Зборник радова САН LXIII — Математички институт САН, кн. 7, 1959
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LXIII
Institut Mathématique № 7, 1959

VÁCLAV VODIČKA

ÜBER EINE FORMEL DER ELEMENTARMATHEMATIK

Dieser Aufsatz befasst sich vor allem mit der Herleitung einer nicht allgemein bekannten Formel der Elementarmathematik. Sie steht in enger Beziehung zur Theorie periodischer Zahlenfolgen, zur Multiplikation der Potenzreihen (es sei hier insbesondere auf einige Fragen aus der Theorie der lakunären Reihen hingewiesen) und zu interessanten Problemen der Unterhaltungsmathematik.

1. DIE AUFSTELLUNG DER GRUNDFORMEL. Ist $r \geqslant 2$ irgendwelche ganze Zahl, so hat die Zahlenfolge

$$h_n^{(r)} = \frac{1}{r} \sum_{\rho=0}^{r-1} \cos \frac{2n\rho\pi}{r} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

offensichtlich die Periode r und ihre Anfangsglieder sind $h_0^{(r)} = 1$, $h_1^{(r)} = h_2^{(r)} = \cdots = h_{r-1}^{(r)} = 0$.

Die gewünschte Grundformel ergibt sicht indem wir die Ausdrücke

$$H_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(r)} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots;\ r=2, 3, 4, \ldots), \tag{2}$$

auf zweierlei verschiedene Weisen berechnen.

Zuerst hat man offensichtlich

$$H_n^{(r)} = 1 + \left[\frac{n}{r}\right] \qquad (n=0, 1, 2, \ldots;\ r=2, 3, 4, \ldots), \tag{3}$$

wenn $[x]$ gewöhnlicherweise den ganzen Teil von x bedeutet.

Die zweite Form von (2) ergibt sich durch direkte Berechnung. Mit Hilfe von (1) bekommt man dafür zuerst

$$rH_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\rho=0}^{r-1} \cos \frac{2\nu\rho\pi}{r} = n + r + \sum_{\rho=1}^{r-1} \frac{\sin \frac{n\rho\pi}{r}}{\sin \frac{\rho\pi}{r}} \cos (n+1) \frac{\rho\pi}{r} =$$

$$=n+r+\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\rho\pi}{r}}{\sin\frac{\rho\pi}{r}}-1\right]=n+\frac{1}{2}(r+1)+\frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}\frac{\sin(2n+1)\frac{\rho\pi}{r}}{\sin\frac{\rho\pi}{r}}.$$

Obgleich die Rechnung nur unter der Annahme $n\geqslant 1$ durchgeführt worden ist, gilt das Ergebnis auch noch für $n=0$ und wir gelangen zur zweiten Beziehung für die Ausdrücke (2):

$$H_n^{(r)}=\frac{1}{2r}\left[2n+r+1+\sum_{\rho=1}^{r-1}\frac{\sin(2n+1)\frac{\rho\pi}{r}}{\sin\frac{\rho\pi}{r}}\right](n=0,1,2,\ldots;r=2,3,4,\ldots). \quad (4)$$

Durch Gleichsetzung von (3) und (4) gelangen wir nun zur unseren gewünschten Grundformel

$$\sum_{\rho=1}^{r-1}\frac{\sin(2n+1)\frac{\rho\pi}{r}}{\sin\frac{\rho\pi}{r}}=r-1-2r\left(\frac{n}{r}-\left[\frac{n}{r}\right]\right)(n=0,1,2,\ldots;r=2,3,4,\ldots). \quad (5)$$

Wird ganz allgemein unter $\{x\}=x-[x]$ der gebrochene Teil von x verstanden, so kann man (5) auch noch in die Form

$$\sum_{\rho=1}^{r-1}\frac{\sin(2n+1)\frac{\rho\pi}{r}}{\sin\frac{\rho\pi}{r}}=r-1-2r\left\{\frac{n}{r}\right\} \quad (n=0,1,2,\ldots;r=2,3,4,\ldots) \quad (5.1)$$

setzen.

2. MULTIPLIKATION VON UNENDLICHEN REIHEN. Ist

$$g(\zeta)=1+\zeta+\zeta^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n \quad (6)$$

irgendwelche konvergente Reihe und $r\geqslant 2$ eine ganze Zahl, so geht es zuerst um die Aufstellung der Potenzreihe für $g(\zeta).g(\zeta^r)$.

Da man mit der Bezeichnung (1) offensichtlich

$$g(\zeta^r)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n^{(r)}\zeta^n \qquad (r=2,3\,4,\ldots) \quad (7)$$

hat, so folgt gewöhnlicherweise

$$g(\zeta).g(\zeta^r)=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n\sum_{\nu=0}^{n}h_\nu^{(r)}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(r)}\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n+r}{r}\right]\zeta^n$$

und wir kommen zum Ergebnis

$$g(\zeta)\,g(\zeta^r)=\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^r)}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(r)}\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n+r}{r}\right]\zeta^n \qquad (r=2,3,4,\ldots). \tag{8}$$

In der Form mit $\left[\frac{n+r}{r}\right]$ gilt übrigens (8) auch noch für $r=1$.

Gehen wir mit irgend einer anderen ganzen Zahl $s\geqslant 2$ noch einen Schritt weiter, so haben wir nach (7) und (8)

$$g(\zeta)\,g(\zeta^r)\,g(\zeta^s)=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n\sum_{\nu=0}^{n}h_\nu^{(s)}\left[\frac{n-\nu+r}{r}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n\sum_{\varkappa=0}^{[n/s]}\left[\frac{n-\varkappa s+r}{r}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\left[\frac{n}{s}\right]+\sum_{\varkappa=0}^{[n/s]}\left[\frac{n-\varkappa s}{r}\right]\right)\zeta^n.$$

Zusammenfassend ist also

$$g(\zeta)\,g(\zeta^r)\,g(\zeta^s)=\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^r)(1-\zeta^s)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(r,s)}\zeta^n,$$

$$A_n^{(r,s)}=1+\left[\frac{n}{s}\right]+\sum_{\varkappa=0}^{[n/s]}\left[\frac{n-\varkappa s}{r}\right] \qquad (r,s=2,3,4,\ldots). \tag{9}$$

Mit einer dritten ganzen Zahl $t\geqslant 2$ haben wir nach (9)

$$g(\zeta^t)\,g(\zeta^{rt})\,g(\zeta^{st})=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(r,s)}\zeta^{nt}=\sum_{n=0}^{\infty}h_n^{(t)}A_{[n/t]}^{(r,s)}\zeta^n$$

und daher

$$g(\zeta)\,g(\zeta^r)\,g(\zeta^s)\,g(\zeta^t)\,g(\zeta^{rt})\,g(\zeta^{st})=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n\sum_{\nu=0}^{n}h_\nu^{(t)}A_{[\nu/t]}^{(r,s)}A_{n-\nu}^{(r,s)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n\sum_{\varkappa=0}^{[n/t]}A_\varkappa^{(r,s)}A_{n-\varkappa t}^{(r,s)}.$$

Wir kommen also zur Formel

$$g(\zeta)\,g(\zeta^r)\,g(\zeta^s)\,g(\zeta^t)\,g(\zeta^{rt})\,g(\zeta^{st})=$$

$$=\frac{1}{(1-\zeta)(1-\zeta^r)(1-\zeta^s)(1-\zeta^t)(1-\zeta^{rt})(1-\zeta^{st})}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(r,s,t)}\zeta^n,$$

$$B_n^{(r,s,t)} = \sum_{\varkappa=0}^{[n/t]} A_\varkappa^{(r,s)} A_{n-\varkappa t}^{(r,s)},$$
$$A_n^{(r,s)} = 1 + \left[\frac{n}{s}\right] + \sum_{\nu=0}^{[n/s]} \left[\frac{n-\nu s}{r}\right] \qquad (r, s, t = 2, 3, 4, \ldots) \qquad (10)$$

und verzichten auf naheliegende Weiterführung unserer Erwägungen, da die bisherigen Ergebnisse für unsere weiteren Zwecke völlig ausreichen.

3. ZWEI PROBLEME DER UNTERHALTUNGSMATHEMATIK. Die in in dem vorhergehenden Abschnitt skizzierten Tatsachen hängen offensichtlich mit der Theorie Diophantischer Gleichungen und mathematischer Spiele zusammen. Die Grösse $A_n^{(r,s)}$ aus (9) bestimmt ja bekanntlich die Anzahl der verschiedenen Arten, auf die man die Summe von n Kronen mit Banknoten im Betrag von 1, r und s Kronen bezahlen kann. So lässt sich z. B. mit den Banknoten 1, 3 und 5 Kronen die Summe

von 10 Kronen auf $A_{10}^{(3,5)} = 7$ verschiedene Arten,

„ 25 „ „ $A_{25}^{(3,5)} = 29$ „ „ usw.

auszahlen.

Ähnlich bedeutet die Grösse $B_n^{(r,s,t)}$ die Gesamtzahl von Möglichkeiten etwa n Kopeken mit Münzen und Banknoten im Betrag von 1, r, s, t, rt und st su bezahlen. So lässt sich ein Rubel auf $B_{100}^{(2,5,10)}$ verschiedene Arten in Münzen 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Kopeken auszahlen.

Die nach (10) durchzuführende Rechnung ist einfach und ganz mechanisch:

$A_0^{(2,5)} = 1,\ A_1^{(2,5)} = 1,\ A_2^{(2,5)} = 2,\ A_3^{(2,5)} = 2,\ A_4^{(2,5)} = 3,$

$A_5^{(2,5)} = 4,\ A_6^{(2,5)} = 5,\ A_7^{(2,5)} = 6,\ A_8^{(2,5)} = 7,\ A_9^{(2,5)} = 8,$

$A_{10}^{(2,5)} = 10,\ A_{20}^{(2,5)} = 29,\ A_{30}^{(2,5)} = 58,\ A_{40}^{(2,5)} = 97,\ A_{50}^{(2,5)} = 146,\ A_{60}^{(2,5)} = 205,$

$A_{70}^{(2,5)} = 274,\ A_{80}^{(2,5)} = 353,\ A_{90}^{(2,5)} = 442,\ A_{100}^{(2,5)} = 541;$

$$B_{100}^{(2,5,10)} = \sum_{\varkappa=0}^{10} A_\varkappa^{(2,5)} A_{100-10\varkappa}^{(2,5)} = 1.541 + 1.442 + 2.353 + 2.274 + 3.205 + 4.146 +$$
$$+ 5.97 + 6.58 + 7.29 + 8.10 + 10.1 = 4.562.$$

Die obige Transaktion kann also auf 4562 verschiedene Arten durchgeführt werden, wie übrigens aus der Literatur her gut bekannt ist.

4. SCHLUSSBEMERKUNGEN. 4.1. Bei verschiedenen Gelegenheiten sind mehr geschlossene Ausdrücke für einzelne ¦Glieder der periodischen Zahlenfolge (1) von Nutzen. Wir führen hier daher die Formeln für ein Paar anfängliche Werte von r an, wobei natürlich die möglichst einfache Form gewählt wird.

Es ist für $n=0, 1, 2, 3, \ldots$

$$h_n^{(2)} = \cos^2 \frac{n\pi}{2}, \quad h_n^{(3)} = \frac{1}{3}\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{3}\right), \quad h_n^{(4)} = \cos\frac{n\pi}{2}\cos^2\frac{n\pi}{4},$$

$$h_n^{(5)} = \frac{1}{5}\left(1+4\cos\frac{n\pi}{5}\cos\frac{3n\pi}{5}\right), \quad h_n^{(6)} = \frac{1}{3}\cos^2\frac{n\pi}{2}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\right);$$

$$h_n^{(7)} = \frac{1}{7}\left[1+2\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{7}\right)\cos\frac{4n\pi}{7}\right],$$

$$h_n^{(8)} = \frac{1}{2}\cos^2\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\cos^2\frac{n\pi}{2}\right). \tag{11}$$

4.2. Betreffs der obigen Aufgaben der Unterhaltungsmathematik sei bemerkt, dass unsere Betrachtungsweise in diesen Fragenkomplex hoffentlich mehr Systematik und einen tieferen Einblick bringt, als man es gewöhnlich in der Literatur[1] finden kann. Die auf ersten Blick mühsame Rechenarbeit wird sich der Leser nach ein wenig durchgerechneten Zahlenbeispielen selbst vereinfachen können.

(Eingegangen am 4 Dezember 1957)

О ЈЕДНОМ ОБРАСЦУ ИЗ ЕЛЕМЕНТАРНЕ МАТЕМАТИКЕ

В. ВОДИЧКА (Пилзен, Чехословачка)

У овом раду изводи се један образац из елементарне Математике који стоји непосредно у вези са периодичним низовима. Његова примена се састоји у множењу неких геометриских прогресија, као и у неким елементарним проблемима из Комбинаторике.

У тачки 1 доказан је тај образац. Нека је $r \geqslant 2$ ма који цео број, тада бројни низ $h_n^{(r)}$, $(n=0,1,\ldots)$, дефинисан са (1), има пери-

[1]) G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, Berlin, Julius Springer, 1925.

оду r и очевидно је $h_k^{(r)}=0$, $k=1,2,\ldots,r-1$, $h_0^{(r)}=1$. Образац, о коме је реч добива се кад се израз

$$H_n^{(r)}=\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(r)} \qquad (n=0,1,\ldots ;\ \nu=2,3\,4,\ldots)$$

израчуна на два различита начина. Први начин доводи до обрасца (3) у коме $[x]$ означава највећи цео број садржан у x. Директним израчунавањем $H_n^{(r)}$, долази се до обрасца (4), и упоређивањем обрасца (3) са (4) изводи се основни образац (5). Увођењем симбола $\{x\}=x-[x]$, образац (5) се може написати и у облику (5.1).

У тачки 2 се посматра геометриска прогресија $g(\zeta)$ дата са (6), и за $r\geqslant 2$, обрасцем (8) изражен је производ $g(\zeta)\,g(\zeta^r)$ у облику прогресије чији су коефицијенти $H_n^{(r)}$. Исто тако, образац (9) даје израз за $g(\zeta)\,g(\zeta^r)\,g(\zeta^s)$, $s\geqslant 2$, а (10) израз за $g(\zeta)\,g(\zeta^r)\,g(\zeta^s)\,g(\zeta^t)\,g(\zeta^{rt})\,g(\zeta^{st})$.

У тачки 3 дата је примена напред добивених образаца на решење неких елементарних диофантових једначина, које се јављају у елементарној Комбинаторици, тј. у Математичким играма. Коефицијенти поменутих редова у тачки 3, дају број решења неких диофантових једначина у целим бројевима. Облик тих коефицијената дат је обрасцем (10) и зато их је лако израчунати.

Најзад, у тачки 4, у обрасцима (11) израчунато је неколико основних израза.