

ЂОРЂЕ МУШИЦКИ

### ПОЛУПРЕЧНИЦИ ЈЕЗГРА „ОГЛЕДАЛА“ СА ГЛЕДИШТА ШЕЛ-МОДЕЛА

УВОД. Познато је да експерименти дифузије електрона од 500 MeV на језгрима и проучавања спектра „мезонских атома“ дају за полупречник језгра  $R = r_0 A^{1/3}$  вредност којој одговара мања вредност за  $r_0$  од оних које се добијају другим методама, наиме 1,2—1,3 ферми, где је 1 ферми =  $10^{-13}$  cm [1]. С друге стране, из диференције кулоновских енергија два језгра „огледала“, добијене из енергије  $\beta$ -распада, добија се већа вредност око 1,4 ферми. Ове диференције кулоновских енергија могу се одредити и теориски помоћу шел-модела и идентификујући ове експерименталне и теориске вредности налази се да је слагање најбоље ако се за  $r_0$  узме вредност око 1,3 ферми. У том циљу Јансовић [2] је увео појмове мезонског и кулоновског полупречника језгра и израчунао је њихов однос за парове језгра „огледала“  $A = 15$  и  $A = 17$ . При томе је претпостављено да средњи потенцијал шел-модела има облик правоугаоне јаме, а за израчунавање кулоновске енергије употребљена је метода Slater-a [3]. Carlson и Talmi [4] су систематски проучавали сва језгра „огледала“ узимајући да средњи потенцијал има облик потенцијала хармониског осцилатора. При томе је претпостављено да је спрезање орбиталног и спинског ангуларног момента типа  $jj$ , а за израчунавање кулоновске енергије употребљена је метода Rasmussen-a и нађено је да  $r_0$  опада у интервалу  $3 \leq A \leq 27$  од вредности 1,54 до 1,20 ферми, а за веће вредности од  $A$  нешто расте.

Ми ћемо овде узети шел-модел са потенцијалом хармониског осцилатора и употребићемо методу Slater-a за сва језгра „огледала“ до  $A = 17$ , кад се завршава  $p$ -љуска, и то како у спрезању  $jj$  тако и у спрезању  $LS$ . На тај начин, проширујући методу Јансовић-а на други облик потенцијала, на друга језгра и на спрезање  $LS$ , добићемо односе  $R_C/R_M$  и вредности  $r_0$  за сва наведена језгра „огледала“. При томе у спрезању  $LS$  код извесних парова језгра „огледала“ добијају се неодређени резултати, што се јавља у случају недефинисаних стања при интермедиарном спрезању смеше могућих стања.

Потпуности ради, изложићемо претходно дефиниције мезонског и кулоновског полупречника, основне идеје шел-модела и методу Slater-а.

МЕЗОНСКИ И КУЛОНОВСКИ ПОЛУПРЕЧНИК. Очекивана вредност квадрата растојања протона од центра језгра одређена је обрасцем

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr}{\int_0^{\infty} \rho(r) 4\pi r^2 dr} \quad (1)$$

где је  $\rho(r)$  густина наелектрисања у језгру. Ако је ова густина константна у интервалу  $0 \leq r \leq R$ , а ван њега једнака нули, горњи израз добија облик

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2.$$

Вредност  $R$  одређена овим обрасцем дефинише се као мезонски полупречник језгра

$$R_M = \sqrt{\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle}. \quad (2)$$

У случају линеарног осцилатора  $\langle r^2 \rangle$  је одређено обрасцем

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \langle r^2 \rangle_i = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \frac{1}{v} \left[ 2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right]_i \quad (3)$$

где је  $v$  параметар линеарног осцилатора.

С друге стране, под језгрима „огледалима“ подразумевају се такви парови језгра код којих је број протона једног од њих једнак броју неутрона другог, а број неутрона првог једнак броју протона другог, на пр. језгра  ${}^8_9\text{O}^{17}$  и  ${}^8_8\text{F}^{17}$ , при чему горњи број означава атомску тежину, тј. број нуклеона, доњи леви број означава број протона, а доњи десни број, број неутрона. Стога је диференција њихових укупних енергија једнака диференцији њихових кулоновских енергија и за униформну расподелу наелектрисања она има вредност

$$\Delta E_C = E_C(Z+1) - E_C(Z) = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R}.$$

Вредност  $R$  одређена овим обрасцем дефинише се као кулоновски полупречник језгра

$$R_c = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{\Delta E_c}. \quad (4)$$

При томе се  $\Delta E_c$  може израчунати помоћу методе Slater-а, о којој ће бити речи мало ниже.

**ШЕЛ-МОДЕЛ ЈЕЗГРА.** Основна идеја шел-модела језгра састоји се у томе да и нуклеони, тј. протони и неутрони, имају извесну „љускасту“ структуру у језгру слично електронима у атомском омотачу, откуда и потиче име (енглески shell = љуска). Bartlett (1932) је први дао сугестију у том правцу, а Elsasser (1934) је открио тзв. магичне бројеве

$$2, 8, 14, 20, 28, 50, 82, 126,$$

тј. открио је да језгра код којих је број неутрона једнак једном од наведених бројева показују изузетну стабилност, што по аналогiji са атомским омотачем указује на затворене љуске. Поред велике стабилности ова језгра имају и врло велику обилност и врло мале неутронске ефикасне пресеке у односу на суседна језгра, што је потпуно у складу са наведеном хипотезом затворених љуски. Доцније је читав низ научника радио на развијању шел-модела и његове више форме – колективног модела, као Guggenheim, Goldschmidt, Mayer, Jensen, Feenberg, A. Bohr, Mot-telson i други [5, 6].

У свом најпростијем облику шел-модел полази од претпоставке независности нуклеона и тада је таласна функција система нуклеона једнака производу таласних функција појединих нуклеона. Сваки нуклеон се тада посматра као партикула у потенцијалној јами, која претставља просечну интеракцију са свим осталим нуклеонима система. У најпростијем случају може се узети да је потенцијал сферно-симетричан и тада се стање сваког нуклеона може описати са четири квантна броја, који су сасвим аналогни квантним бројевима електрона у атомском омотачу. Тада се стационарна стања нуклеона могу добити као решења Schrödinger-ове једначине

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (5)$$

а решења се могу добити у поларним координатама у облику

$$\psi = \frac{1}{r} R(r; n, l) Y(\vartheta, \varphi; l, m). \quad (6)$$

Облик потенцијала  $V(r)$  зависи од природе нуклеарних сила, које дејствују између нуклеона. У недостатку тачног познавања нуклеарних сила узимају се прости облици потенцијала, који могу претстављати потенцијалну јаму, и то потенцијал изотропног хармониског осцилатора и потенцијал правоугаоне јаме.

Први потенцијал има облик

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (7)$$

а одговарајуће дозвољене вредности енергије, које даје Schrödinger-ова једначина

$$E = \left[ 2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right] \hbar \omega. \quad (8)$$

Употребљавајући уобичајене спектроскопске нотације, тј. означавајући вредности квантних бројева  $n$  и  $l$ , при чему се стања  $l=0, l=1, l=2, l=3, l=4, l=5$  означавају словима  $s, p, d, f, g, h$ , видимо да је основни ниво  $1s$ , први виши ниво  $1p$ , други  $1d$  и  $2s$ , трећи  $1f$  и  $2p$ , четврти  $1g, 2d$  и  $3s$  итд.

Други потенцијал има облик

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (9)$$

а одговарајуће дозвољене вредности енергије су решења једне трансцедентне једначине. Нумеричка решења ове једначине показују да се енергиски нивои ређају у следећем реду:  $1s, 1p, 1d, 2s, 1f, 2p, 1g, 2d, 1h, 3s$  итд. За разлику од претходног случаја у овом случају нема дегенерације.

Међутим на овај начин не може се добити задовољавајуће објашњење магичних бројева. Ради тога уводи се тзв. спин-орбит спрезање, које се састоји у томе да се енергији нуклеона мора додати и енергија његовог спинског магнетног момента  $\vec{\mu}$  у магнетном пољу  $\vec{H}$  произведеном орбиталним кретањем нуклеона. У првој апроксимацији енергија нуклеона има вредност:

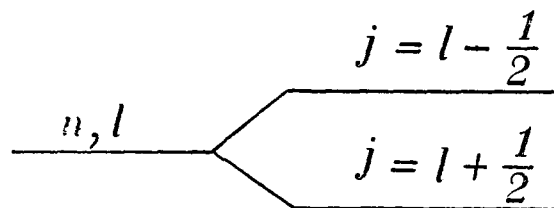
$$E = E_0 - \vec{\mu} \cdot \vec{H}$$

при чему је  $\vec{\mu}$  сразмерно са спинским ангуларним моментом  $\vec{S}$ , а  $\vec{H}$  са орбиталним ангуларним моментом  $\vec{l}$ , те имамо

$$E = E_0 - k (\vec{S} \cdot \vec{l}) \quad (10)$$

Одавде видимо да у случају кад су  $\vec{S}$  и  $\vec{l}$  паралелни имамо снижавање енергиског нивоа, а у противном случају његово повишење. На тај начин сваки енергиски ниво  $(n, l)$  цепа се на два нивоа.

У случају да је ова енергија спин-орбит спрезања мала у односу на кулоновску енергију нуклеона имамо тзв.  $LS$  спрезање, што одговара следећим правилима слагања ангуларних момената свих нуклеона:



Сл. 1

$$\sum \vec{l}_i = \vec{L}, \quad \sum \vec{s}_i = \vec{S}, \quad \vec{L} + \vec{S} = \vec{J}. \quad (11)$$

У противном случају, кад је ова енергија велика у односу на кулоновску енергију, имамо тзв.  $jj$  спрезање, што одговара правилима слагања

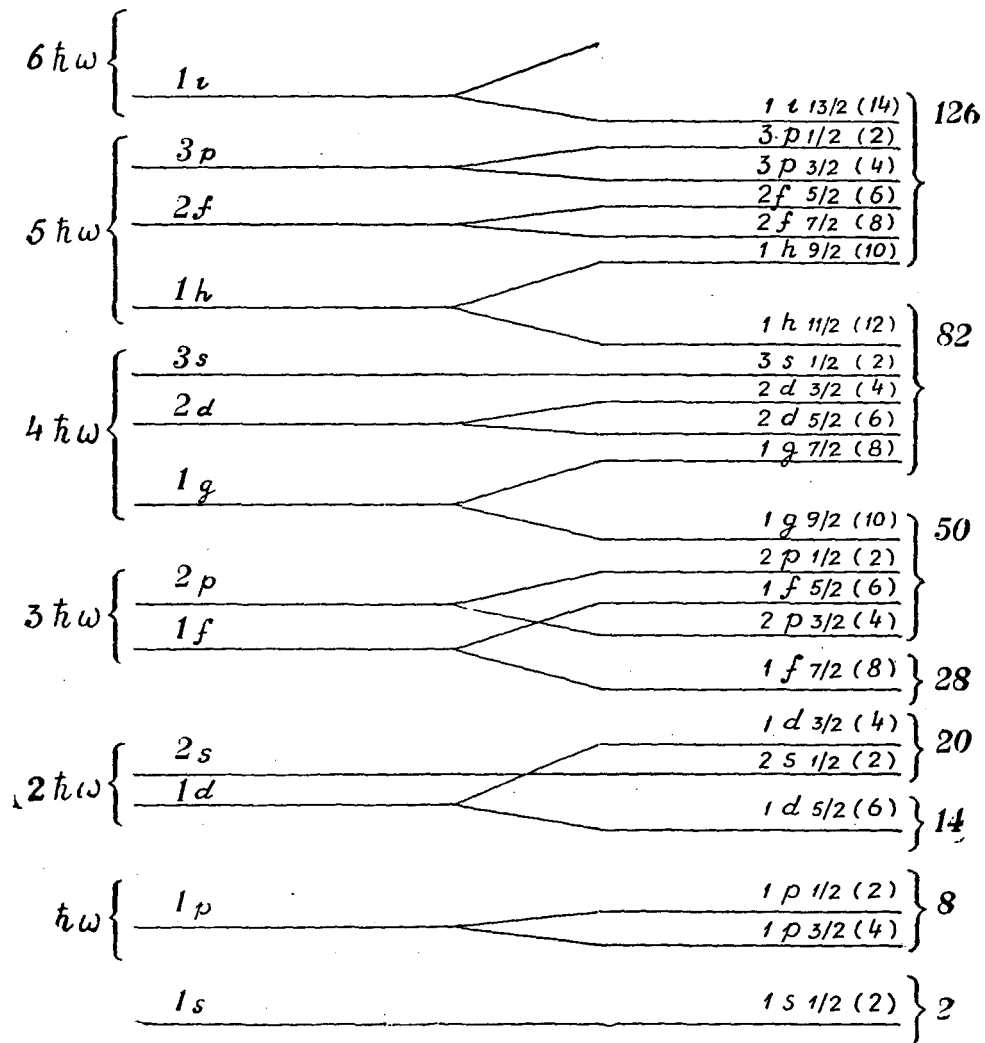
$$\vec{l}_i + \vec{s}_i = \vec{j}_i, \quad \sum \vec{j}_i = \vec{J}. \quad (12)$$

Тада се добија шема енергиских нивоа приказана на сл. 2. Лево су назначени енергиски нивои изотропног хармониског осцилатора, а десно одговарајући енергиски нивои добијени цепањем услед спин-орбит спрезања. У заградама је назначена дегенерација нивоа с обзиром на магнетни квантни број, а бројеви на десној страни означавају укупан број квантних стања до посматраног нивоа. Видимо да су ови бројеви идентични са магичним бројевима, а између свака два магична броја имамо једну групу енергиских нивоа.

Напоменимо најзад да се шел-модел са приличним успехом може применити на тумачење магнетних диполних момената, електричних квадруполних момената,  $\beta$ -распада и изомерних прелаза, али има и доста случајева где слагање са искуством није задовољавајуће чак ни квалитативно.

**SLATER-OVA METODA.** Метода Slater-ова створена је ради одређивања кулоновске енергије електрона у атому као прве пертурбације, која произилази из интеракције између појединих електрона. Ова се метода у потпуности може применити и за одређивање кулоновске енергије протона у језгру. При томе треба разликовати два главна случаја.

а) Први, прости случај је онај код кога је број протона такав да је последња подљуска комплетна или је за јединицу већа или мања. У спрезању  $LS$  у првом случају имамо јединствено стање



Сл. 2

одређено квантним бројевима  $J=0$ ,  $M=0$  и антисиметрична таласна функција система протона је јединствена Slater-ова детерминанта. У другом случају антисиметрична таласна функција у облику Slater-ове детерминанте одговара квантном стању  $J=j$  и

$M = m$  или  $M = -m$  према томе да ли имамо један протон више или мање. Та таласна функција система протона има облик

$$u = \begin{vmatrix} u(\zeta_1, \eta_1), \dots, u(\zeta_1, \eta_N) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ u(\zeta_N, \eta_1), \dots, u(\zeta_N, \eta_N) \end{vmatrix} \quad (13)$$

при чему  $\zeta_i$  претставља скуп координата  $i$ -тог нуклеона, а  $\eta_k$  скуп свих квантних бројева  $k$ -тог квантног стања.

Очекивану вредност кулоновске енергије тада можемо наћи према обрасцу

$$\langle E_C \rangle = \frac{\int u^* E_C u d\tau}{\int u^* u d\tau}, \quad E_C = \sum_{i,j} \frac{e^2}{r_{ij}} \quad (14)$$

где уместо  $u$  треба уврстити горњу вредност и где потом треба извршити интеграцију по целом простору. Ако на основу дефиниције детерминанте напишемо таласну функцију у облику алгебарског збира одговарајућих пермутација, у бројитељу добићемо троструку суму интеграла, у којој ће бити чланова са истим и са различитим пермутацијама у функцијама  $u$  и  $u^*$ . На тај начин добићемо

$$\int u^* E_C u d\tau = N! \left( \sum_{i,j} J(\eta_i, \eta_j) - \sum_{i,j} K(\eta_i, \eta_j) \right) \quad (15)$$

где је

$$\left. \begin{aligned} J(\eta_i, \eta_j) &= \int u^*(\zeta_i, \eta_i) u^*(\zeta_j, \eta_j) \frac{e^2}{r_{ij}} u(\zeta_i, \eta_i) u(\zeta_j, \eta_j) d\tau \\ K(\eta_i, \eta_j) &= \int u^*(\zeta_i, \eta_j) u^*(\zeta_j, \eta_i) \frac{e^2}{r_{ij}} u(\zeta_i, \eta_i) u(\zeta_j, \eta_j) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

а суме треба узети по свим паровима  $(i, j)$  са  $i < j$ . При томе су чланови са истим пермутацијама дали први члан обрасца (15), а чланови са различитим пермутацијама други члан. На сличан начин за именитељ налазимо

$$\int u^* u d\tau = N! \quad (17)$$

те добијамо коначно

$$\langle E_C \rangle = \sum_{i,j} J(\eta_i, \eta_j) - \sum_{i,j} K(\eta_i, \eta_j). \quad (18)$$

Ако у изразима за  $J$  и  $K$  уврстимо таласне функције сферно-симетричног потенцијала (6) и ако израз  $1/r_{ij}$  развијемо по Legendre-овим полиномима, добићемо

$$\left. \begin{aligned} J(\eta_i, \eta_j) &= \sum_{k=0}^{2l_i} a^k(l_i m_i, l_j m_j) F^k(n_i l_i, n_j l_j) \\ K(\eta_i, \eta_j) &= \delta(s_i, s_j) \sum_{k=|l_i-l_j|}^{l_i+l_j} b^k(l_i m_i, l_j m_j) G^k(n_i l_i, n_j l_j) \end{aligned} \right\} (19)$$

где је

$$\left. \begin{aligned} a^k(l_i m_i, l_j m_j) &= \frac{(2l_i+1)(2l_j+1)(l_i-|m_i|)!(l_j-|m_j|)!}{(l_i+|m_i|)!(l_j+|m_j|)!} \\ &\int_0^\pi \left[ P_{l_i}^{|m_i|}(\cos \vartheta) \right]^2 P_k(\cos \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{2} d\vartheta \int_0^\pi \left[ P_{l_j}^{|m_j|}(\cos \vartheta') \right]^2 P_k(\cos \vartheta') \frac{\sin \vartheta'}{2} d\vartheta' \\ b^k(l_i m_i, l_j m_j) &= \frac{(2l_i+1)(2l_j+1)(l_i-|m_i|)!(l_j-|m_j|)!(k-|m_i-m_j|)!}{(l_i+|m_i|)!(l_j+|m_j|)!(k+|m_i-m_j|)!} \\ &\cdot \left[ \int_0^\pi P_{l_i}^{|m_i|}(\cos \vartheta) P_{l_j}^{|m_j|}(\cos \vartheta) P_k^{|m_i-m_j|}(\cos \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{2} d\vartheta \right]^2 \end{aligned} \right\} (20)$$

а

$$\left. \begin{aligned} F^k(n_i l_i, n_j l_j) &= e^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r_i^k}{r_i^{k+1}} R^2(r_i; n_i l_i) R^2(r_j; n_j l_j) dr_i dr_j \\ G^k(n_i l_i, n_j l_j) &= e^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r_i^k}{r_i^{k+1}} R(r_i; n_i l_i) R(r_i; n_j l_j) R(r_j; n_i l_i) R(r_j; n_j l_j) dr_i dr_j \end{aligned} \right\} (21)$$

где је  $r_i <$  мања, а  $r_j >$  већа вредност од  $r_i$  и  $r_j$ , а  $\delta$  Кронекер-ов симбол.

Коефицијенти  $a^k$  и  $b^k$  не зависе од природе потенцијала и они су табулирани ([7], глава VI).

Ако се пређе са спрезања  $LS$  на спрезање  $jj$ , очекивана вредност кулоновске енергије може се изразити помоћу интеграла  $F^k$  и  $G^k$ :

$$\langle E_c \rangle = \sum_{i,j} T(n_i l_i m_i, n_j l_j m_j) \quad (22)$$



где је

$$T(n_i, l_i, m_i; n_j, l_j, m_j) = \sum_{k=0}^{2l_i} c^k(l_i, m_i, l_j, m_j) F^k(n_i, l_i, n_j, l_j) + \sum_{k=|l_i-l_j|}^{l_i+l_j} d^k(l_i, m_i, l_j, m_j) G^k(n_i, l_i, n_j, l_j) \quad (23)$$

при чему коефицијенти  $c^k$  и  $d^k$  не зависе од природе потенцијала и они су такође табулирани.

б) У свим осталим случајевима треба применити општију методу трага матрице кулоновске енергије, коју је такође дао Slater. Тада постоји више антисиметричних стања  $|JM\rangle$ , која су линеарне комбинације стања  $|m_1 m_2 \dots m_p\rangle$ , претстављених Slater-овим детерминантама. У том случају имамо

$$\sum_J \langle JM | E_C | JM \rangle = \sum_{m_1 \dots m_p} \langle m_1 \dots m_p | E_C | m_1 \dots m_p \rangle \quad (24)$$

где очекиване вредности кулоновске енергије треба сумирати по свим вредностима  $J$ , односно по свим комбинацијама  $(m_1 \dots m_p)$  код којих је  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = M$ . Ова релација произлази из инваријантности трага одговарајуће матрице при унитарној трансформацији. Сваки члан у горњој релацији може се израчунати по методи изложеној у првом случају. На тај начин кулоновска енергија протона може се израчунати као линеарна комбинација кулоновских енергија у појединим квантним стањима

$$\langle E_C \rangle = \sum \alpha_i \langle E_C \rangle_i. \quad (25)$$

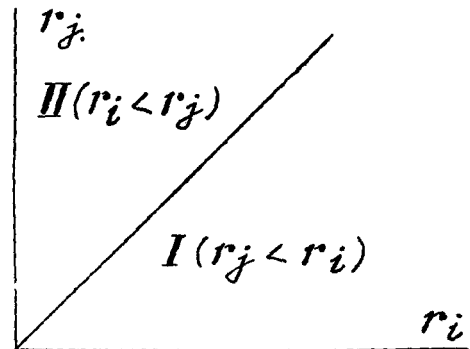
ВРЕДНОСТИ РАДИЈАЛНИХ ИНТЕГРАЛА. — Узмимо сад потенцијал изотропног хармониског осцилатора. У случају  $n=1$ , који се једино појављује до затварања  $p$ -љуске, функција  $R(r; n l)$  има вредност

$$R(r; 1 l) = N_l e^{-\frac{1}{2} \nu r^2} r^{l+1} \left( \nu = \frac{m \omega}{\hbar} \right) \quad (26)$$

где је на основу услова нормирања

$$N_l^2 = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{2^{l+2} \nu^{l+1}}{(2l+1)!!}. \quad (27)$$

Ако ове вредности функције  $R(r; n l)$  уврстимо у обрасце (21) и ако одговарајуће двојне интеграле



Сл. 3

раставимо на два интеграла, по области I где је  $r_j < r_i$  и по области II где је  $r_i < r_j$ , добијамо

$$\left. \begin{aligned} F^k(1l_i, 1l_j) &= e^2 N_{l_i}^2 N_{l_j}^2 \int_0^\infty r_i^{2l_i-k+1} e^{-vr_i^2} dr_i \int_0^{r_i} r_j^{2l_j+k+2} e^{-vr_j^2} dr_j + \\ &+ e^2 N_{l_i}^2 N_{l_j}^2 \int_0^\infty r_i^{2l_i+k+2} e^{-vr_i^2} dr_i \int_{r_i}^\infty r_j^{2l_j-k+1} e^{-vr_j^2} dr_j. \\ G^k(1l_i, 1l_j) &= e^2 N_{l_i}^2 N_{l_j}^2 \int_0^\infty r_i^{l_i+l_j-k+1} e^{-vr_i^2} dr_i \int_0^{r_i} r_j^{l_i+l_j+k+2} e^{-vr_j^2} dr_j + \\ &+ e^2 N_{l_i}^2 N_{l_j}^2 \int_0^\infty r_i^{l_i+l_j+k+2} e^{-vr_i^2} dr_i \int_{r_i}^\infty r_j^{l_i+l_j-k+1} e^{-vr_j^2} dr_j. \end{aligned} \right\} (28)$$

Израчунавање ових двојних интеграла своди се на три типа интеграла

$$\left. \begin{aligned} J_1(n) &= \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x^2} dx, & J_2(n) &= \int_0^a x^n e^{-\lambda x^2} dx, \\ J_3(n) &= \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x^2} \Phi(x\sqrt{\lambda}) dx \end{aligned} \right\} (29)$$

где је  $\Phi(t)$  ерор-функција

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt, \quad (30)$$

при чему је у трећем интегралу  $n$  увек непарно. Сва три наведена интеграла могу се израчунати парцијалном интеграцијом. Први интеграл има вредност

$$J_1(n) = \begin{cases} (n-1)!! (2\lambda)^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{за } n \text{ парно,} \\ (n-1)!! (2\lambda)^{-\frac{n+1}{2}} & \text{за } n \text{ непарно;} \end{cases} \quad (31)$$

други интеграл се може израчунати уз помоћ рекурентне формуле

$$J_2(n) = -\frac{1}{2\lambda} a^{n-1} e^{-\lambda a^2} + \frac{n-1}{2\lambda} J_2(n-2) \quad (32)$$

а трећи такође уз помоћ рекурентне формуле

$$J_s(n) = \frac{n-1}{2\lambda} J_s(n-2) + \frac{(n-2)!!}{2^{\frac{n}{2}} (2\lambda)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (33)$$

при чему је  $J_s(1) = (2\sqrt{2}\lambda)^{-1}$ . На тај начин добијамо употребљавајући опет уобичајене спектроскопске нотације

$$\left. \begin{array}{ll} F^0(s, s) = 2e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & G^0(s, s) = 2e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ F^0(s, p) = \frac{5}{3} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & G^1(s, p) = e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ F^0(p, p) = \frac{3}{2} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & F^2(p, p) = \frac{5}{6} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ G^0(p, p) = \frac{3}{2} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & G^2(p, p) = \frac{5}{6} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ F^0(s, d) = \frac{43}{30} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & G^2(s, d) = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ F^0(p, d) = \frac{27}{20} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & F^2(p, d) = \frac{3}{4} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ G^1(p, d) = \frac{11}{12} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & G^3(p, d) = \frac{7}{12} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ F^0(d, d) = \frac{151}{120} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & F^2(d, d) = \frac{91}{120} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ F^4(d, d) = \frac{21}{40} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & G^0(d, d) = \frac{151}{120} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \\ G^2(d, d) = \frac{91}{120} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} & G^4(d, d) = \frac{21}{40} e^2 \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \end{array} \right\} \quad (34)$$

ПРОУЧАВАЊЕ ЈЕЗГРА „ОГЛЕДАЛА“ У СПРЕЗАЊУ  $jj$ . Применимо сад претходне формуле на језгра „огледала“ до завршетка  $p$ -љуске. На основу горњих образаца за сваки пар језгра „огледала“ можемо израчунати  $\Delta E_C$ ,  $R_C$  и  $R_M$  у функцији параметра  $v$ , при чему ћемо уместо параметра  $v$  радије употребљавати параметар

$$R = \sqrt{\frac{2}{v}}, \quad (35)$$

а из добијених израза можемо израчунати и однос  $R_C/R_M$ . Стављајући

$$R_M = r_0 A^{1/3}, \quad R_C = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{(\Delta E_C)_{\text{exp}}} \quad (36)$$

где  $(\Delta E_C)_{\text{exp}}$  означава експерименталну вредност кулоновске енергије, добијену из енергије  $\beta$ -распада, можемо  $r_0$  изразити у функцији од  $R_C/R_M$  и  $\Delta E_C$  у MeV

$$r_0 = \frac{1,739 \cdot 10^{-13} Z}{A^{1/3} (\Delta E_C)_{\text{MeV}} (R_C/R_M)}. \quad (37)$$

У случајевима  $A = 3, 5, 11, 13, 15, 17$  може се применити проста Slater-ова метода и добијају се следећи резултати.

а) Пар ( ${}_1H_2^3, {}_2He_1^3$ ). За конфигурацију  $ij$  ( $nljm_j$ ) другог језгра

$$(1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2) | (1 \ 0 \ 1/2 \ -1/2),$$

при чему смо пртом одвојили конфигурацију последњег протона којим се друго језгро разликује од првог, на основу наведених образаца добијамо

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_C = F^0(s, s) = 1,129 \frac{e^2}{R}; \\ R_C/R_M = 0,951; \quad r_0 = 1,658 \text{ ферми.} \end{aligned} \right\} (38)$$

б) Пар ( ${}_2He_3^5, {}_3Li_2^5$ ). Конфигурација

$$(1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2) (1 \ 0 \ 1/2 \ -1/2) | (1 \ 1 \ 3/2 \ 3/2)$$

даје

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_C = 2F^0(s, p) - \frac{1}{3} G^1(s, p) = 1,693 \frac{e^2}{R}; \\ R_C/R_M = 1,268; \quad r_0 \text{ неодређено,} \end{aligned} \right\} (39)$$

јер је енергија  $(\Delta E_C)_{\text{exp}}$  неодређена.

с) Пар ( ${}_5B_6^{11}, {}_6C_5^{11}$ ). За конфигурацију

$$(1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2) (1 \ 0 \ 1/2 \ -1/2) (1 \ 1 \ 3/2 \ 3/2) (1 \ 1 \ 3/2 \ 1/2) (1 \ 1 \ 3/2 \ -1/2) | \\ (1 \ 1 \ 3/2 \ -3/2)$$

имамо

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_C = 2F^0(s, p) + 3F^0(p, p) - \frac{1}{3} G^1(s, p) - \frac{1}{5} G^3(p, p) = 4,138 \frac{e^2}{R} \\ R_C/R_M = 1,096; \quad r_0 = 1,292 \text{ ферми.} \end{aligned} \right\} (40)$$

d) Пар ( ${}_6C_7^{13}$ ,  ${}_7N_8^{13}$ ). Са конфигурацијом

$$(1\ 0\ 1/2\ 1/2)(1\ 0\ 1/2\ -1/2)(1\ 1\ 3/2\ 3/2)(1\ 1\ 3/2\ 1/2)(1\ 1\ 3/2\ -1/2) \\ (1\ 1\ 3/2\ -3/2) | (1\ 1\ 1/2\ 1/2)$$

добија се

$$\Delta E_C = 2F^0(s, p) + 4F^0(p, p) - \frac{1}{3} G^1(s, p) - \frac{2}{5} G^2(p, p) = \\ = 4,891 \frac{e^2}{R}; \quad R_C/R_M = 1,095; \quad r_0 = 1,350 \text{ ферми.} \quad \left. \vphantom{\Delta E_C} \right\} (41)$$

e) Пар ( ${}_7N_8^{15}$ ,  ${}_8O_7^{15}$ ). Конфигурација

$$(1\ 0\ 1/2\ 1/2)(1\ 0\ 1/2\ -1/2)(1\ 1\ 3/2\ 3/2)(1\ 1\ 3/2\ 1/2)(1\ 1\ 3/2\ -1/2) \\ (1\ 1\ 3/2\ -3/2)(1\ 1\ 1/2\ 1/2) | (1\ 1\ 1/2\ -1/2)$$

даје

$$\Delta E_C = 2F^0(s, p) + 5F^0(p, p) - \frac{1}{3} G^1(s, p) - \frac{2}{5} G^2(p, p) = 5,737 \frac{e^2}{R}; \quad \left. \vphantom{\Delta E_C} \right\} (42) \\ R_C/R_M = 1,078; \quad r_0 = 1,313 \text{ ферми.}$$

f) Пар ( ${}_8O_9^{17}$ ,  ${}_9F_8^{17}$ ). Са конфигурацијом

$$(1\ 0\ 1/2\ 1/2)(1\ 0\ 1/2\ -1/2)(1\ 1\ 3/2\ 3/2)(1\ 1\ 3/2\ 1/2)(1\ 1\ 3/2\ -1/2) \\ (1\ 1\ 3/2\ -3/2)(1\ 1\ 1/2\ 1/2)(1\ 1\ 1/2\ -1/2) | (1\ 2\ 5/2\ 5/2)$$

добијамо

$$\Delta E_C = 2F^0(s, d) + 6F^0(p, d) - \frac{1}{5} G^2(s, d) - \frac{2}{5} G^1(p, d) - \frac{9}{35} G^3(p, d) = \\ = 5,841 \frac{e^2}{R}; \quad (43)$$

$$R_C/R_M = 1,201; \quad r_0 = 1,269 \text{ ферми.}$$

У случајевима  $A=7, 9$  имамо дегенерацију у отсуству пертурбације и овде морамо применити општу Slater-ову методу. Резултати су следећи.

g) Пар ( ${}_3\text{Li}_4^7$ ,  ${}_4\text{Be}_3^7$ ). Узмимо за  ${}_3\text{Li}_4^7$  конфигурацију

$$(1\ 0\ 1/2\ 1/2)\ (1\ 0\ 1/2\ -1/2)\ (1\ 1\ 3/2\ 3/2)$$

и израчунајмо његову кулоновску енергију  $E_C({}_3\text{Li}_4^7)$ . За  ${}_4\text{Be}_3^7$  имамо следеће могућности

$$J=2 \quad M = -2, -1, 0, 1, 2;$$

$$J=0 \quad M = 0.$$

За конфигурације

$$M=2 \quad (1\ 0\ 1/2\ 1/2)\ (1\ 0\ 1/2\ -1/2)\ (1\ 1\ 3/2\ 3/2)\ (1\ 1\ 3/2\ 1/2)$$

$$M=0 \quad (1\ 0\ 1/2\ 1/2)\ (1\ 0\ 1/2\ -1/2)\ (1\ 1\ 3/2\ 3/2)\ (1\ 1\ 3/2\ -3/2)$$

$$(1\ 0\ 1/2\ 1/2)\ (1\ 0\ 1/2\ -1/2)\ (1\ 1\ 3/2\ 1/2)\ (1\ 1\ 3/2\ -1/2)$$

израчунајмо одговарајуће кулоновске енергије, имајући у виду да се стање  $M=2$  јавља само при  $J=2$ , а стање  $M=0$  при  $J=0$  и  $J=2$

$$E_{C(M=2)} = E_{C(J=2)}, \quad E_{C(M=0)} = E_{C(J=0)} + E_{C(J=2)}, \quad (44)$$

а одавде се добија  $E_{C(J=0)}$  и  $E_{C(J=2)}$ . Пошто је експериментална вредност  $J=0$ , имамо

$$E_C({}_4\text{Be}_3^7) = E_{C(J=0)}. \quad (45)$$

На тај начин после извршених рачуна добијамо

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_C &= 2F^0(s, p) + F^0(p, p) + \frac{1}{5} F^2(p, p) - \frac{1}{3} G^1(s, p) = \\ &= 2,632 \frac{e^2}{R}; \\ R_C/R_M &= 1,107; \quad r_0 = 1,497 \text{ ферми.} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

h) Пар ( ${}_4\text{Be}_5^9$ ,  ${}_5\text{B}_4^9$ ). За  ${}_4\text{Be}_5^9$  имамо исти број протона као и за  ${}_4\text{Be}_3^7$ , те је резултат исти као у претходном случају

$$E_C({}_4\text{Be}_5^9) = E_C({}_4\text{Be}_3^7). \quad (47)$$

За  ${}_5\text{B}_4^9$  узмимо конфигурацију

$$(1\ 0\ 1/2\ 1/2)\ (1\ 0\ 1/2\ -1/2)\ (1\ 1\ 3/2\ 3/2)\ (1\ 1\ 3/2\ 1/2)\ (1\ 1\ 3/2\ -1/2)$$

и израчунајмо његову кулоновску енергију  $E_C({}_5B_4^0)$ . После извршених рачуна добијамо

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_C &= 2F^0(s, p) + 2F^0(p, p) - \frac{1}{3} G^1(s, p) - \frac{2}{5} G^2(p, p) = \\ &= 3,196 \frac{e^2}{R}; \\ R_C/R_M &= 1,163; \quad r_0 \text{ неодређено,} \end{aligned} \right\} (48)$$

јер је и овде енергија  $(\Delta E_C)_{\text{exp}}$  неодређена.

ПРОУЧАВАЊЕ ЈЕЗГРА „ОГЛЕДАЛА“ У СПРЕЗАЊУ  $LS$ . У случајевима а, б, е и ф имамо један протон у вишку или у мањку у односу на последњу подљуску. Тада су резултати у спрезању  $LS$  исти као претходни резултати у спрезању  $jj$ .

У случајевима д и г постоји дегенерација у отсуству пертурбације. Стања су тада одређена и рачун показује да се резултати само мало разликују од резултата у спрезању  $jj$ .

Међутим у случајевима с и h стања у спрезању  $LS$  нису одређена, јер имамо смешу могућих стања. Тада се могу дати само доње и горње границе за  $\Delta E_C$  и одговарајуће границе за  $R_C/R_M$  и  $r_0$ .

Узмимо као пример пар  $({}_5B_6^{11}, {}_6C_5^{11})$ . За  ${}_5B_6^{11}$  имамо следеће могуће конфигурације  $(nlm, s)$

$$M = \pm 2 \quad (1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2) \ (1 \ 0 \ 1/2 \ -1/2) \ (1 \ 1 \ 0 \ \pm 1/2) \ (1 \ 1 \ \pm 1 \ 1/2) \\ (1 \ 1 \ \pm 1 \ -1/2),$$

$$M = \pm 1 \quad (1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2) \ (1 \ 0 \ 1/2 \ -1/2) \ (1 \ 1 \ -1 \ \pm 1/2) \ (1 \ 1 \ 1 \ 1/2) \\ (1 \ 1 \ \pm 1 \mp 1/2),$$

$$(1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2) \ (1 \ 0 \ 1/2 \ -1/2) \ (1 \ 1 \ 0 \ 1/2) \ (1 \ 1 \ 0 \ -1/2) \\ (1 \ 1 \ \pm 1 \ \pm 1/2),$$

$$M = 0 \quad (1 \ 0 \ 1/2 \ 1/2) \ (1 \ 0 \ 1/2 \ -1/2) \ (1 \ 1 \ 0 \ \pm 1/2) \ (1 \ 1 \ -1 \ \pm 1/2) \\ (1 \ 1 \ 1 \ \pm 1/2).$$

Анализом ових конфигурација долазимо до закључка да имамо стање  $L=2$  са мултиплицитетом 2, стање  $L=1$  са мултиплицитетом 2 и стање  $L=0$ ,  $J=3/2$  са мултиплицитетом 4, која се у уобичајеној спектроскопској нотацији обележавају са  ${}^2D$ ,  ${}^2P$  и  ${}^4S_{3/2}$ .

Стање језгра  ${}_5B_6^{11}$  је тада смеша ових могућих стања у интермедиарном спрезању са непознатим коефицијентима статистичке тежине, што и јесте прави разлог неодређености стања. Пошто је експериментална вредност  $J=3/2$ , смеша ових стања има облик

$$\left. \begin{aligned} \alpha \cdot {}^2D_{3/2} + \beta \cdot {}^2P_{3/2} + \gamma \cdot {}^4S_{3/2} \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Имајући у виду да се стање  $M_L=2$  јавља само при стању  ${}^2D$ , стање  $M_L=1$  при стањима  ${}^2D$  и  ${}^2P$ , а стање  $M_L=0$ ,  $M_S=3/2$  само при стању  ${}^4S_{3/2}$ , израчунајмо одговарајуће кулоновске енергије:

$$\left. \begin{aligned} E_{C(M_L=2)} = E_C({}^2D), \quad E_{C(M_L=1)} = E_C({}^2D) + E_C({}^2P), \\ E_{C(M_L=0, M_S=3/2)} = E_C({}^4S_{3/2}). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Одавде можемо израчунати  $E_C({}^2D)$ ,  $E_C({}^2P)$  и  $E_C({}^4S_{3/2})$  и после извршених рачуна добијамо

$$\left. \begin{aligned} E_C({}^2D) = 8,629 \frac{e^2}{R}, \quad E_C({}^2P) = 8,742 \frac{e^2}{R}, \\ E_C({}^4S_{3/2}) = 8,460 \frac{e^2}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

те је

$$8,460 \frac{e^2}{R} \leq E_C({}_5B_6^{11}) \leq 8,742 \frac{e^2}{R}. \quad (52)$$

На сличан начин за језгро  ${}_6C_5^{11}$  налазимо да су могућа стања  ${}^1D_2$ ,  ${}^3P$  и  ${}^1S_0$ . Тада сличним рачуном добијамо

$$\left. \begin{aligned} E_C({}^1D_2) = 12,803 \frac{e^2}{R}, \quad E_C({}^3P) = 12,690 \frac{e^2}{R}, \\ E_C({}^1S_0) = 12,972 \frac{e^2}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

те је

$$12,690 \frac{e^2}{R} \leq E_C({}_6C_5^{11}) \leq 12,972 \frac{e^2}{R}. \quad (54)$$

Одавде можемо закључити само да диференција њихових кулоновских енергија лежи у границама

$$3,948 \frac{e^2}{R} \leq \Delta E_C \leq 4,512 \frac{e^2}{R}. \quad (55)$$

а овим вредностима су одређене и границе у којима леже вредности  $R_C/R_M$  и  $r_0$ .



ЗАКЉУЧАК. — Скупимо све добијене резултате у спрезању  $jj$  у следећој табелици.

	Парови	$\Delta E_C \left( у \frac{e^2}{R} \right)$	$R_C/R_M$	$r_0$ (у ферми)
1	$({}_1H_2^3, {}_2He_3^3)$	1,129	0,951	1,658
2	$({}_2He_3^5, {}_3Li_2^5)$	1,693	1,268	—
3	$({}_3Li_4^7, {}_4Be_3^7)$	2,632	1,107	1,497
4	$({}_4Be_5^9, {}_5B_4^9)$	3,196	1,163	—
5	$({}_5B_6^{11}, {}_6C_5^{11})$	4,138	1,096	1,292
6	$({}_6C_7^{13}, {}_7N_6^{13})$	4,891	1,095	1,350
7	$({}_7N_8^{15}, {}_8O_7^{15})$	5,737	1,078	1,313
8	$({}_8O_9^{17}, {}_9F_8^{17})$	5,841	1,201	1,269

Из ове табелице можемо извести следеће закључке:

1) Вредности  $R_C/R_M$  опадају, изузев при завршавању  $s$  и  $p$  љуске и у средини подљуске  $p_{3/2}$ , где показују нагли пораст, и при завршавању подљуске  $p_{3/2}$ , где стационарирају.

2) Вредности  $r_0$  показују слично понашање, изузев што показују дисконтинуитет при завршавању  $p_{3/2}$  подљуске и што не показују дисконтинуитет при завршавању  $p$  љуске; ове вредности су у врло доброј сагласности са резултатима које су добили Carlson и Talmi.

На крају, желео бих да изразим своју захвалност професору Roger Nataf-у, под чијим сам руководством радио на овом проблему у институту Collège de France у Паризу.

(Саопшћено 13 новембра 1957)

#### БИБЛИОГРАФИЈА

- [1] Hofstadter — Electron Scattering and Nuclear Structure, *Rev. of Mod. Phys.* **28** (1956), 214.
- [2] B. Jancovici — Coulomb Energy and Nuclear Radius, *Phys. Rev.* **95** (1954), 389.
- [3] J. Slater — The Theory of Complex Spectra, *Phys. Rev.* **34** (1929), 1293.
- [4] B. Carlson and J. Talmi — Pairing Effects in Coulomb Energies and the Radii of Mirror Nuclei, *Phys. Rev.* **96** (1954), 436.
- [5] M. Mayer and H. Jensen — Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, New York 1955.
- [6] E. Feenberg — Shell Theory of the Nucleus, Princeton 1955.
- [7] E. Condon and G. Shortley — The Theory of Atomic Spectra, Cambridge 1953.

---

LES RAYONS DES NOYAUX „MIROIRS“ AU POINT  
DE VU DU MODELE EN COUCHE

Ђ. MUŠICKI (Beograd)

En suivant les travaux de Jancovici, Carlson et Talmi, on a donné une application du modèle en couche pour déterminer le rapport du rayon coulombien à rayon mésonique et le rayon du noyau équivalent à un nucleon pour les noyaux „miroirs“ jusqu'à la fin de la couche  $p$ . Dans ce calcul on a supposé que le potentiel moyen a la forme du potentiel d'oscillateur harmonique isotropique et on a utilisé la méthode de Slater pour calculer l'énergie coulombienne du noyau, parallèlement dans le couplage  $jj$  et dans le couplage  $LS$ . Dans le couplage  $jj$  les résultats sont données dans le tableau et dans le couplage  $LS$  les résultats sont les mêmes ou un peu différents, mais dans certains cas on a obtenu les résultats indéfinis, c'est dans les cas du couplage intermédiaire des états possibles.