Зборник радова САН LXIII — Математички институт САН књ. 7, 1959
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LXIII
Institut Mathématique № 7, 1959

ДАНИЛО РАШКОВИЋ

НЕКЕ ОСОБИНЕ СКАЛАРА ЈЕДНЕ СПЕЦИЈАЛНЕ ЈАКОБИЈЕВЕ МАТРИЦЕ

1. СКАЛАРИ СПЕЦИЈАЛНЕ ЈАКОБИЈЕВЕ МАТРИЦЕ. — Посматрајмо нормалну Јакобијеву матрицу $\mathbf{J}=(a_{ik})_1^n$ са три дијагонална реда чији су елементи $a_{ik}=0$ када је $|i-k|>1$ ([1], стр. 82). Нека је ова матрица квадратна, симетрична са специјалним вредностима њених елемената, $a_{ii}=2i-1$, $a_{i,i+1}=a_{i+1,i}=-i$, тј. облика

$$\mathbf{J}=\left\|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 3 & -2 & & & \\ 0 & -2 & 5 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 2n-5 & -(n-2) & 0 \\ & & & -(n-2) & 2n-3 & -(n-1) \\ & & & 0 & -(n-1) & 2n-1 \end{array}\right\|. \tag{1}$$

Њен први скалара (траг) претставља збир елемената са главне дијагонале матричне схеме

$$S_1^{(n)}=1+3+\cdots+(2n-3)+(2\nu-1)=\sum_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)=n^2=\binom{n}{1}^2; \tag{2}$$

дакле, он претставља збир целих позитивних непарних бројева.

Из релације

$$S_1^{(n)}=S_1^{(n-1)}+(2n-1)$$

следи да је прва разлика скалара $\Delta^1=2n-1$; друга је константа и износи $\Delta^2=2$, док је трећа једнака нули.

Други скалар (збир главних минора другог реда детерминанте матрице) износи

$$\begin{aligned} S_2^{(n)} &= 1\,[3+5+\cdots+(2n-1)]-1^2+ \\ &+3\,[5+7+\cdots+(2n-1)]-2^2+ \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+(2n-3)\,(2n-1)-(n-1)^2, \end{aligned}$$

па се, с обзиром на (2), може написати и у овом облику:

$$S_2^{(n)}=\sum_{\nu=1}^{n-1}(2\nu-1)\,(n^2-\nu^2)-\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2=n^2\,(n-1)^2-2\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^3.$$

Како су збирови ([2], стр. 262, 266)

$$\sum_1^n \nu^3=\binom{n+1}{2}^2,\quad \sum_1^{n-1}\nu^3=\binom{n}{2}^2,$$

следи да је други скалар матрице одређен изразом

$$S_2^{(n)}=4\binom{n}{2}^2-2\binom{n}{2}^2=2\binom{n}{2}^2=2!\binom{n}{2}^2. \qquad (3)$$

Лако се одређује и последњи скалар $S_n^{(n)}$. Он претставља детерминанту ове матрице. Додавањем елемената прве врсте ове детерминанте елементима друге врсте, па овако добивене елементе друге врсте додамо елементима треће врсте и тако редом добићемо детерминанту

$$S_n^{(n)}=|\mathbf{J}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdot & & & \\ 0 & 2 & -2 & \cdot & & & \\ 0 & 0 & 3 & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & n-2 & -(n-2) & 0 \\ & & & \cdot & 0 & n-1 & -(n-1) \\ & & & \cdot & 0 & 0 & n \end{vmatrix}=n! \qquad (4)$$

чија је вредност, као што је познато, једнака производу елемената са главне дијагонале, тј. $n!$, где је n ред матрице.

Може се показати да се скалари $S_r^{(n)}$ могу израчунавати помоћу обрасца

$$S_r^{(n)}=r!\binom{n}{r}^2=\binom{n}{r}\frac{n!}{(n-r)!}=\binom{n}{r}^2 S_r^{(r)};\qquad r=0,1,\ldots,n, \tag{5}$$

што показује да се не морају ни одређивати главни минори детерминанте ове матрице.

Три узастопна скалара различитог реда везана су следећом рекурентном формулом

$$S_r^{(n)}=S_r^{(n-1)}+(2n-1)\,S_{r-1}^{(n-1)}-(n-1)^2\,S_{r-2}^{(n-2)},\qquad S_0^{(n)}=1 \tag{6}$$

из које следи и овај однос

$$S_r^{(n+1)}=\left(\frac{n+1}{n+1-r}\right)^2 S_r^{(n)}. \tag{7}$$

Скалари истог реда а различитог реда матрице $\mathbf{J}$ образују низове бројева сталних разлика

$$\Delta^{2r}=\frac{(2r)!}{r!}=r!\binom{2r}{r}=\frac{\Gamma(2r+1)}{\Gamma(r+1)}=\frac{2\Gamma(2r)}{\Gamma(r)}=\prod_{\nu=1}^{r}(r+\nu);\qquad \Delta^{2r+1}=0 \tag{8}$$

како је показано у таблици I.

Таблица I

n	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}
1	1	1									
2	1	4	2								
3	1	9	18	6							
4	1	16	72	96	24						
5	1	25	200	600	600	120					
6	1	36	450	2400	5400	4320	720				
7	1	49	882	7350	29400	52920	35280	5040			
8	1	64	1568	18816	117600	376320	564480	322560	40320		
9	1	81	2592	42336	381024	1905120	5080320	6531840	3265920	362880	
10	1	100	4050	86400	1058400	7620480	31752000	72576000	81648000	36288000	3628800
Δ	$\Delta^1=0$	$\Delta^2=2$	$\Delta^4=12$	$\Delta^6=120$							

Интересантно је уочити да су скалари $S_r^{(n)}$ апсолутне вредности коефицијената основног Laguerre-овог полинома ([3], стр. 428—437 и [4], стр. 93)

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})=|\mathbf{J}-x\mathbf{I}| \tag{9}$$

па се исти ([5], стр. 96) може дефинисати као карактеристични полином горње специјалне симетричне неосцилационе Јакобијеве матрице, [6].

Како је ([7], стр. 51)

$$\binom{n}{r}=\sum_{\nu=1}^{n+1-r}\binom{n-\nu}{r-1}$$

то је

$$\binom{n}{r}^2=\sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}\binom{r+\nu}{\nu}\binom{n}{r+\nu}=\sum_{\nu=0}^{r}\binom{2\nu}{\nu}\binom{r+\nu}{2\nu}\binom{n}{r+\nu}$$

па, помоћу (5), следи релација

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}S_r^{(n)}&=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2=\sum_{r=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}\binom{r+\nu}{\nu}\binom{n}{r+\nu}=\binom{2n}{n}=\\&=\frac{2^n}{n!}\prod_{\nu=1}^{n}(2\nu-1)=\frac{1}{n!}\prod_{\nu=1}^{n}(n+\nu).\end{aligned}\tag{10}$$

2. ФОРМУЛЕ ЗА ЗБИРОВЕ КОМБИНАЦИЈА. — Помоћу скалара горње Јакобијеве специјалне матрице могу се одредити интересантне формуле за збирове комбинација целих позитивних непарних бројева.

Први скалар $S_1^{(n)}$ једнак је уједно и збиру комбинацнја прве класе без понављања n целих позитивних бројева

$$\sum C_1^n(2\nu-1)=S_1^{(n)}=n^2=\binom{n}{1}^2. \tag{11}$$

Између другог скалара и збира комбинација без понављања друге класе ових бројева постоји однос,

$$S_2^{(n)}=\sum C_2^n-\sum_1^n\nu^2=2!\binom{n}{2}^2,$$

па се, с обзиром на (3), добива

$$\sum C_2^n=2\binom{n}{2}^2+2\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=\binom{n}{2}\frac{3n^2-n-1}{3}, \tag{12}$$

јер су познате релације

$$\sum_1^n\nu^2=\binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3},\quad \sum_1^{n-1}\nu^2=\binom{n}{2}\frac{2n-1}{3}=2\binom{n}{3}+\binom{n}{2}.$$

Даље се добива однос између трећег скалара и збира комбинација треће класе

$$S_3^{(n)} = \sum C_3^n - 1^2[5+7+\cdots+(2n-1)] - 2^2[1+7+\cdots+(n-1)] - \cdots$$

$$-(n-2)^2[1+3+\cdots+(2n-1)] - (n-1)^2[1+3+\cdots+(2n-5)],$$

те је

$$S_3^{(n)} = \sum C_3^n - n^2 \sum_1^{n-1} \nu^2 + 4 \sum_1^{n-1} \nu^3 .$$

Користећи образац (5) следи да је

$$\sum C_3^n = 6\binom{n}{3}^2 + n^2\left[2\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\right] - 4\binom{n}{2}^2 = \binom{n}{3} n (n^2-n-1). \quad (13)$$

Збирови комбинација целих непарних позитивних бројева везани су рекурзивним обрасцима. Из (12), с обзиром на (11), следи да је

$$\sum C_2^n = 2\binom{n}{2}^2 + \sum_1^{n-1} \nu^2 = 2\sum_1^{n-1} \nu^3 + \sum_1^{n-1} \nu^2 =$$

$$= \sum_1^{n-1} (2\nu+1)\nu^2 = \sum_1^{n-1} \left[(2\nu+1) \sum C_1^\nu\right],$$

па уопште важи следећа рекурентна формула за збирове комбинација

$$\sum C_r^n (2\nu-1) = \sum_{\nu=r-1}^{n-1} \left[(2\nu+1) \sum C_{r-1}^\nu\right], \quad (14)$$

па је и

$$\prod_1^n (2\nu-1) = \frac{n!}{2^n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{n!}{2^n} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s}\binom{n}{s}. \quad (15)$$

Збирови су показани у таблици II.

Ови збирови образују низове бројева чије су разлике једнаке разликама које образују скалари предње Јакобијеве матрице (8). Због тих релација постоји и ова релација

$$\sum C_r^{n+1} - \sum C_r^n = (2n+1) \sum C_{r-1}^n . \quad (16)$$

Таблица II

$n \backslash r$	1		2		3		4		5	
1	1									
		3								
2	4		3							
		5		5 · 4						
3	9		23		15					
		7		7 · 9		7 · 23				
4	16		86		176		105			
		9		9 · 16		9 · 86		9 · 176		
5	25		230		950		1689		945	
		11		11 · 25		11 · 230		11 · 950		11 · 1689
6	36		505		3480		12139		19524	
		13		13 · 36		13 · 505		13 · 3480		13 · 12139
7	49		973		10045		57379		177331	
		15		15 · 49		15 · 973		15 · 10045		15 · 57379
8	64		1708		24640		208054		1038016	
		17		17 · 64		17 · 1708		17 · 24640		17 · 208054
9	81		2796		53676		626934		4574934	
		19		19 · 81		19 · 2796		19 · 53676		19 · 626934
10	100		4335		78840		1646778		16486680	
Δ	$\Delta^2=2$		$\Delta^4=12$		$\Delta^6=120$		$\Delta^8=1680$		$\Delta^{10}=30240=\prod_1^5(5+\nu)=$ $=6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$	
	$\Delta^{2k+2}=2(2k+1)\Delta^{2k};\quad k=1, 2, \ldots;\quad \Delta^2=2.$									

Збир комбинација може се одредитии помоћу коначних разлика. Например, за $r=2$ добивамо

$$\sum C_2^n = 2\binom{n}{2}^2 + 2\binom{n}{3}+\binom{n}{2} = 3\binom{n}{2}+14\binom{n}{3}+12\binom{n}{4}$$

па је

$$\binom{n}{2}^2-\binom{n}{2}-6\binom{n}{3}-6\binom{n}{4}=0, \quad n\geqslant 2.$$

Даље је

$$\sum C_2^n = n(n^2-n-1)\binom{n}{3} = 15\binom{n}{3}+116\binom{n}{4}+220\binom{n}{5}+120\binom{n}{6}$$

па је

$$n\left[2\binom{n}{2}-1\right]=15+20\binom{n-3}{1}+22\binom{n-3}{2}+6\binom{n-3}{3}; \quad n\geqslant 3.$$

На основу изнетог могу се лако добити и следеће формуле за збирове целих бројева:

$$\sum_{1}^{n}(2\nu+1)\,\nu^2=\binom{n+1}{2}\frac{3n^2+5n+1}{3},$$

$$\sum_{1}^{n}(2\nu-1)\,\nu^2=\binom{n+1}{2}\frac{3n^2+n-1}{3}, \tag{17}$$

$$\sum_{1}^{n-1}(2\nu-1)\,\nu^2=\binom{n}{2}\frac{3n^2-5n+1}{3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. — Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Москва, 1950.

[2] Hildebrand F. B. — Methods of Applied Mathematics. New York, 1954.

[3] Laguerre E. — Oeuvres, Vol. I. Paris, 1898.

[4] Courant R. and Hilbert D. — Methods of Mathematical Physics. Vol. I. New York, 1953.

[5] Szegö G. — Orthogonal Polynomials. New York, 1939.

[6] Rašković D. — Über die Eigenschaften der Frequenzgleichungen eines schwingenden Systems. Sonderdruck aus ZAMM, Akademie Verlag, Band 37, Heft 7/8, (1957).

[7] Netto E. — Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig, 1927.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SCALAIRES D'UNE MATRICE SPECIALE DE JACOBI

DANILO RAŠKOVIĆ (Beograd)

On démontre que les sommes des mineurs principaux d'ordre r du déterminant de la matrice symétrique de Jacobi — les scalaires de la matrice (1) — peuvent être déterminées sans le développement du déterminant de la matrice (1) et qu'ils sont liées par les relations

de récurrence (6) et (7). Ces scalaires forment les suites des nombres avec les différences bien déterminées (8). On constate que ces scalaires sont les valeurs absolues des coefficients des polynômes fondamentaux de Laguerre (9). Il en résulte que ce polynôme fondamental peut être défini comme l'équation caractéristique de la matrice spéciale de Jacobi (1).

Grâce à ces relations entre les scalaires on peut obtenir les formules pour les sommes des combinaisons des nombres entiers, positifs et impaires. Elles sont liées aussi par les relations de récurrence (14) et forment les suites des nombres avec les mêmes différences comme (8).

Ensuite, on déduit quelques relations entre les coefficients du binome et aussi les formules pour certaines sommes des entiers positifs (17).