta$$

$$(n = -k^2 \sin^2\alpha, \qquad \Delta(\omega) = \sqrt{1-k^2 \sin^2\omega}$$

и Legendre-ов

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1+n \sin^2\theta)\, \Delta(\theta)}$$

везани су релацијом ([6], стр. 344)

$$\Pi^{J}(n, k, \varphi) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{-n}}\,\{\Pi(n, k, \varphi) - \mathbf{F}(k, \varphi)\},$$

где је $\mathbf{F}(k, \varphi)$ Legendre-ов нормални елиптички интеграл I врсте. Ови су типови слични. Међутим, у проблемима динамике [4] појавио се и Heuman-ов тип

$$\Lambda(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{k'^2 \sin\beta \cos\beta\, \Delta'(\beta)}{k'^2 \cos^2\beta + k^2 \cos^2\theta}\, \frac{d\theta}{\Delta(\theta)}$$

$$\left(k'^2 + k^2 = 1, \quad \Delta'(\omega) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\omega}, \quad n = \frac{k^2}{-1 + k'^2 \sin^2\beta}\right).$$

Овај је са Legendre-овим типом везан релацијом

$$\Lambda(n, k, \varphi) = \sqrt{\frac{(n+k^2)(n+1)}{n}}\,\Pi(n, k, \varphi),$$

као што је то лако увидети. Ови су, дакле, интеграли сродни.

Од сваког новог типа, и поред тога што се он — као такав — непосредно јавља у применама, очекује се да обрасци који важе за такав тип не буду компликованији од аналогних образаца за Legendre-ов тип. Јер би тада, уместо да се директно оперише са таквим типом, било згодније да се он најпре сведе на Legendre-ов, изврше потребне трансформације, а затим да се он врати у свој првобитни облик. Директно операсање изискиваће више рачунања и нови тип имао би само фигуративан значај.

Сродни интеграли испуниће, разумљиво, тражени захтев и они нису од интереса. Ради се само о типовима који су само слични са Legendre-овим. Такви типови имали би, дакле, свој raison d'être ако обрасци за њих имају исту структуру као и они за Legendre-ове, евентуално и простију.

У овом раду указујем на један тип интеграла III врсте који се појављује у проблемима геометрије код испитивања коничних површина: код израчунавања отвора развијеног омотача у раван, код компланације косе кружне купе, у једначинама линије основе конуса развијене у раван итд. То је интеграл

$$Л(n, k, \varphi) = \frac{\operatorname{ctg}\psi}{\Delta'(\psi)} \int_0^{\varphi} \frac{\Delta(\theta)\, d\theta}{1 + \operatorname{ctg}^2\psi \sin^2\theta}, \qquad n = \operatorname{ctg}^2\psi. \tag{1}$$

Показаћу да обрасци који се односе на овај тип ништа нису компликованији од оних за Legendre-ов тип, да су неки, шта више, и простији.

Обзиром на геометриски значај овог интеграла, он би се — аналогно називу „елиптички" — могао назвати „конички" интеграл.

1. Интеграл **Л** је дефинисан, као што се види, за позитивне вредности параметра. Ако се ψ изрази помоћу n, добије се

$$\mathbf{Л}(n,k,\varphi)=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}\int_0^{\varphi}\frac{\Delta(\theta)\,d\theta}{1+n\sin^2\theta}, \tag{2}$$

а овај се израз може дефинисати и за вредности

$$-1\leqslant n<-k^2.$$

Ако се подинтегрална функција напише у облику

$$\frac{n+k^2}{n(1+n\sin^2\theta)\Delta(\theta)}-\frac{k^2}{n\Delta(\theta)},$$

израз за **Л** добиће облик

$$\mathbf{Л}(n,k,\varphi)=\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\,\mathbf{\Pi}(n,k,\varphi)-k^2\sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}}\,\mathbf{F}(k,\varphi) \tag{3}$$

Види се да су **Л** и **П** слични интеграли.

Образац за збир два интеграла III врсте са истим модулом и аплитудом, а са различитим параметрима ([2], стр. 237)

$$\mathbf{\Pi}(n,k,\varphi)+\mathbf{\Pi}\left(\frac{k^2}{n},k,\varphi\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta(\varphi)}\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\right\}+\mathbf{F}(k,\varphi) \tag{4}$$

када се место ових интеграла унесу вредности изражене помоћу функције **Л**, добива облик

$$\mathbf{Л}(n,k,\varphi)+\mathbf{Л}\left(\frac{k^2}{n},k,\varphi\right)=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\Delta(\varphi)}\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\right\}+k'^2\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\mathbf{F}(k,\varphi) \tag{4*}$$

За $n=\pm k$ следи

$$2\,Л\,(\pm k, k, \varphi)=\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(1\pm k)\operatorname{tg}\varphi}{\Delta(\varphi)}\right]+(1\mp k)\,F\,(k,\varphi).$$

На исти начин, образац помоћу кога се интеграл са позитивним параметром изражава помоћу интеграла коме се параметар налази између -1 и $-k^2$ ([2], стр. 240)

$$\Pi(n,k,\varphi)=\frac{n\,k'^2}{(n+1)(n+k^2)}\,\Pi\left(-\frac{n+k^2}{n+1},k,\varphi\right)+\frac{k^2}{n+k^2}\,F\,(k,\varphi)+$$

$$+\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}\sqrt{\frac{n(n+k^2)}{n+1}}\right\}$$

добива облик

$$Л\,(n,k,\varphi)=Л\left(-\frac{n+k^2}{n+1},k,\varphi\right)+k^2\sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}}\,F\,(k,\varphi)+$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}\sqrt{\frac{n(n+k^2)}{n+1}}\right\}.$$

Адициона теорема за елиптичке интеграле III врсте ([1], стр. 13)

$$\Pi\,(n,k,\varphi)+\Pi\,(n,k,\psi)=\Pi\,(n,k,\sigma)+$$

$$+\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\sqrt{n(n+1)(n+k^2)}}{1+n\sin^2\sigma-n\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\,\Delta(\sigma)}\right\},\tag{5}$$

која важи за $n>0$ или $-1<n<-k^2$ уз услов

$$\cos\sigma=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma),\tag{6}$$

добива облик

$$Л\,(n,k,\varphi)+Л\,(n,k,\psi)+k^2\sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}}\,[F\,(k,\varphi)+F\,(k,\psi)-F\,(k,\sigma)]=$$

$$=Л\,(n,k,\sigma)+\operatorname{arc\,tg}\omega,\tag{5*}$$

где је ω израз у великој загради једначине (5). Како уз услов (6) важи још

$$F\,(k,\varphi)+F\,(k,\psi)=F\,(k,\sigma),$$

то адициона теорема за функцију **Л** добива облик

$$\mathbf{Л}(n, k, \varphi) + \mathbf{Л}(n, k, \psi) = \tag{7}$$
$$= \mathbf{Л}(n, k, \sigma) + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\varphi \sin\psi \sin\sigma \sqrt{n(n+1)(n+k^2)}}{n+1-n\cos\varphi\cos\psi\cos\sigma},$$

уз услов

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma).$$

Овај образац је простији од обрасца (5).

За $\varphi = \psi$, $\sigma = \pi/2$, услов (6) се своди на

$$\operatorname{ctg}^2\varphi = k', \tag{8}$$

док из обрасца (7) следи

$$\mathbf{Л}(n, k, \varphi) = \frac{1}{2}\mathbf{Л}_0 + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{1+k'}\sqrt{\frac{n(n+k^2)}{n+1}}\right]. \tag{9}$$

кадгод важи (8). Овде је са $\mathbf{Л}_0$ обележен интеграл

$$\mathbf{Л}_0 = \mathbf{Л}\left(n, k, \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\Delta(\theta)\,d\theta}{1+n\sin^2\theta} \tag{10}$$

и он договара потпуном интегралу **Л**.

Познато је да се потпуни интеграл **П** треће врсте може изразити помоћу интеграла I и II врсте. Legendre ([5,] t. I, стр, 133) је, наиме, показао да је

$$\sin\psi\cos\psi\,\Delta'(\psi)\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{\Delta(\theta)} =$$
$$= \frac{\pi}{2} - [\mathbf{FE}(k', \psi) + \mathbf{EF}(k', \psi) - \mathbf{FF}(k', \psi)] =$$
$$= k'^2 \sin\psi\cos\psi\,\Delta'(\psi)\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{1+(-1+k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}\,\frac{d\theta}{\Delta(\theta)}$$

где је $\mathbf{E}(\varkappa, \psi)$ Legendre-ов нормални елиптични интеграл II врсте модула $\varkappa$ и где су са **F** и **E** означени потпуни нормални елиптични интеграли I и II врсте (модуо k). Ако се први разломци подинтегралних функција напишу у облику

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\psi\cos^2\psi}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\psi\sin^2\theta}-\frac{1}{\cos^2\psi},$$

$$\frac{\sin^2\theta}{1+(-1+k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}=\frac{1}{-1+k'^2\sin^2\psi}\left[1-\frac{1}{1+(-1+k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}\right],$$

тада следи

$$\Pi_0(\operatorname{ctg}^2\psi)=$$

$$=\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta'(\psi)}\left\{\frac{\pi}{2}+\mathrm{F}\operatorname{tg}\psi\Delta'(\psi)-[\mathrm{FE}(k',\psi)+\mathrm{EF}(k',\psi)-\mathrm{FF}(k',\psi)]\right\} \tag{11}$$

и

$$\Pi_0(-1+k'^2\sin^2\psi)=$$

$$=\frac{\Delta'(\psi)}{k'^2\sin\psi\cos\psi}\left\{\frac{\pi}{2}+[\mathrm{FE}(k',\psi)+\mathrm{EF}(k',\psi)-\mathrm{FF}(k',\psi)]\right\}+\mathrm{F}, \tag{12}$$

где је са Π_0 означен потпуни интеграл од Π за параметар $\operatorname{ctg}^2\psi$ или $-1+k'^2\sin^2\psi$. Прва од ових једначина важи за позитивне параметре, друга за оне између -1 и $-k^2$.

Потпуни интеграл $Л_0$ се много простије изражава помоћу елиптичних интеграла I и II врсте него интеграл Π_0. Јер, ако се у једначини (11) стави $\operatorname{ctg}^2\psi=k^2/n$ добиће се

$$\Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}+\frac{n\mathrm{F}}{n+k^2}-\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,J,$$

где је са J обележен израз у средњој загради од (11). Примењујући образац (4) из којега за $\varphi=\pi/2$ следи

$$\Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}+\mathrm{F}-\Pi_0(n)$$

и изразивши, на основи (3), интеграл $\Pi_0(n)$ помоћу $Л_0$ $(\varphi=\pi/2)$, тај израз за $Л_0$ добива следећи једноставан облик

$$Л_0(n)=\mathrm{F}\,\mathrm{E}(k',\psi)+\mathrm{EF}(k',\psi)-\mathrm{F}\,\mathrm{F}(k',\psi) \tag{13}$$

$$n>0,\ \operatorname{tg}\psi=\sqrt{n}/k.$$

(Одавде за $\psi=\pi/2$ следи Legendre-ова релација $FE'+EF'-FF'=$ $=\pi/2$, па је

$$\lim_{n\to\infty} Л_0(n)=\pi/2).$$

Примењујући исти поступак на једначину (12), из ове следи $(-1+k'^2\sin^2\psi=k^2/n)$ најпре,

$$\Pi_0(n)=\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,J, \tag{14}$$

а затим

$$Л_0(n)=[\mathbf{F}\mathbf{E}(k',\psi)+\mathbf{E}\mathbf{F}(k',\psi)-\mathbf{F}\mathbf{F}(k',\psi)]-\mathbf{F}\,k^2\sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}},$$

$$-1\leqslant n<-k^2, \qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{1}{k}\sqrt{-\frac{n+k^2}{n+1}}.$$

Интересантно је напоменути да за $-1\leqslant n\leqslant -k^2$ Heuman-ов потпун интеграл $\Lambda(n,k,\pi/2)$ води на израз J, што се лако увиђа ако се у (12) унесе вредност Λ. Дакле,

$$\Lambda(n,k,\pi/1)=\mathbf{F}\,\mathbf{E}(k',\psi)+\mathbf{E}\mathbf{F}(k',\psi)-\mathbf{F}\mathbf{F}(k',\psi).$$

Извод функције Π по модулу k има облик [1 стр. 283]

$$\frac{\partial\Pi(n,k,\varphi)}{\partial k}=-\frac{k}{n+k^2}\left\{\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\Delta(\varphi)}-\frac{1}{k'^2}\mathbf{E}(k,\varphi)+\Pi(n,k,\varphi)\right\}. \tag{15}$$

Извод функције Л по модулу k имаће много простији облик

$$\frac{\partial Л(n,k,\varphi)}{\partial k}=-k\sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+k^2)^3}}\,\mathbf{F}(k,\varphi), \tag{16}$$

као што је то лако увидети.

Такође је то случај са изводом функције Π по параметру n ([1], стр. 286)

$$\frac{\partial\Pi(n,k\varphi)}{\partial n}=\frac{1}{2n(n+1)(n+k^2)}$$

$$\left\{\frac{n^2\sin\varphi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1+n\sin^2\varphi}-(n+k^2)\mathbf{F}(k,\varphi)+n\,\mathbf{E}(k,\varphi)-(n^2-k^2)\,\Pi(n,k,\varphi)\right\}. \tag{17}$$

Ако се, сада, Л изрази помоћу П на основи једначине (3), то на основи (17) следи простији облик

$$\frac{\partial \text{Л}(n, k, \varphi)}{\partial n} = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n(n+1)(n+k^2)}} \left\{ \frac{n \sin\varphi \cos\varphi \, \Delta(\varphi)}{1 + n \sin^2\varphi} - \frac{n k'^2}{n+k^2} \mathbf{F}(k, \varphi) + \mathbf{E}(k, \varphi) \right\}.$$

Предност образаца (16) и (18) над (15) и (17) је и у томе што се у првим обрасцима уопште не појављује елиптички интеграл III врсте П (n, k, φ) односно функција Л (n, k, φ).

2. Указаћу, сада, на случајеве где се интеграл Л непосредно појављује.

У једном свом ранијем раду [3,a] показао сам да крива линија основе омотача косог кружног конуса развијеног у раван има једначину

$$\theta(\rho) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\, \Pi(n, k, \varphi) - k^2 \sqrt{\frac{n+1}{n(n+k^2)}}\, \mathbf{F}(k, \varphi),$$

$$n = \frac{(s_1 - s_2)^2}{4 s_1 s_2}, \quad k = \sin\frac{\beta - \gamma}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2}\,\frac{s_1 s_2 - \rho^2}{s_1 s_2 + \rho^2},$$

где је θ величина отвора мреже купе који одговара величини ρ. Овде су s_1 и s_2 највећа и најмања изводница, ρ макоја изводница, β и γ наспрамни углови странама s_1 и s_2 у карактеристичном троуглу. Пол координатног система је у темену купе, а поларна оса је изводница s_2.

Ако се горњи интеграли скупе, једначина поменуте линије биће

$$\theta(\rho) = \text{Л}(n, k, \varphi).$$

Величина θ може се изразити у функцији угла ω кога гради полупречник основе одговарајући изводници ρ са основом карактеристичног троугла (полазећи од s_2). Тада између елемената конуса постоје везе

$$s_1^2 = s^2 + r^2 + 2rs\cos\alpha, \qquad s_2^2 = s^2 + r^2 - 2rs\cos\alpha,$$

$$\rho^2 = s^2 + r^2 - 2rs\cos\psi, \qquad \cos\psi = \cos\alpha\cos\omega.$$

Величина s претставља основу конуса, r полупречник основе, α угао осовине према основи, а ψ угао између изводнице ρ и полупречника основе одговарајућег тој изводници. После краћег рачуна следи

$$\theta(\omega) = \text{Л}(n, k, \varphi), \tag{19}$$

$$n = \frac{(s_1 - s_2)^2}{4 s_1 s_2}, \qquad k = \sin\frac{\beta - \gamma}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Одавде се одмах види геометриско значење потпуног интеграла $\text{Л}_0(n)$. Наиме, за $\omega = \pi$ добива се, услед симетрије, половина отвора мреже. Тада је и $\varphi = \pi$. Како је интеграл Л узет у границама $(0, \pi)$ једнак двострукој вредности интеграла узетог у границама $(0, \pi/2)$, то следи да:

Потпуни интеграл Л_0 претставља четвртину отвора омотача развијеног у раван.

На основи (13), овај се резултат слаже са резултатом једног мог ранијег рада [3,b] у коме сам показао да је отвор омотача развијеног у раван

$$\theta = 4\,[\mathbf{FE}(k', \psi) + \mathbf{EF}(k', \psi) - \mathbf{FF}(k', \psi)], \qquad \psi = \arcsin\frac{2r}{s_1 + s_2},$$

Од интереса је напоменути још, да омотач косе кружне купе има површину [5, c)]

$$M = r^2\pi + 2r\sqrt{s_1 s_2}\,\mathbf{E} - 2r^2\,\text{Л}_0(n),$$

где је

$$n = \operatorname{ctg}^2\psi = \frac{(s_1 - s_2)^2}{4 s_1 s_2}, \qquad k = \sin\frac{\beta - \gamma}{2}.$$

3. Интеграл Л појављује се и у једначини линије основе омотача усправне елиптичке купе развијеног у раван. Узећемо за пол теме купе, а за поларну осу најмању изводницу. Макоја изводница на купи, вектор $\mathfrak{r}$, имаће координате у правцима осовина елипсе $2a$ и $2b$ и у правцу висине H

$$\mathfrak{r}(a \sin\varphi,\ b\cos\varphi,\ -H),$$

где је φ комплеменат ексцентричне аномалије елипсе. Елеменат $d\theta$ отвора омотача развијеног у раван имаће, по Wunderlich-у [7], вредност

$$d\theta = \frac{\sqrt{[\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}]^2}}{\mathfrak{r}^2} = \frac{\sqrt{a^2 H^2 \cos^2\varphi + b^2 H^2 \sin^2\varphi + a^2 b^2}}{a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + H^2}$$

или

$$d\theta = \frac{a}{s_2} \frac{\sqrt{1 - \frac{H^2 \varepsilon^2}{s_1^2} \sin^2 \varphi}}{1 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{s_2^2} \sin^2 \varphi}$$

где су $s_1 = \sqrt{a^2 + H^2}$ и $s_2 = \sqrt{b^2 + H^2}$ највећа и најмања изводница, а ε нумерички ексцентрицитет елипсе. Стављајући

$$0 \leqslant \frac{H\varepsilon}{s_2} = k < 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{a^2 \varepsilon^2}{s_2^2} = n > 0$$

види се да је

$$\theta = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 + n \sin^2 \varphi} \, d\varphi .$$

Како је још ($r^2 = \rho^2$)

$$\rho^2 = H^2 + a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi \qquad \text{тј.} \qquad \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\rho^2 - s_2^2}{s_1^2 - \rho^2},$$

то је једначина тражене линије

$$\theta(\rho) = \text{Л}(n, k, \varphi), \qquad n = \frac{a^2 \varepsilon^2}{s_2^2}, \qquad k = \frac{H\varepsilon}{s_2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\rho^2 - s_2^2}{s_1^2 - \rho^2}}. \qquad (20)$$

За $\rho = s_1$ је једна вредност $\varphi = \pi/2$, па се, услед симетрије купе, види да потпуни интеграл Л_0 и овде претставља четвртину отвора мреже.

Из једначине криве линије могу се прочитати неке особине криве. Тако напр. за одређивање конвексности потребно је испитати израз

$$J = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'',$$

где је

$$\rho' = \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^{-1} \qquad \rho'' = -\frac{d^2\theta}{d\rho^2} \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^{-3}.$$

Ако се величина $d\theta$ изрази у функцији од ρ, лако следи да је

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{s_1^2 s_2^2 - H^2 \rho^2}{(s_1^2 - \rho^2)(\rho^2 - s_2^2)}},$$

па је

$$\rho' = \rho \sqrt{\frac{(s_1^2-\rho^2)(\rho^2-s_2^2)}{s_1^2 s_2^2-H^2\rho^2}},$$

$$\rho'' = \rho \frac{2 s_1^2 s_2^2 (s_1^2+s_2^2)\rho^2-(H^2 s_1^2+H^2 s_2^2+3 s_1^2 s_2^2)\rho^4-s_1^4 s_2^4+2H^2\rho^6}{(s_1^2 s_2^2-H^2\rho^2)^2}$$

и

$$J = \frac{a^2 b^2 \rho^6}{(s_1^2 s_2^2-H^2\rho^2)^2} > 0 .$$

Види се да је крива стално конкавна према полу и да нема превојних тачака.

Координате центра кривине (ρ_0, θ_0) добивају се из једначина

$$\rho_0 \cos(\theta_0-\theta) = \frac{(\rho'^2-\rho\rho'')\rho}{J} =$$

$$= -\frac{1}{a^2 b^2 \rho}[H^2\rho^4-2\rho^2 s_1^2 s_2^2+s_1^2 s_2^2(s_1^2+s_2^2-H^2)], \tag{21}$$

$$\rho_0 \sin(\theta_0-\theta) = \frac{(\rho^2+\rho'^2)\rho'}{J} =$$

$$= \frac{s_1^2+s_2^2-H^2-\rho^2}{a^2 b^2 \rho} \sqrt{(s_1^2-\rho^2)(\rho^2-s_2^2)(s_1^2 s_2^2-H^2\rho^2)} \cdot \tag{22}$$

Из друге једначине види се да је за вредности

$$\rho = \sqrt{s_1^2+s_2^2-H^2}, \qquad \rho = s_1, \qquad \rho = s_2, \qquad \rho = \frac{s_1 s_2}{H}$$

величина $\theta_0 = \theta$ и центри кривине леже на самим наведеним изводницама ρ. Како на купи не постоји прва и четврта изводница, то у обзир долазе само изводнице $\rho = s_1$ и $\rho = s_2$. За ове вредности је $\cos(\theta_0-\theta) = 1$, па је

$$\rho_{s_1} = s_1 \varepsilon^2, \qquad \rho_{s_2} = \frac{s_2 a^2 \varepsilon^2}{b^2} .$$

Полупречник кривине је

$$R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{J} = \frac{1}{a^2 b^2}(s_1^2+s_2^2-H^2-\rho^2)^{3/2}\sqrt{s_1^2 s_2^2-H^2\rho^2}$$

и његови екстреми постојали би за $\rho=0$, $\rho=\sqrt{s_1^2+s_2^2-H^2}$, $\rho=\frac{s_1 s_2}{H}$ и $\rho=\sqrt{\frac{s_1^2 s_2^2}{H^2}-\frac{a^2 b^2}{4H^2}}$. Прве три изводнице не постоје на купи, а такође ни четврта, јер би услед $s_1>\frac{a}{2}$, тј. $4s_1^2(s_2^2-H^2)>a^2 b^2$, следило $\frac{s_1^2 s_2^2}{H^2}-\frac{a^2 b^2}{4H^2}>s_1^2$. Према томе, развијена крива нема темена. Полупречници кривине за $\rho=s_1$ и $\rho=s_2$ јесу

$$R_{s_1}=\frac{b^2}{a^2}s_1, \qquad R_{s_2}=\frac{a^2}{b^2}s_2.$$

Из изложеног следи да се могу конструисати они оскулаторни кругови који одговарају изводницама s_1 и s_2.

Користећи образац (9) могу се одредити још две тачке у којима се могу положити оскулаторни кругови. До њих се долази на следећи начин. Из (9) следи

$$Л(n, k, \varphi)=\frac{1}{2}(Л_0+\omega),$$

где је

$$\omega=\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{1+k'}\sqrt{\frac{n(n+k^2)}{n+1}}\right]=\operatorname{arc\,tg}\frac{a s_2-b s_1}{H^2}. \tag{23}$$

Ако се са α и β означе углови између висине и изводнице s_1 односно s_2, тада је

$$\frac{a s_2-b s_1}{H^2}=\frac{H s_2 \operatorname{tg}\alpha-H s_1 \operatorname{tg}\beta}{H^2}=\frac{s_2\operatorname{tg}\alpha-s_1\operatorname{tg}\beta}{H}$$

и величина $\operatorname{arc\,tg}\frac{a s_2-b s_1}{H^2}$ се може конструисати, па према томе и величина $\delta={}^1/_2(Л_0+\omega)$. Надаље, изводница која одговара углу δ добива се, на основу (8), из

$$\varphi=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{k'}=\operatorname{arc\,ctg}=\sqrt{\frac{s_1^2-\rho^2}{\rho^2-s_2^2}},$$

дакле

$$\frac{s_1^2-\rho^2}{\rho^2-s_2^2}=k'=\frac{b s_1}{a s_2}.$$

одакле је

$$\rho^2 = \frac{as_1 + bs_2}{as_2 + bs_1} s_1 s_2.$$

Како је још

$$\frac{as_1 + bs_2}{as_2 + bs_1} = \frac{(as_1 + bs_2)(as_2 - bs_1)}{a^2 s_2^2 - b^2 s_1^2} = \frac{s_1 s_2 - ab}{H^2},$$

то је

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{s_1 s_2}\sqrt{(\sqrt{s_1 s_2})^2 - (\sqrt{ab})^2}}{H},$$

па се величина ρ_1 конструише као четврта пропорционала из последње три величине. Центар кривине за ову изводницу добива се на основи (21), (22) и (23), те после краћег рачуна следи

$$\rho_0 \cos(\theta_0 - \theta) = 0, \qquad \rho_0 \sin(\theta_0 - \theta) = \rho_1 \operatorname{tg} \omega,$$

и координате центра кривине су $(\rho_1 \operatorname{tg} \omega, \ \pi/2 + \theta)$. Најпосле, полупречник кривине за ту изводницу је $R_1 = \rho_1/\cos\omega$. Као што се види, ове величине могу се конструисати ако се зна отвор развијеног омотача.

(Саопштено 25 јуна 1958)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Byrd, P. and Friedman, M. — Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.

[2] Enneper, A. — Elliptische Functionen. Halle. a. s. 1890.

[3] Fempl, S. — a) О једној кривој на развијеном омотачу косог кружног конуса. *Глас Српске академије наука*, Одељење природно-математичких наука, 13 (1957), 83—98.

b) Отвор омотача косе кружне купе. *Гласник математичко-физички и астрономски.* 1 (1952), 30—35.

c) О једној линеарној комбинацији нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. *Зборник радова Мат. инст. САН.* 5 (1956), 61—116.

[4] Heuman, C. — a) Bidrag till teorien för sferiska pendeln. *Skrifter utgivna av Tekniska Högskolan.* Stokholm 1918.

b) Bidrag till teorien för pendel gyroskopet. *Skrifter utgivna av Tekniska Högskolan.* Stockholm 1927.

c) Tables of complete Elliptic integrals. *Journal of Mathematics and Physics* XX (1941), 127—206.

[5] Legendre, A. M. — Traité des fonctions elliptiques et intégrales Euleriennes. Paris 1825.

[6] Schlömilch O. — Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis. Braunschweig 1879.

[7] Wunderlich W. — Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung. *Österreichisches Ingenieur-Archiv* X (1956), 107—114.

UN TYPE D'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE TROISIÈME ESPÈCE ET SES APPLICATIONS

S. FEMPL (Beograd)

Le but de cet article est d'étudier un type d'intégrale elliptique de troisième espèce (1) resp. (2) qui se rattache aux problèmes de géométrie [3]. Cette intégrale est désignée par $Л(n, k, \varphi)$ et admet, contrairement au type normal de Legendre, une signification géométrique concrète. L'expression $Л(n, k, \varphi)$ représente une partie d'ouverture de la surface développée d'un cône elliptique droit (du cône circulaire oblique), donc l'intégrale complète $(\theta \in [0, \pi/2])$ représente le quart d'ouverture. Par analogie à l'expression „intégrale elliptique", l'auteur dénomme l'intégrale (1) „intégrale cônique".

Dans cet article on démontre pour la fonction $Л$ les formules correspondant a celles du type de Legendre. Ainsi, par exemple, la formule (4*) exprime la somme de deux intégrales avec le même module $(0 \leqslant k \leqslant 1)$ et de même amplitudes φ, mais avec les paramètres différents; la formule (5*) représente le théorème d'addition; la formule (13) représente l'équation de transformation à l'aide de laquelle l'intégrale complète $Л_0$ s'exprime par les intégrales elliptiques normales de première et seconde espèces, enfin les formules différentielles (16) et (18).

On en conclut que la plupart de ces formules relatives à la fonction $Л$ possèdent une structure plus simple que les formules correspondantes de Legendre.

Les équations des lignes de la base du cône elliptique droit et du cône circulaire oblique, développées dans le plan, sont données sous la forme

$$\theta = Л(n, k, \varphi)$$

les grandeurs n, k, φ ayant une signification différente pour le cône elliptique et circulaire.

On donne enfin quelques constatations géométriques de la fonction $Л$.