Зборник радова САН LXIII — Математички институт САН књ. 7, 1959
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LXIII
Institut Mathématique № 7, 1959

В. МАРИЋ

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ FOURIER-ОВИХ ИНТЕГРАЛА

УВОД

0.1. У различитим гранама анализе често је за доказ појединих теорема потребно проценити функције комплексне променљиве z, дефинисане интегралом

$$G(z)=\int_K \exp\{g(t)+zt\}\,dt.$$

Специјални случај $g(t)=-t^{\alpha}$ је нарочито много рађен. Тако су, на пример, Hardy и Littlewood [7], у вези с проблемом Waring-а, дали асимптотски развитак за случај

$$F_k(z)=\int_0^{\infty}\exp\{-u^k+zu\}\,du,$$

где је k природан број већи од јединице, у једном делу комплексне z-равни. Bakhoom [2] је проширио њихов резултат на читаву z-раван.

Pólya (упореди [9], стр. 191—210) и Täcklind [10] су, у вези с парцијалним диференцијалним једначинама, развили у асимптотски ред кад $t\to\infty$ функцију

$$H(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-tu^{2m}+ixu\}\,du,$$

где је m природан број већи или једнак 2.[1] Приметимо да је за $k=2m$

$$F_{2m}\left(\frac{ix}{t^{1/2m}}\right)+F_{2m}\left(\frac{-ix}{t^{1/2m}}\right)=t^{1/2m}H(t).$$

[1] Код Евграфова [5], стр. 119—120 се, као пример, налази први члан развитка за $H(t)$.

Wright [11, 12] је посматрао функције које претстављају генерализацију Bessel-ових функција а дефинисане су интегралом

$$\Phi(\rho;\beta;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C u^{-\beta}\exp\left(u+\frac{z}{u^\rho}\right)du,$$

где је β произвољан комплексан број, $\rho>-1$, а C је контура која полази од $-\infty$ на реалној оси, обилази почетак у позитивном смеру и враћа се у $-\infty$.

Авакумовић [1] је, специјално, користио процену функције

$$\Phi\left(-\frac{1}{k};\,0\,;-z\right)\equiv\chi(z)=\int_0^\infty \exp\{-u^k-ze^{i\pi/k}u\}\,du,\quad k\geqslant 2,$$

за доказ неких теорема Tauber-ове природе.

0.2. Нека је

$$P(y)=\sum_{\nu=0}^{2m-1}a_\nu y^{2m-\nu}$$

полином са произвољним комплексним коефицијентима a_ν ($\nu=1, 2,\dots, 2m-1$) и $a_0=1$ тада Fourier-ов интеграл

$$J_1(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-P(x)+zx}\,dx$$

претставља целу функцију од z.

Предмет овог рада су два проблема:

1° Испитати да ли постоји нека једноставна комбинација познатих функција којом се функција $J_1(z)$ може изразити.

2° Због различитих примена у анализи, наћи асимптотски развитак функције $J_1(z)$ у целој комплексној z-равни, имајући нарочито у виду примену на једнодимензионални случај најопштије параболичне диференцијалне једначине с константним коефицијентима, због чега се, уосталом, испитује баш овај тип интеграла.

0.3. Одговор на оба ова питања добићемо доста једноставно из прве теореме из Главе I. Та теорема је посредног карактера, а смисао јој је у томе да се функција $J_1(P'(y))$ изрази у облику

$$J_1(P'(y))=e^{-P(y)+P'(y)y}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\Phi_\nu(y)+\tilde{R}_n(y)\right\}\tag{0.1}$$

где су $\Phi_\nu(y)$ функције које је лако развити по степенима од $1/y$ а $\tilde{R}_n(y)$ је остатак који се може довољно оштро проценити и по промењљивој y и по n.

За доказ ове теореме користи се једна варијанта методе седласте тачке која једним делом, у основи потиче од Bakhoom-а [2].

Користећи процену остатка $\tilde{R}_n(y)$ по n из наведене теореме, показаћемо у Глави II да се функција $J_1(P'(y))$ може претставити као производ једне функције експоненцијалног типа и једног конвергентног реда Wright-ових генералисаних хипергеометриских функција, што претставља одговор на прво питање.

У истој глави ћемо, поред тога, показати да у читавој комплексној z-равни важи асимптотски развитак

$$(0.2)\quad J_1(z)=\exp\left\{\sum_{\nu=0}^{2m-1} D_\nu z^{\frac{2m-\nu}{2m-1}}\right\}\left(\sum_{\nu=0}^{N-1}\alpha_\nu z^{-\frac{m-1+\nu}{2m-1}}+O\left(z^{-\frac{m-1+N}{2m-1}}\right)\right)$$

и дати поступак за израчунавање коефицијената D_ν, α_ν, $\nu=0,1,\ldots$, чиме је одговорено на друго питање. Овај резултат добива се из обрасца (0.1) на следећи начин: Ако све функције $\Phi_\nu(y)$ развијемо по степенима од $1/y$ и саберемо их, на основу процене остатка $\tilde{R}_n(y)$ по y добићемо асимптотски развитак функције $J_1(P'(y))$ по степенима од $1/y$. Користећи развитак функције $y=y(x)$ дефинисане једначином $z=P'(y)$, по степенима од $1/z$, добивамо резултат (0.2).

Напоменимо да се у случају да полином $P(y)$ има реалне коефицијенте, исти развитак може добити и методом стационарне фазе Van der Corput-а [6].

У Глави III, показаћемо, као примену резултата (0.1) и (0.2) да се фундаментално решење $K(x;t)$ горе поменуте диференцијалне једначине може развити у овај асимптотски ред

$$K(x,t)=C(x)\,t^{-\frac{1}{2(2m-1)}}\exp\left\{A(ix)^{\frac{2m}{2m-1}}t^{-\frac{1}{2m-1}}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{\nu=0}^{N-1}\alpha_\nu^{*}(x)\,t^{\frac{\nu}{2m-1}}+O\left(t^{\frac{N}{2m-1}}\right)\right\}$$

где је $\Re\{t\}>0$, $t\to 0$.

Доказ се заснива на чињеници да се $K(x;t)$ може изразити интегралом типа $J_1(z)$, при чему су сада сви коефицијенти a_ν (осим првог) полинома $P(y)$ одређене функције од z. Основна теорема из Главе I важиће и у овом случају. Поступак којим се из обрасца (0.1) добива асимптотски развитак је, међутим, нешто сложенији него мало пре, због зависности коефицијента a_ν од z.

ГЛАВА I

1.1. Да бисмо избегли понављања и олакшали читање, увешћемо ове дефиниције и ознаке:

Нека је $P(x)$ полином степена $2m$ са произвољним комплексним коефицијентима a_ν $(\nu=1,2,\ldots,2m-1)$ и $a_0=1$, тј.

a)
$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{2m-1} a_\nu x^{2m-\nu}$$

Ставимо ли

$$f(x;y)=\sum_{\nu=3}^{2m-1}\frac{P^{(\nu)}(y)\,y^\nu}{\nu!}\,x^\nu,$$

онда су за $i=3p,3p+1,\ldots,(2m-1)p$ и $p=0,1,2,\ldots,2n$ полиноми $Q_{i,p}(y)$ дефинисани релацијама

b)
$$\{f(x;y)\}^p=\sum_{i=3p}^{(2m-1)p} Q_{i,p}(y)\,x^i.$$

Ради једноставнијег писања дефинисаћемо још

$$Q_{i,p}(y)\equiv 0 \quad \text{за} \quad i>(2m-1)\,p.$$

Поред тога, увешћемо и ове ознаке

c)
$$A_i(y)=\sum_{p=1}^{[i/3]}\frac{(-1)^p}{p!}\,Q_{i,p}(y), \qquad i\geqslant 3;$$

за $i=0,1,2$ нека је по дефиницији

$$A_0(y)=1, \qquad A_1(y)=A_2(y)\equiv 0.$$

d)
$$\Omega_{2k}(y)=2y\int_{L\varphi}\exp\left\{-\frac{P''(y)\,y^2}{2!}\,x^2-y^{2m}x^{2m}\right\}x^{2k}\,dx,$$

$$-\varphi-\frac{\pi}{4m}<\arg y<-\varphi+\frac{\pi}{4m},$$

где је L_φ полуправа из координатног почетка која са позитивним правцем реалне осе заклапа угао φ.

e) $$J_1(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(t)+zt}\,dt, \qquad J_1(P'(y))=J(y).$$

1.1.1. Да би смисао теореме 1.1 коју ћемо прво формулисати и доказати био јаснији, показаћемо да се функције $\Omega_{2k}(y)$ дефинисане обрасцем d) могу изразити помоћу познатих специјалних функција.

Прво приметимо да је

$$\Omega_{2k}(y)=\frac{2}{y^{2k}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{P''(y)\omega^2}{2}-\omega^{2m}}\,\omega^{2k}\,d\omega \tag{1.1}$$

јер се интеграл на десној страни обрасца d) добива из (1.1) у области $-\pi/4m<\arg y<\pi/4m$ сменом $\omega=yx$, $y>0$, а у осталом делу y—равни аналитичким продужењем интеграла који се добио сменом, обрћући сукцесивно његову путању интеграције за угао $\varphi=\arg x$.

Посматрајмо, затим, интеграл

$$F(-t)=\int_0^{\infty} e^{tu-u^m}\,u^{k-1/2}\,du. \tag{1.2}$$

Ако функцију e^{tu} под знаком интеграла развијемо у ред и интегришемо га члан по члан, што је очевидно дозвољено (в. [3], стр. 176–180), после смене $u^m=v$ у интегралу (1.2) добићемо

$$F(-t)=\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty} e^{-v}\,v^{\frac{2k+2n+1}{2m}-1}\,dv$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\,\frac{\Gamma\left(\frac{2k+2n+1}{2m}\right)}{\Gamma(n+1)}.$$

Према томе је

$$F(-t)=\frac{1}{m}\,{}_1F_0(t), \tag{1.3}$$

где је ${}_1F_0(t)$ специјалан случај Wrigt-ове генерализације хипергеометриске функције

$$ {}_pF_q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{\Gamma(n+1)} t^n , $$

при чему је

$$ f(x) = \prod_{\nu=0}^{p} \Gamma(\beta_\nu + \alpha_\nu x) \left\{ \prod_{\nu=1}^{q} \Gamma(\mu_\nu + \rho_\nu x) \right\}^{-1} ; $$

бројеви $\alpha_1, \ldots, \rho_1, \ldots$, су реални и $k = 1 + \rho_1 + \ldots + \rho_q - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p > 0$ [13].

Из (1.1) и (1.3) следи непосредно да је

(1.4) $$ \Omega_{2k}(y) = \frac{1}{m y^{2k}} \, {}_1F_0 \left\{ -\frac{P''(y)}{2} \right\} $$

са $\alpha_1 = 1/m$, $\beta_1 = (2k+1)/2m$.

1.2. Нека су C_0, C_1, C_2, ..., позитивне константе које зависе само од m уколико није наглашено друкчије, и нека је y_0 неки довољно велики позитиван број. Доказаћемо прво ову основну теорему:

ТЕОРЕМА 1.1. *Ставимо ли*

f) $$ J(y) = e^{-P(y) + yP'(y)} \left\{ \sum_{k=0}^{(2m-1)n} A_{2k}(y)\, \Omega_{2k}(y) + \tilde{R}_n(y) \right\}, $$

тада постоје фиксирани бројеви $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *такви да за све* y *области*

$$ D: \quad \begin{aligned} & -\frac{\pi}{4m}\frac{m+1}{m-1} < \arg y < \frac{\pi}{4m}\frac{m+1}{m-1} \\ & \pi - \frac{\pi}{4m}\frac{m+1}{m-1} < \arg y < \pi + \frac{\pi}{4m}\frac{m+1}{m-1} \end{aligned} \qquad |y| > y_0 $$

и сваки природан број n, *важе неједначине*

$$ |\tilde{R}_n(y)| < \begin{cases} C_1 |y|^{-m(2n+2)+1} n^{\alpha n} \\ C_2 |y|^{2m(2n+1)+1} n^{-\beta n} \end{cases} . $$

Доказ теореме 1.1 заснива се на ове три леме:

1.3. ЛЕМА 1.1. *Нека је* $Z_1 = X_1 + iY_1$, $Z_2 = X_2 + iY_2$

$$e^{-Z_1} = e^{-Z_2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(Z_2 - Z_1)^p}{p!} + R_n,$$

где је

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} (Z_2 - Z_1)^n e^{-(Z_1 - Z_2)t - Z_2} dt.$$

Тада је

$$|R_n| \leqslant \frac{|Z_2 - Z_1|^n}{n!} e^{-\mathrm{Min}(X_1, X_2)}.$$

ЛЕМА 1.2. *Нека је* $\arg y = \theta$, $\arg x = \varphi$ *и*

$$z_1 = \sum_{\nu=2}^{2m} \frac{P^{(\nu)}(y)\, y^\nu}{\nu!} x^\nu, \qquad z_2 = \frac{P''(y)\, y^2}{2!} x^2 + y^{2m} x^{2m};$$

тада је

$$y \int_N e^{-z_2} \sum_{p=0}^{2n} \frac{(-1)^p}{p!} (z_1 - z_2)^p dx = \sum_{k=0}^{(2m-1)n} A_{2k}(y)\, \Omega_{2k}(y),$$

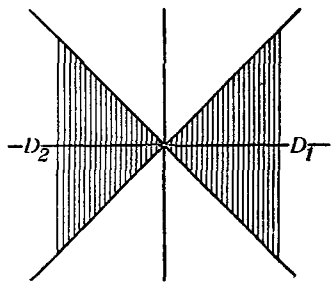
при чему је N *права која заклапа угао* φ *са позитивним правцем реалне осе и*

$$-\frac{\pi}{4m} < (\theta + \varphi) < \frac{\pi}{4m}.$$

ЛЕМА 1.3. *Нека су функције*

$$z_1 = z_1(x; y); \qquad z_2 = z_2(x; y)$$

дефинисане као у леми 1.2; *тада за све* y *у области*



Сл. 1

$$D_1: \qquad -\frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1} < \arg y < \frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1}, \qquad |y| > y_0$$

(в. сл. 1) *важе неједначине* $\Re\{z_1\}, \Re\{z_2\} \geqslant C_0 |y|^{2m} \mathrm{Max}\{|x|^2, |x|^{2m}\}$, *под претпоставком да за* θ *и* φ *важе релације*

$$-\frac{\pi}{4m} < \theta + \varphi < \frac{\pi}{4m}, \qquad -\frac{\pi}{4} < m\theta + \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

1.4. *ДОКАЗ ТЕОРЕМЕ* 1.1. Доказаћемо прво да теорема важи у области D_1.

1° Да бисмо за процену остатка $\tilde{R}_n(y)$ могли употребити методу седласте тачке, трансформисаћемо $J(y)$ на погоднији облик. Извршимо, стога, у интегралу којим је функција $J(y)$ дефинисана смену $t = yu$; тако ћемо добити

$$J(y) = y\, e^{-P(y) + P'(y)y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(yu) + P'(y)\, yu + P(y) - P'(y)y}\, du.$$

Приметимо да овај образац важи не само за реалне y већ и за све комплексне $y = |y|\, e^{\theta i}$ области $-\pi/4m < \theta < \pi/4m$ јер горњи интеграл у тој области претставља аналитичку функцију од y. Да бисмо важност горњег обрасца проширили на читаву комплексну раван, потребно је да аналитички продужимо интеграл на десној страни горњег обрасца на читаву комплексну y-раван. Обрнимо, стога, користећи Cauchy-ев став, његову путању интеграције за угао $\varphi = \arg u$, што је дозвољено кадгод су θ и φ везани релацијом $-\pi/2 < 2m(\theta + \varphi) < \pi/2$. Ако са M обележимо тако добивену праву која заклапа угао φ са позитивним правцем реалне осе, добићемо да је

$$J(y) = y\, e^{-P(y) + P'(y)y} \int_{M} e^{-P(yu) + P'(y)\, yu + P(y) - P'(y)y}\, du,$$

$$-\frac{\pi}{2} < 2m(\theta + \varphi) < \frac{\pi}{2}, \tag{1.6}$$

при чему интеграл на десној страни овог обрасца претставља тражено аналитичко продужење интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(yu) + P'(y)\, yu + P(y) - P'(y)y}\, du$$

у читаву комплексну y-раван.

Седласте тачке су, у овом случају, решења једначине

$$\frac{d}{du}\{-P'(yu) + P'(y)\, yu + P(y) - P'(y)\, y\} = 0.$$

Искористићемо ону седласту тачку која је реална и налази се у тачки $u=1$. Ако, стога, у интегралу на десној страни обрасца (1.6) извршимо смену $u=1+x$, добићемо да је

$$J(y)=e^{-P(y)+P'(y)y}\, I(y),$$

где смо ставили

$$I(y)=y\int_N e^{-(z_1-z_2)-z_2}\,dx,$$

при чему смо са N обележили праву која се добива применом Cauchy-евог става паралелним померањем праве M за $+1$, и

$$\begin{aligned} z_1 &\equiv z_1(x;y)=P(y+xy)-P'(y)\,y\,(1+x)-P(y)+P'(y)\,y, \\ z_2 &\equiv z_2(x;y)=\frac{P''(y)\,y^2}{2}x^2+y^{2m}x^{2m}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Како је

$$P(y+xy)=\sum_{\nu=0}^{2m}\frac{P^{(\nu)}(y)\,y^\nu}{\nu!}x^\nu,$$

то се $z_1(x;y)$ може симетричније писати овако

$$z_1(x;y)=\sum_{\nu=2}^{2m}\frac{P^{(\nu)}(y)\,y^\nu}{\nu!}x^\nu. \tag{1.8}$$

Ако сада функцију $e^{-(z_1-z_2)}$ у интегралу $I(y)$ развијемо по Taylor-овом обрасцу задржавајући се код $2n$-тог члана, добићемо да је

$$I(y)=\tilde{J}(y)+\tilde{R}_n(y),$$

где смо ставили

$$\tilde{J}(y)=y\int_N e^{-z_2}\sum_{p=0}^{2n}\frac{(-1)^p}{p!}(z_1-z_2)^p\,dx,\quad \tilde{R}_n(y)=y\int_N R_{2n+1}(x;y)\,dx \tag{1.9}$$

при чему је, као што је познато

$$R_{2n+1}(x;y)=\frac{1}{(2n)!}\int_0^1(1-t)^{2n}(z_1-z_2)^{2n+1}e^{-z_2-(z_1-z_2)t}\,dt.$$

На основу леме 1.2 је

$$\tilde{J}(y)=\sum_{k=0}^{(2m-1)n}A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y).$$

2^0 Преостало је још да се процени $\tilde{R}_n(y)$ за произвољно y области D_1.

Како је, према дефиницији функција z_1 и z_2

$$|z_1-z_2|^{2n+1} \leqslant C_3\,|y|^{2m(2n+1)}\ \mathrm{Max}\ \{|x|^{3(2n+1)},\ |x|^{(2m-1)(2n+1)}\}$$

то је на основу лема 1.1 и 1.3

$$|R_{2n+1}(x;y)| \leqslant \frac{C_3}{(2n+1)!}|y|^{2m(2n+1)}\ \mathrm{Max}\ \{|x|^{3(2n+1)},\ |x|^{(2m-1)(2n+1)}\}.$$

$$\cdot \exp\,[-C_0|y|^{2m}\ \mathrm{Max}\ \{|x|^2,\ |x|^{2m}\}]. \tag{1.10}$$

Сада лако можемо проценити $\tilde{R}_n(y)$:

Како је према (1.9)

$$|\tilde{R}_n(y) \leqslant 2|y|\int_0^\infty |R_{2n+1}(x;y)|\,dx = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

то је на основу (1.10)

$$\int_0^1 \leqslant \frac{2C_3|y|^{2m(2n+1)+1}}{(2n+1)!}\int_0^1 |x|^{3(2n+1)}\,e^{-C_0|y|^{2m}|x|^2}\,dx = \tag{1.11}$$

$$= \frac{C_4(n)\,|y|^{-m(2n+2)+1}}{(2n+1)!}\int_0^{C_0|y|^{2m}} u^{3n+1}\,e^{-u}\,du,$$

где је $C_4(n) = C_3\,C_0^{-(3n+2)}$.

Из обрасца (1.11) следи, с једне стране, да је

$$\int_0^1 \leqslant C_4(n)\frac{\Gamma(3n+2)}{\Gamma(2n+2)}|y|^{-m(2n+2)+1}. \tag{1.12}$$

Имајући у виду вредност константе $C_4(n)$ добива се из (1.12) на основу Стирлинговог обрасца да је

$$\int_0^1 \leqslant C_5\,n^{\alpha_1 n}\,|y|^{-m(2n+2)+1}, \tag{1.13}$$

где је α_1 одређен позитиван број.

Из (1.11) добивамо, с друге стране, да је

$$\int_0^1 \leqslant \frac{C_8 \, |y|^{2m(2n+1)+1}}{(6n+4)(2n+1)!}. \tag{1.14}$$

На основу Стирлинговог обрасца постоји позитиван број β_1 такав да је према (1.14)

$$\int_0^1 \leqslant C_6 \, n^{-\beta_1 n} \, |y|^{2m(2n+1)+1}. \tag{1.15}$$

На сличан начин процениһемо и други интеграл $\int_1^\infty$.

На основу (1.10) је

$$\int_1^\infty \leqslant \frac{C_8 \, |y|^{2m(2n+1)+1}}{(2n+1)!} \int_1^\infty |x|^{(2m-1)(2n+1)} e^{-C_0 |y|^{2m} |x|^{2m}} \, dx \tag{1.16}$$

одакле сменом $C_0 \, |y|^{2m} \, |x|^{2m} = t$ добивамо

$$\int_1^\infty \leqslant \frac{C_7(n) \, |y|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{C_0 |y|^{2m}}^\infty t^{\frac{2m-1}{m} n} e^{-t} \, dt, \tag{1.17}$$

где је

$$C_7(n) = \frac{C_8}{2m} C_0^{-\frac{(2m-1)(2n+1)+1}{2m}}.$$

Ако у интегралу на десној страни обрасца (1.17) експоненту од t додамо и одузмемо $2n(m+1)+2m$, добиһемо да је

$$\int_1^\infty \leqslant C_7(n) \, |y|^{-m(2n+2)+1} \, \frac{\Gamma\left(\frac{2m-1}{m} n + 2n(m+1) + 2m\right)}{\Gamma(2n+2)}. \tag{1.18}$$

Имајуһи у виду вредност константе $C_7(n)$ добива се из (1.18) на основу Stirling-овог обрасца да је

$$\int_1^\infty \leqslant C_8 \, n^{\alpha_2 n} \, |y|^{-m(2n+2)+1}, \tag{1.19}$$

где је $\alpha_2 > 0$ одређен позитиван број.

Поред тога, из (1.17) следи непосредно да је

$$\int_1^\infty \leqslant C_7(n)\,|y|^{2n+1}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{2m-1}{m}\,n+1\right)}{\Gamma(2n+2)}. \tag{1.20}$$

На основу Stirling-овог обрасца постоји позитиван број β_2 такав да је према (1.20)

$$\int_1^\infty \leqslant C_9\,|y|^{2n+1}\,n^{-\beta_2 n}. \tag{1.21}$$

Обрасци (1.13), (1.15), (1.19) и (1.21) заједно дају

$$|\tilde{R}_n(y)| \leqslant \begin{cases} C_1\,|y|^{-m(2n+2)+1}\,n^{\alpha n} \\ C_2\,|y|^{2m(2n+1)+1}\,n^{-\beta n}, \end{cases}$$

где је $\alpha = \operatorname{Max}\{\alpha_1, \beta_2\}$ и $\beta = \operatorname{Min}\{\beta_1, \beta_2\}$, чиме је доказ теореме 1.1 завршен у области D_1.

3⁰ Да бисмо доказали да теорема 1.1 важи и у области

$$D_2: \qquad \pi - \frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1} < \arg y < \pi + \frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1}, \quad |y| > y_0$$

(в. сл. 1) посматрајмо интеграл

$$J_1(-z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(t)-zt}\,dt.$$

Ако у овом интегралу заменимо t са $-t$ и ставимо $\bar{P}(t) = P(-t)$, $z = \bar{P}'(y)$ добићемо

$$\bar{J}(y) \equiv J_1(-\bar{P}'(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\bar{P}(t)+\bar{P}'(y)\,t}\,dt.$$

Према теореми 1.1. биће у области D_1

$$\text{g)} \qquad \bar{J}(y) = e^{-\bar{P}(y)+\bar{P}'(y)\,y}\left\{\sum_{k=0}^{(2m-1)n} \bar{A}_{2k}(y)\,\bar{\Omega}_{2k}(y) + \bar{R}_n(y)\right\}.$$

где је, као и раније,

$$\bar{z}_1=\sum_{\nu=2}^{2m}\frac{\bar{P}^{(\nu)}(y)\,y^{\nu}}{\nu!}\,x^{\nu},\qquad \bar{z}_2=\frac{\bar{P}''(y)\,y^2}{2!}\,x^2+y^{2m}\,x^{2m},$$

$$\bar{\Omega}_{2k}(y)=2\,y\int_{L_{\varphi}}e^{-\bar{z}_2}\,x^{2k}\,dx,$$

$$\bar{A}_i(y)=\sum_{p=1}^{[i/3]}\bar{Q}_{i,\,p}(y)\,\frac{(-1)^p}{p!},\quad i\geqslant 3,\quad \bar{A}_0=1,\quad \bar{A}_1=\bar{A}_2\equiv 0.$$

$\bar{Q}_{i,\,p}(y)$ су коефицијенти уз x^i функције

$$\{f(x;y)\}^p=\left\{\sum_{\nu=3}^{2m-1}\frac{\bar{P}^{(\nu)}(y)\,y^{\nu}}{\nu!}\,x^{\nu}\right\}^p$$

и

$$\bar{R}_n(y)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{L_{\varphi}}dx\int_0^1(1-t)^{n-1}\,(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^n\,e^{-(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\,t-\bar{z}_2}\,dt,$$

при чему за остатак $\bar{R}_n(y)$ важе неједначине наведене у теореми 1.1.

Нека су, поред тога, функције z_1, z_2, $Q_{i,\,p}$, A_i, Ω_{2k} дефинисане као и раније. Како је

$$\bar{P}(y)=P(-y),\qquad \frac{\bar{P}^{(\nu)}(y)\,y^{\nu}}{\nu!}=\frac{P^{(\nu)}(-y)\,(-y)^{\nu}}{\nu!},$$

то је према горњој дефиницији функција $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$

$$\bar{z}_1(x;y)=z_1(x;-y),\qquad \bar{z}_2(x;y)=z_2(x;-y),$$

па према томе и

$$\bar{Q}_{2k,\,p}(y)=Q_{2k,\,p}(-y),\qquad \bar{A}_{2k}(y)=A_{2k}(-y),$$

односно

$$\bar{\Omega}_{2k}(y)=\Omega_{2k}(-y).$$

Следи да се образац g) добива из обрасца f) стављајући $y=-y$. Стога g) претставља аналитичко продужење функције $J(y)$ у области D_2. Овим је доказ теореме 1.1 завршен и преостало је још да се докажу леме 1.1 - 1.3.

1.5. Ради потпуности у излагању навешћемо и доказ леме 1.1 иако је он познат од раније.

1.5.1. Доказ леме 1.1. Како је

$$e^{(Z_2-Z_1)}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(Z_2-Z_1)^p}{p!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}(Z_2-Z_1)^n e^{-(Z_1-Z_2)t}\,dt,$$

то је

$$|R_n|\leqslant\frac{|Z_2-Z_1|^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}e^{-X_2-(X_1-X_2)t}\,dt.$$

Линеарна функција $X_2+(X_1-X_2)t$ достиже свој минимум у једној од крајњих тачака размака $0\leqslant t\leqslant 1$, па је

$$X_2+(X_1-X_2)\geqslant \mathrm{Min}\,(X_1,\ X_2+X_1-X_2)=\mathrm{Min}\,(X_1,\ X_2),$$

чиме је лема 1.1. доказана.

1.5.2. Доказ леме 1.2. За доказ је потребно функцију

$$\sum_{p=0}^{2n}\frac{(-1)^p}{p!}(z_1-z_2)^p=1+\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{i=3p}^{(2m-1)p}Q_{i,p}(y)\,x^i \tag{1.22}$$

која претставља полином по x уредити по растућим степенима од x.

Ставимо

$$\chi(x;y)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p}{p!}\sum_{i=3p}^{(2m-1)p}Q_{i,p}(y)x^i;$$

тада је очевидно

$$\chi(0;y)=\chi'(0;y)=\chi''(0;y)\equiv 0$$

и

$$\chi^{(i)}(0;y)=i!\sum_{p=1}^{[i/3]}\frac{(-1)^p}{p!}Q_{i,p}(y),\quad i\geqslant 3 \tag{1.23}$$

што је лако проверити индукцијом.

Како је функција $\chi(x;y)$ полином по x степена $2n(2m-1)$ то је према (1.23) на основу Mac Laurin-овог обрасца

$$\chi(x;y)=\sum_{i=3}^{2n(2m-1)}A_i(y)x^i \tag{1.24}$$

Из образаца (1.22), (1.23) и (1.24) следи да је

$$y\int_N e^{-z_2}\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^p}{p!}(z_1-z_2)^p\,dx=\sum_{i=3}^{2n(2m-1)}A_i(y)\,y\int_N e^{-z_2}x^i\,dx.$$

Како је још

$$y\int_N e^{-z_2}x^i\,dx=\begin{cases}\Omega_{2k}(y), & i=2k,\\ 0 & i=2k-1,\end{cases}\qquad k=2,3,\ldots$$

то је лема 1.2 доказана.

1.5.3. Доказ леме 1.3. 1° Да бисмо проценили с доње стране $\Re\{z_1\}$, писаћемо функцију

$$z_1(x;y)=\sum_{\nu=2}^{2m}\frac{P^{(\nu)}(y)\,y^\nu}{\nu!}x^\nu$$

у згоднијем облику.

Како је

$$P(y+xy)=\sum_{\nu=0}^{2m-1}a_\nu\,y^{2m-\nu}(1+x)^{2m-\nu}$$

то је

$$z_1(x;y)=\sum_{\nu=2}^{2m}a_{2m-\nu}\,y^\nu\{(1+x)^\nu-x\nu-1\},$$

односно

$$z_1(x;y)=\sum_{\nu=2}^{2m}a_{2m-\nu}\,y^\nu\,T_\nu(x), \tag{1.25}$$

где смо ставили

$$T_\nu(x)=(1+x)^\nu-\nu x-1.$$

Из

$$T_{2m}(x)=2m(2m-1)\,x^2\int_0^1(1-t)(1+xt)^{2m-2}\,dt, \tag{1.26}$$

где је $x=|x|e^{\varphi i}$, следи да је

$$\Re\{y^{2m}T_{2m}(x)\}=m(2m-1)|y|^{2m}|x|^{2m}\left\{e^{2m(\theta+\varphi)i}\int_0^1(1-t)\left(t+\frac{e^{-\varphi i}}{|x|}\right)^{2m-2}dt+\right.$$

$$\left.+e^{-2m(\theta+\varphi)i}\int_0^1(1-t)\left(t+\frac{e^{\varphi i}}{|x|}\right)^{2m-2}dt\right\},$$

где je $y=|y|e^{\theta i}$. Како je

$$e^{2m(\theta+\varphi)i}\left(t+\frac{e^{-\varphi i}}{|x|}\right)^{2m-2}+e^{-2m(\theta+\varphi)i}\left(t+\frac{e^{\varphi i}}{|x|}\right)^{2m-2}=$$

$$=2\sum_{\nu=0}^{2m-2}\binom{2m-2}{\nu}\frac{t^{2m-2-\nu}}{|x|^{\nu}}\cos(2m\theta+2m\varphi-\nu\varphi),$$

то je

(1.27) $$\Re\{y^{2m}T_{2m}(x)\}=|y|^{2m}|x|^{2m}\left\{\cos(2m\theta+2m\varphi)+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}.$$

На исти начин добивамо из обрасца (1.26) да je

$$\Re\{y^{2m}T_{2m}(x)\}=|y|^{2m}|x|^{2}\left\{\sum_{\nu=0}^{2m-2}\binom{2m-2}{\nu}|x|^{\nu}\cos(2m\theta+2\varphi+\nu\varphi\right\}.$$

Па je тако

(1.28) $$\Re\{y^{2m}T_{2m}(x)\}=y^{2m}|x|^{2}\{\cos(2m\theta+2\varphi)+O(|x|)\}.$$

Да бисмо из образаца (1.27) и (1.28) могли закључити да постоји константа $k_1=k_1(m)>0$ таква да je

$$\Re\{y^{2m}T_{2m}(x)\}\geqslant k_1|y|^{2m}\operatorname{Max}\{|x|^2,\ |x|^{2m}\},$$

потребно je да буде истовремено

(1.27 a) $$-\frac{\pi}{4m}<\theta+\varphi<\frac{\pi}{4m},\quad -\frac{\pi}{4}<m\theta+\varphi<\frac{\pi}{4},$$

одакле следи да je

$$-\frac{\pi}{4m}\frac{m+1}{m-1}<\arg y<\frac{\pi}{4m}\frac{m+1}{m-1}$$

највећи размак у којем се $\theta=\arg y$ може налазити.

Треба још показати да je

$$\Re\{z_1\}\geqslant k_2(m)\,\Re\{y^{2m}T_{2m}(x)\}$$

за довољно велико y. Како je

$$T_\nu(x)=(1+x)^\nu-x\nu-1,\qquad \nu=2,3,\ldots,2m$$

то je

$$T_\nu(x)\sim\binom{\nu}{2}x^2,\quad x\to 0,$$

и тако

(1.29) $\quad |T_\nu(x)| < C_{10} |T_{2m}(x)|, \quad |x| < 1, \quad \nu = 2, 3, \ldots, 2m-1.$

С друге стране је

$$T_\nu(x) \sim x^\nu, \quad x \to \infty$$

па је, као горе,

(1.30) $\quad |T_\nu(x)| < C_{11} |T_{2m}(x)|, \quad |x| > 1, \quad \nu = 2, 3, \ldots, 2m-1.$

Сада према (1.29) и (1.30) следи да је, на основу (1.25),

$$\mathfrak{R}\{z_1(x;y)\} \geqslant k_1 \mathfrak{R}\{y^{2m} T_{2m}(x)\} \left\{1 - k_2 \sum_{\nu=2}^{2m-1} \frac{|a_{2m-\nu}|}{|y|^{2m-\nu}}\right\}$$

(1.31) $$\geqslant k_1 \mathfrak{R}\{y^{2m} T_{2m}(x)\} \geqslant C_{12} |y|^{2m} \operatorname{Max}\{|x|^2, |x|^{2m}\}$$

за свако x области (1.27a) и произвољно y области D_1.

2° Из дефиниције функције z_2 следи непосредно да је и

$$\mathfrak{R}\{z_2\} \geqslant C_{13} |y|^{2m} \operatorname{Max}\{|x|^2, |x|^{2m}\},$$

чиме је лема 1.3 доказана са $C_0 = \operatorname{Min}\{C_{12}, C_{13}\}$.

1.6. Да бисмо теорему 1.1 могли да искористимо за доказ да функција $J(y)$ има у читавој комплексној y-равни репрезентацију која је наведена у уводу, потребно је да се докаже ова теорема:

ТЕОРЕМА 1.2. *Ред*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}(y)\, \Omega_{2k}(y)$$

конвергира айсолуйно и униформно у сваком коначном делу y-равни.

Доказ теореме 1.2 заснива се на овој леми:

ЛЕМА 1.4. *Постоји константа $B > 1$ таква да коефицијенти $b_\nu^{(i,p)}$ полинома*

$$Q_{i,p}(y) = \sum_{\nu=0}^{2mp-i} b_\nu^{(i,p)} y^{2mp-\nu}$$

задовољавају неједначину

$$|b_\nu^{(i,p)}| < B^p$$

за $\nu = 0, 1, \ldots, 2mp-i$ и свако $i = 3p+1, \ldots, (2m-1)p$.

1.7. Доказ теореме 1.2. Да бисмо доказали теорему 1.2, показаћемо да низ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} |\Omega_{2k}(y)|\,|A_{2k}(y)|$$

тежи униформно ка некој функцији $S(y)$. Доказ ћемо извести у три корака:

1° Ставимо

$$\tilde{S}_{(2m-1)n} = \sum_{k=2}^{(2m-1)n} \tilde{A}_{2k}(y)\,|\Omega_{2k}(y)|,$$

где је

$$\tilde{A}_{2k}(y) = \sum_{p=1}^{[2k/3]} \frac{1}{p\,!} |Q_{2k,p}(y)|.$$

Како је $\Omega_i(y)=0$ за непарне i, то се на основу (1.22) истим резоновањем као у леми 1.2 добија да је

$$\tilde{S}_{(2m-1)n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p\,!} \sum_{i=3p}^{(2m-1)p} |Q_{i,p}(y)|\,|\Omega_i(y)| = \sum_{p=1}^{2n} \frac{a_p(y)}{p\,!}, \tag{1.32}$$

где смо ставили

$$a_p(y) = \sum_{i=3p}^{(2m-1)p} |Q_{i,p}(y)|\,|\Omega_i(y)|. \tag{1.33}$$

Показаћемо, прво, да низ $\sum_{p=1}^{2n} \frac{a_p(y)}{p\,!}$ конвергира униформно за свако $|y| \leqslant M$. За то нам је потребно да погодно мајорирамо функције

$$|Q_{i,p}(y)| \quad \text{и} \quad |\Omega_i(y)|.$$

За свако $|y| \leqslant M$ је

$$|\Omega_i(y)| \leqslant |y|^{-i} \int_0^\infty e^{k|x|^2 - |x|^{2m}} |x|^i \, dx,$$

$$\leqslant k^{\alpha(i+1)} |y|^{-i} \int_0^\infty e^{k^{2m\alpha}(u^2 - u^{2m})} u^i \, du \tag{1.34}$$

$$\leqslant k^{\alpha(i+1)} |y|^{i} \left\{ \int_0^1 + \int_1^\infty \right\}, \qquad k = k(M),$$

где је $\alpha = \{2(m-1)\}^{-1}$.

Како је

$$\int_0^1 \leqslant e^{k^2 m\alpha},$$

а због

$$u^{2m} - u^2 \geqslant \frac{1}{2}\ u^{2m} - 1$$

и

$$\int_1^\infty \leqslant e^{k^2 m\alpha} \int_0^\infty e^{-k^{2m\alpha} u^{2m/2}} u^i\, du,$$

то је према (1.34)

$$(1.35) \qquad |\Omega_i(y)| \leqslant \frac{1}{2m}\, 2^{\frac{i+1}{2m}}\, e^{k^{2m\alpha}}\ \Gamma\left(\frac{i+1}{2m}\right) |y|^{-i}.$$

На основу леме 1.4 је, с друге стране,

$$(1.36) \qquad |Q_{ip}(y)| \leqslant (2mp - i + 1)\, B^p \max_{0 < |y| \leq M} \{|y|^i, |y|^{2mp}\}.$$

Из процена (1.35) и (1.36) добива се, према обрасцу (1.34) ова процена за $\frac{a_p(y)}{p!}$.

$$(1.37) \qquad \begin{aligned} \frac{a_p(y)}{p!} &\leqslant C_{14}(M)\, p^2\, 2^{\frac{(2m-1)p+1}{2m}}\, B^p \frac{\Gamma\left(\frac{2m-1}{2m} p + \frac{1}{2m}\right)}{\Gamma(p+1)} \cdot \\ &\cdot \max_{0 \leq |y| \leq M} \{1, |y|^{(2m-3)p}\}. \end{aligned}$$

На основу Stirling-овог обрасца следи из (1.37) да постоји константа $\delta > 0$ таква да је

$$\frac{a_p(y)}{p!} \leqslant C_{15}(M)\, p^{-\delta p} \max_{0 \leq |y| \leq M} \{1, |y|^{(2m-3)}\},$$

одакле на основу Weierstrass-ова критеријума следи да низ

$$\sum_{p=1}^{2n} \frac{a_p(y)}{p!}$$

конвергира униформно за $|y| \leqslant M$.

2° Како је, према (1.32),

$$\tilde{S}_{(2m-1)n}(y) \equiv \sum_{p=1}^{2n} \frac{a_p(y)}{p!},$$

то и низ $\tilde{S}_{(2m-1)n}(y)$ конвергира униформно за $|y| \leqslant M$.

3^0 Из дефиниције функција $A_i(y)$, $\tilde{A}_i(y)$ следи да је $|A_i(y)| < \tilde{A}_i(y)$ за свако i, па је према томе и низ $S_{(2m-1)n}(y)$ униформно конвергентан. Како је, међутим, низ $S_n(y)$ монотон и $S_n(y) \leqslant S_{2m-1}(y)$ за дато $m \geqslant 2$, свако n и свако $|y| \leqslant M$, то следи униформна конвергенција низа $S_n(y)$ односно апсолутна и униформна конвергенција реда $\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y)$, што је требало доказати.

Преостало је још да се докаже лема 1.4.

1.8. Доказ леме 1.4. Коефицијенти Taylor-овог развитка функције $\{f(x;y)\}^p$ дати су Cauchy-евим обрасцем

$$Q_{i,p}(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|x|=R} \frac{\{f(x;y)\}^p}{x^{i+1}}\, dx. \tag{1.38}$$

Како је

$$Q_{i,p}(y) = \sum_{\nu=0}^{2mp-i} b_\nu^{(i,p)}\, y^{2mp-\nu}, \tag{1.39}$$

то је поново

$$b_\nu^{(i,p)} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|y|=R} \frac{Q_{i,p}(y)}{y^{2mp-\nu+1}}\, dy. \tag{1.40}$$

Из дефиниције функције $f(x;y)$ следи непосредно да је

$$|f(x;y)|^p \leqslant B^p\, |y|^{2mp}\, |x|^{(2m-1)p}, \qquad |x| \geqslant 1, \quad |y| \geqslant 1,$$

па је према (1.38) и (1.39)

$$|Q_{i,p}(y)| \leqslant B^p\, |y|^{2mp}\, R^{(2m-1)p-i-1}$$

или, специјално за $R=1$,

$$|Q_{i,p}(y)| \leqslant B^p\, |y|^{2mp}.$$

На исти начин је, због (1.40),

$$|b_\nu^{(i,p)}| \leqslant B^p\, R^\nu,$$

одакле са $R=1$ следи лема.

ГЛАВА II

2.1. ТЕОРЕМА 2.1. *Нека су функције* $A_{2k}(y)$, $\Omega_{2k}(y)$ *дефинисане као и раније; тада је за све у комплексне у-равни*

$$J(y)=e^{-P(y)+P'(y)y}\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y).$$

Доказ теореме 2.1. Како на основу теореме 1.2, ред

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\,\Omega_{2k}$$

конвергира апсолутно и униформно ка некој функцији $S(y)$ за све $|y \leqslant M$ и како на основу теореме 1.1 у области D важи неједначина

$$|\tilde{R}_n(y)|<C_2\,|y|^{2m(2m+1)+1}\,n^{-\beta n},$$

то је

$$J(y)=e^{-P(y)+P'(y)y}\;S(y)$$

у области D. На основу принципа аналитичког продужења десна страна овог обрасца претставља функцију $J(y)$ свугде тамо где је регуларна. Одатле, на основу теореме 1.2, следи тврђење теореме 2.1.

2.2. Да бисмо у току ове и идуће главе скратили писање, чињеницу да ред $\sum\Phi_\nu(x)$ претставља асимптотски развитак неке функције $f(x)$, тј. да је $\Phi_{\nu+1}(x)=o\{\Phi_\nu(x)\}$ и

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\Phi_\nu(x)+O(\Phi_N(x)),\quad x\to\infty,$$

обележаваћемо са

$$f(x)\sim\sum\Phi_\nu(x).$$

2.3. ТЕОРЕМА 2.2. *Постоје бројеви* $\alpha_\nu=\alpha_\nu(a_0, a_1,\ldots, a_{2m-1})$, $D_\nu=D_\nu(a_0, a_1,\ldots, a_{2m-1})$ *такви да у целој комплексној z-равни важи асимптотски развитак*

$$J_1(z)\sim\exp\left\{\sum_{\nu=0}^{2m-1}D_\nu z^{\frac{2m-\nu}{2m-1}}\right\}\sum\alpha_\nu z^{-\frac{m-1+\nu}{2m-1}},$$

где је

$$D_0=(2m-1)\,(2m)^{-\frac{2m}{2m-1}}.$$

ЛЕМА 2.1. *Нека је функција* $y = y(z)$ *дефинисана једначином* $z=Q(y)$, *где је* $Q(y)=P'(y)$; *тада постоје бројеви* $\lambda_\nu=\lambda_\nu(a_0, a_1,\ldots,a_{2m-1})$, $\lambda_0=1$ *такви да у целој комплексној* z*-равни важи асимптотски развитак*

$$y \sim \left(\frac{z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \sum \lambda_\nu z^{-\frac{\nu}{2m-1}}.$$

2.4. Доказ теореме 2.2. За формирање датог асимптотског развитка користићемо теорему 1.1 са проценом остатка $R_n(y)$ по y:

$$J(y)=e^{-P(y)+yP'(y)}\left\{\sum_{k=0}^{(2m-1)n} A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y)+O(y^{-m(2n+2)+1})\right\}. \tag{2.1}$$

Прво ћемо развити функцију $J(y)$ по степенима од $1/y$ па затим применити лему 2.1.

1° Да бисмо добили асимптотски развитак функције

$$\Omega_{2k}(y)=2y\int_{L\varphi} \exp\left\{-\frac{P''(y)\,y^2}{2!}x^2-y^{2m}x^{2m}\right\} x^{2k}\,dx,\quad k=2, 3,\ldots,(2m-1)n$$

применићемо поступак из доказа теореме 1.1 са

$$z_1=\frac{P''(y)y^2}{2}x^2+y^{2n}x^{2m},\qquad z_2=\frac{P''(y)\,y^2}{2!}x^2.$$

Тако добивамо

$$\Omega_{2k}(y)=2y\int_{L\varphi} e^{-(z_1-z_2)-z_2}\,x^{2k}\,dx=$$

$$=2y\int_{L\varphi} e^{-z_2}\sum_{p=0}^{N-1}\frac{(-1)^p}{p!}(z_1-z_2)^p\,dx+2y\int_{L\varphi} R_N(x;y)\,dx,$$

односно

$$\Omega_{2k}(y)=\sum_{p=0}^{N-1}\beta_{k,p}\,y^{-2k}\{P''(y)\}^{-(mp+k+1/2)}+2y\int_{L\varphi} R_N(x;y)\,dx, \tag{2.2}$$

где је

$$\beta_{k,p}=\frac{(-1)^p}{p!}2^{mp+k+1/2}\,\Gamma\left(mp+k+\frac{1}{2}\right).$$

Процену остатака $R_N(x;y)$ извршићемо као и раније користећи лему 1.1 и неједначине

$$|z_1-z_2|^N \leqslant C_{16}\,|y|^{2mN}\,|x|^{2mN},$$

$$\Re\{z_1\} \geqslant C_{17}\,|y|^{2m}\,|x|^2, \quad \Re\{z_2\} \geqslant C_{17}\,|y|^{2m}\,|x|^2,$$

које следе непосредно из дефиниције функција z_1, z_2 и важе за све y области D_1; добићемо да је

$$(2.3) \qquad 2\,|y|\int_0^\infty |R_N|\,dx \leqslant C_{18}(N)\,y^{-\delta_1}, \quad \delta_1 = m\,(2mN-2N+2k+1)-1.$$

Дефинитивно је, према (2.2) и (2.3)

$$(2.4) \qquad \Omega_{2k}(y) = y^{-2k}\sum_{p=0}^{N-1}\beta_{k,p}\{P''(y)\}^{-\frac{2mp+2k+1}{2}} + O\,(y^{-\delta_1}).$$

Из овог обрасца је сада лако добити асимптотски развитак функција $\Omega_{2k}(y)$ користећи елементарне операције са асимптотским развитцима.

Како је

$$P''(y) = \sum_{\nu=0}^{2m-2} a_\nu\,(2m-\nu)\,(2m-\nu-1)\,y^{(2m-2)-\nu},$$

то је

$$(2.5) \qquad \{P''(y)\}^{-\frac{2mp+2k+1}{2}} \sim y^{-(m-1)\,(2mp+2k+1)}\sum_i d_{i,p,k}\,y^{-i},$$

што следи множењем развитка функција $\{P''(y)\}^{-mp-k}$ и $\{P''(y)\}^{-1/2}$ који се добивају сасвим елементарно. Из образаца (2.4) и (2.5) добивамо, даље, да је

$$\Omega_{2k}(y) = y^{-m(2k+1)+1}\left\{\sum_{p=0}^{N-1}\beta_{p,k}\left[\sum_{i=0}^{M_1-1}\frac{d_{i,p,k}}{y^{(m-1)2mp+i}} + O\,(y^{-(m-1)2mp-M_1})\right] + \right.$$
$$\left. + O\,(y^{-m(2mN-2N)})\right\},$$

односно, после сабирања, да је

$$(2.6) \qquad \Omega_{2k}(y) = y^{-m(2k+1)+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{M_2-1}\frac{e_{\nu,k}}{y^\nu} + O\,(y^{-M_2})\right\},$$

где је

$$M_2 = \mathrm{Min}\,\{m\,(2mN-2N),\,M_1\}.$$

Поред тога, специјално је за $k=0$

$$\Omega_0(y)=y^{-(m-1)}\left\{\sum_{\nu=0}^{M_2-1}\frac{e_{\nu,0}}{y^\nu}+O(y^{-M_2})\right\}. \tag{2.7}$$

Како је по дефиницији $A_0(y)=1$, $A_1(y)=A_2(y)=0$, а полином $A_{2k}(y)$ је степена $2m[2k/3]$, то је према (2.6)

$$A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y)=\sum_{\nu=0}^{M_3-1}\frac{f_{\nu,k}}{y^{\delta_2+\nu}}+O(y^{-(\delta_2+M_3)}), \tag{2.8}$$

где је

$$\delta_2=m-1+2m(k-[2k/3]),\quad k\geqslant 2. \tag{2.9}$$

Ако развитке (2.7) и (2.8) уврстимо у образац (2.1), добићемо да је

$$J(y)=e^{-P(y)+P'(y)y}\left\{\sum_{\nu=0}^{M_4-1}\frac{g_\nu}{y^{m-1+\nu}}+(y^{-(m-1)+M_4})\right\}, \tag{2.10}$$

при чему је, $g_0=e_{0,0}=\beta_{0,0}\{(2m-1)\,2m\}^{-1/2}$, јер је, према (2.9), $\delta_2>m-1$),

2° Користећи лему 2.1 развићемо сада функције $e^{-P(y)+P'(y)y}$ и $y^{-m+1-\nu}$ по степенима од $1/z$. Степеновањем развитка функције y по степенима од $1/z$, множењем константама и сабирањем тако добивених израза, користећи притом лему 2.1, добићемо да је

$$P(y)+P'(y)y=\sum_{\nu=0}^{2m-1}D_\nu z^{\frac{2m-\nu}{2m-1}}+\sum_{\nu=2m}^{M_5-1}D_\nu z^{-\frac{\nu-2m}{2m-1}}+O\left(z^{-\frac{M_5-2m}{2m-1}}\right),$$

односно да је (в. [8], стр. 535—543)

$$e^{-P(y)+P'(y)y}\sim\exp\left\{\sum_{\nu=0}^{2m-1}D_\nu z^{\frac{2m-\nu}{2m-1}}\right\}\sum D_\nu^* z^{-\frac{\nu}{2m-1}}, \tag{2.11}$$

где је

$$D_0=(2m-1)\,(2m)^{-\frac{2m}{2m-1}},\quad D_0^*=\sum_{i=0}^{2m-2}a_i(2m-i-1)\,\lambda_i.$$

С друге стране је, истим резоновањем као горе,

$$\sum_{\nu=0}^{M_4-1}\frac{g_\nu}{y^{m-1+\nu}}+O(y^{-(m-1+M_4)})=$$

$$=z^{-\frac{m-1}{2m-1}}\sum_{\nu=0}^{M_4-1}g_\nu\left\{\sum_{\mu=0}^{M_6-1}h_{\nu,\mu}z^{-\frac{\nu+\mu}{2m-1}}+O\left(z^{-\frac{\nu+M_6}{2m-1}}\right)\right\}+O\left(z^{-\frac{m-1+M_4}{2m-1}}\right)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{M_7-1}l_\nu z^{-\frac{m-1+\nu}{2m-1}}+O\left(z^{-\frac{m-1+M_7}{2m-1}}\right), \tag{2.12}$$

где је $M_7 = \mathrm{Min}\{M_6, M_4 + m - 1\}$. Множењем обрасца (2.11) и (2.12) добива се дефинитивно, с обзиром на (2.1),

$$J_1(z) = \exp\left\{\sum_{\nu=0}^{2m-1} D_\nu z^{\frac{2m-\nu}{2m-1}}\right\} \sum \alpha_\nu z^{-\frac{m-1+\nu}{2m-1}},$$

где је $\alpha_0 = \beta_{0,0} D_0^* (2m)^{-\frac{m-1}{2m-1}} \{(2m-1)2m\}^{-1/2}$.

Све операције с асимптотским развицима које су овде извршене без доказа, дозвољене су на основу правила која за такве операције важе, а сви коефицијенти D_ν, D_ν^* d_ν, $e_\nu, \ldots$ израчунавају се као да су операције вршене с конвергентним редовима [8].

3° Показаћемо да тако добивени развитак важи у целој комплексној z — равни.

Нека је, поново

$$J_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(t)+zt}\, dt;$$

тада мало пре формирани развитак

$$J_1(P'(y)) \sim e^{-P(y)+P'(y)y} \sum \frac{g_\nu}{y^{m-1+\nu}} \tag{2.13}$$

важи на основу теореме 1.1 за све y области D_1, па према томе специјално и за

$$-\frac{\pi}{2}\frac{1}{2m-1} - \varepsilon \leqslant \arg y \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{2m-1} + \varepsilon.$$

Како је $z = P'(y)$ и на основу леме 2.1

$$y \sim \left(\frac{z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \sum \lambda_\nu z^{-\frac{\nu}{2m-1}},$$

то развитак

$$J_1(z) \sim \exp\left\{\sum_{\nu=0}^{2m-1} D_\nu z^{\frac{2m-\nu}{2m-1}}\right\} \sum \alpha_\nu z^{-\frac{m-1+\nu}{2m-1}} \tag{2.14}$$

важи у десној полуравни, тј. за $|\arg z| \leqslant \pi/2$.

С друге стране је

$$J_1(-z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overline{P}(t)+zt}\, dt,$$

где је $\bar{P}(t) = P(-t)$, па се асимптотски развитак функције $J_1(-\bar{P}'(y))$ добива, према 1.4, 3°, стављајући у образац (2.13) $y = -y$, тј.

$$J_1(P'(-y)) \sim e^{-P(-y)+P'(-y)(-y)} \sum \frac{g_\nu}{(-y)^{m-1+\nu}} \tag{2.15}$$

за све y области D_2 па према томе, специјално и за

$$\pi - \frac{\pi}{2}\frac{1}{2m-1} - \varepsilon \leqslant \arg y \leqslant \pi + \frac{\pi}{2}\frac{1}{2m-1} + \varepsilon.$$

Како је овде $z = \bar{P}'(y)$, односно $-z = P'(-y)$, то је на основу леме 2.1

$$(-y) \sim \left(\frac{-z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \sum \lambda_\nu (-z)^{-\frac{\nu}{2m-1}}. \tag{2.16}$$

Из образаца (2.15) и (2.16) следи да се развитак у левој полуравни добива стављајући у образац (2.14) $z = -z$, чиме је доказ теореме 2.1 завршен.

Преостало је још да се докаже лема 2.1.

2.5. Доказ леме 2.1. Из дефиниције функције $y = y(z)$ следи непосредно да је

$$y \sim \left(\frac{z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}}, \qquad z \to \infty.$$

Ставимо, даље,

$$\left(\frac{z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} = z_0, \qquad y = z_0 + z_0\,\omega_0,$$

при чему $\omega_0 = \omega_0(z) \to 0$, $z \to \infty$. Тада је

$$z = Q(z_0 + z_0\,\omega_0) =$$

(2.17)

$$= Q(z_0) + Q'(z_0)\,z_0\,\omega_0 + \frac{Q''(z_0)}{2!}(z_0\,\omega_0)^2 + \cdots + \frac{Q^{(2m-1)}(z_0)}{(2m-1)!}(z_0\,\omega_0)^{2m-1}.$$

Како је

$$Q^{(\nu)}(y) = \sum_{\mu=0}^{2m-\nu-1} b_\mu^{(\nu)}\, y^{2m-\nu-1-\mu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 2m-1,$$

где је

$$b_\mu^{(\nu)} = a_\mu(2m-\mu)(2m-\mu-1)\ldots(2m-\mu-\nu),$$

то је

$$\frac{(z_0)^\nu}{\nu!} Q^{(\nu)}(z_0) \sim B_\nu\, z_0^{2m-1}, \qquad B_\nu = \frac{b_0^{(\nu)}}{\nu!}. \tag{2.18}$$

Из образаца (2.17) и (2.18) следи да је

$$z = Q(z_0) + z_0^{2m-1}\{(1+\varepsilon_1) B_1 \omega + (1+\varepsilon_2) B_2 \omega^2 + \cdots + \\ + (1+\varepsilon_{2m-1}) B_{2m-1} \omega^{2m-1}\}$$

при чему $\varepsilon_\nu \to 0$, $z \to \infty$, одакле је

$$(2.19) \qquad \omega \sim \frac{1}{2m(2m-1)} \frac{z - Q(z_0)}{z_0^{2m-1}}.$$

Како је

$$z - Q(z_0) = z - \{z + b_1^{(0)} z_0^{2n-2} + b_0^2 z^{2m-3} + \cdots + b_{2m-1}^{(0)}\},$$

то је, према (2.19),

$$\omega \sim -\frac{a_1}{2m} z_0^{-1}.$$

Тако смо добили да је

$$y \sim z_0 + \lambda_1, \quad \lambda_1 = -\frac{a_1}{2m}.$$

2° Ако поступак продужимо стављајући

$$z_1 = z_0 + \lambda_1, \quad y = z_1 + \lambda_1 \omega_1,$$

добићемо на исти начин као горе да је $\omega_1 \sim \dfrac{z - Q(z_1)}{\lambda_1 Q'(z_1)}$, односно

$$\omega_1 \sim \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_0^{-1} \quad \text{где је} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2m}\right)^2 (2m-2) - \frac{a_2(2m-2)}{2m-1}.$$

Прва три члана развитка су, према томе,

$$y \sim z_0 + \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{z_0}.$$

Петпоставимо да је уопште

$$z_k = z_0 + \lambda_1 + \lambda_2 z_0^{-1} + \cdots \lambda_k z_0^{-(k-1)}, \quad y = z_k + \frac{\lambda_k}{z_0^{k-1}} \omega_k$$

и

$$(2.20) \qquad \omega_k = \omega_k(z) \to 0, \quad z \to \infty.$$

Истим резоновањем као горе добиће се да је

$$\omega_k \sim \frac{z - Q(z_k)}{\lambda_k z_0^{(2m-2)-(k-1)}}, \quad z \to \infty.$$

Због претпоставке (2.20) сви коефицијенти полинома $z - Q(z_k)$ закључно са коефицијентом уз степен $z_0^{(2m-2)-(k-1)}$ једнаки су нули, па је тако

$$\omega_k \sim \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} z_0^{-1},$$

где је λ_{k+1} коефицијент уз степен z_0^{2m-2-k}. Тако смо добили да је

$$y \sim \left(\frac{z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} + \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{z}{2m}\right)^{-\frac{1}{2m-1}} + \cdots$$

чиме је лема 2.1 доказана.

ГЛАВА III

3.1 У овој глави искористићемо резултате теореме 1.1 и 2.1 за формирање асимптотског развитка фундаменталног решења једне парцијалне једначине.

Нека је $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ симболични полином с константним комплексним коефицијентима:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-\nu},$$

при чему b_0 може бити 1 или -1. Ако је

(3.1) $n = 2m$ и $b_0 (-1)^{m-1} \xi^{2m}$ позитивно дефинитно за реално ξ,

онда се за диференцијалну једначину

$$\left\{L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\right\} u(x, t) = 0$$

каже да је параболичног типа и њено фундаментално решење претстављено је интегралом [9]

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tL(iu) + ixu}\, du. \tag{3.2}$$

Овај интеграл конвергира, због услова (3.1), за $\Re\{t\} > 0$.

Показаћемо да се фундаментално решење $K(x, t)$ може изразити помоћу интеграла $J_1(z)$.

За коефицијенте a_ν полинома $P(\nu)$ у интегралу

$$J_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(\nu)+z\nu}\, d\nu$$

бираћемо, специјално, бројеве $c_\nu z^{-\nu}$ са $c_\nu = -b_\nu i^{2m} x^\nu$, при чему за b_0 треба узети 1 или -1 тако да услов (3.1) буде испуњен. Тако добивени интеграл обележићемо са $J^*(z)$. Ако у $J^*(z)$ ставимо $z = ixt^{-1/2m}$ и извршимо смену $\nu = ut^{1/2m}$, $t > 0$ добићемо

$$J^*\left(\frac{ix}{t^{1/2m}}\right) = t^{1/2m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{t \sum_{\nu=0}^{2m-1} b_\nu (iu)^{2m-\nu} + ixu\right\} du$$

односно, према (3.2),

$$K(x, t) = \frac{t^{-1/2m}}{2\pi} J^*\left(\frac{ix}{t^{1/2m}}\right). \tag{3.3}$$

Како интеграл $K(x, t)$ конвергира за $\Re\{t\} > 0$, то образац (3.3) важи не само за $t > 0$, већ на основу принципа аналитичког продужења и за све $\Re\{t\} > 0$.

На тај начин, проблем формирања асимптотског развитка, кад $t \to 0$, фундаменталног решења $K(x, t)$, свео се на формирање асимптотског развитка, кад $z \to \infty$, интеграла $J^*(z)$.

3.1.1. Теорема 1.1 важи и за интеграл $J^*(z)$, јер се коефицијент a_0 уз степен u^{2m} полинома $P(u)$ није променио а коефицијенти уз мање степене од u не утичу битно на ток доказа. Међутим, лема 2.1 се мора модифицирати, јер је сада функција $y = y(z)$ дефинисана једначином

$$z = \sum_{\nu=0}^{2m-1} c_\nu (2m - \nu)\, y^{2m-\nu-1} z^{-\nu} \tag{3.4}$$

па ће развитак функције y очевидно морати друкчије изгледати него раније.

Ако једначину (3.4) пишемо у облику

$$z = \frac{1}{z^{2m-1}} \sum_{\nu=0}^{2m-1} c_\nu (2m - \nu)(yz)^{2m-\nu-1},$$

односно

$$Z = \sum_{\nu=0}^{2m-1} c_\nu (2m - \nu)\, Y^{2m-\nu-1},$$

где смо ставили

$$Z = z^{2m}, \qquad Y = yz,$$

добићемо из леме 2.1 да је

$$Y \sim \left(\frac{Z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \sum \bar{\lambda}_\nu Z^{-\frac{\nu}{2m-1}}, \qquad \bar{\lambda}_\nu = \bar{\lambda}_\nu (c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}), \ \bar{\lambda}_0 = 1,$$

односно

$$y \sim \left(\frac{z}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \sum \bar{\lambda}_\nu z^{-\frac{2m}{2m-1}\nu}. \tag{3.5}$$

Сада можемо доказати теорему 3.1 за $J^*(z)$ аналогну теореми 2.2 за $J_1(z)$.

3.2. ТЕОРЕМА 3.1. *Постоје бројеви* $\bar{\alpha}_\nu = \bar{\alpha}_\nu (c_0, c_1, \ldots, c_{2n-1})$ *такви да у целој комплексној z-равни важи асимптотски развитак*

$$J^*(z) \sim C z^{-\frac{m-1}{2m-1}} \exp\left\{ A z^{\frac{2m}{2m-1}} \right\} \sum \bar{\alpha}_\nu z^{-\frac{2m\nu}{2m-1}},$$

где је

$$A = (2m-1)(2m)^{-\frac{2m}{2m-1}}, \qquad \bar{\alpha}_0 = 1,$$

$$C = \sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}} (2m)^{-1/2(2m-1)} \exp\left\{ (2m)^{-1/(2m-1)} \left[(2m-1) c_0 \bar{\lambda}_1 + \frac{1}{2m} (2m-2) c_1 \right] \right\}.$$

Доказ теореме 3.1 Да бисмо формирали горњи развитак и притом дали поступак за ефективно израчунавање коефицијената $\bar{\alpha}_\nu$, развићемо функције

$$H_1(y) = e^{-P(y) + P'(y) y}, \quad H_2(y) = \sum_{k=0}^{(2m-1)n} A_{2k}(y)\, \Omega_{2k}(y)$$

по степенима од $1/z$ и применити теорему 1.1 са проценом остатка $\bar{R}_n(y)$ по y.

1^0 Како је

$$-P(y) + P'(y)\, y = \sum_{\nu=0}^{2m-1} c_\nu (2m - \nu - 1)\, y^{2m-\nu} z^{-\nu},$$

а према (3.5)

$$\frac{y^{2m-\nu}}{z^\nu} \sim \left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{2m-\nu}{2m-1}} z^{\frac{2m}{2m-1}(1-\nu)} \sum_\mu \bar{\beta}_{\mu,\nu} z^{-\frac{2m}{2m-1}\mu},$$

то је

$$-P(y)+P'(y)\,y \sim \left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{2m}{2m-1}}(2m-1)\,z^{\frac{2m}{2m-1}}+\sum \gamma_\nu z^{-\frac{2m}{2m-1}\nu}.$$

Дефинитивно је [8]

$$H_1(y) \sim B \exp\left\{A z^{\frac{2m}{2m-1}}\right\} \sum \delta_\nu\, z^{-\frac{2m}{2m-1}\nu}, \tag{3.6}$$

где је

$$\delta_0=1 \qquad A=(2m-1)\left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{2m}{2m-1}},$$

$$B=\exp\left\{(2m)^{-\frac{1}{2m-1}}\left[(2m-1)\bar{\lambda}_1 c_0+\frac{1}{2m}(2m-2)\,c_1\right]\right\}.$$

2^0 Развитак функције $H_2(y)$ добићемо као збир производа развитака функција

$$\frac{A_{2k}(y)}{y^{2k}} \quad \text{и} \quad \Omega_{2k}(y)\,y^{2k}.$$

На првом месту је према (2.4),

$$y^{2k}\,\Omega_{2k}(y)=\sum_{p=0}^{N-1}\beta_{k,p}\{P''(y)\}^{-\frac{2mp+2k+1}{2}}+O\left(y^{-m(2mN-2N+2k+1)+1}\right). \tag{3.7}$$

Међутим је, према (3.5),

$$\{P''(y)\}^{-\frac{2mp+2k+1}{2}} \sim z^{-\frac{m-1}{2m-1}(2mp+2k+1)}\sum_{\mu}\bar{d}_{\mu,p,k}\, z^{-\frac{2m}{2m-1}\mu} \tag{3.8}$$

па из (3.7), (3.8) и $y=O(z^{\frac{1}{2m-1}})$ следи да је

$$y^{2k}\,\Omega_{2k}(y)=z^{-\frac{m-1}{2m-1}(2k+1)}\sum_{p=0}^{N-1}\beta_{k,p}\left\{\sum_{\mu=0}^{N_1-1}\bar{d}_{\mu,p,k}\, z^{-\frac{2m}{2m-1}[\mu+(m-1)p]}+\right.$$

$$\left.+\,O\left(z^{-\frac{2m}{2m-1}[N_1+(m-1)p]}\right)\right\}+O\left(z^{-\frac{m(2mN-2N+2k+1)-1}{2m-1}}\right).$$

Сабирајући у горњем обрасцу чланове са истим степенима од $1/z$ и стављајући

$$N_2=\operatorname{Min}\{mN_1,\,(m^2-m)N+k\}$$

добићемо да је

$$(3.9)\qquad y^{2k}\,\Omega_{2k}(y)=z^{\frac{m-1}{2m-1}(2k+1)}\left\{\sum_{\nu=0}^{N_2-1}\bar{e}_{\nu,k}\,z^{-\frac{2m}{2m-1}\nu}+O\left(z^{-\frac{2m}{2m-1}N_2}\right)\right\}.$$

Да бисмо још развили полиноме

$$\frac{A_{2k}(y)}{y^{2k}}=\frac{1}{y^{2k}}\sum_{p=1}^{[2k/3]}Q_{2k,p}(y)\frac{(-1)^p}{p!},$$

потребно је експлицитно изразити зависност њихових коефицијената од z.

Како је

$$\frac{P^{(\nu)}(y)\,y^\nu}{\nu!}=\frac{1}{\nu!}\sum_{\lambda=0}^{2m-\nu}c_\lambda(2m-\lambda)(2m-\lambda-1)\dots(2m-\lambda-\nu-1)\frac{y^{2m-\lambda}}{z^\lambda}=$$

$$=\frac{P^{(\nu)}(yz)\,(yz)^\nu}{\nu!\,z^{2m}},$$

то $Q_{2k,p}(y)$ можемо писати у облику

$$Q_{2k,p}(Y)=\frac{1}{z^{2mp}}\sum_{\nu=0}^{2mp-2k}\bar{f}_{\nu,k}\,Y^{2mp-\nu},\qquad \text{где је } Y=yz.$$

Следи да је

$$\frac{A_{2k}(y)}{y^{2k}}=\sum_{p=1}^{[2k/3]}\frac{(-1)^p}{p!}\,\frac{1}{z^{2mp-2k}}\sum_{\nu=0}^{2mp-2k}\bar{f}_{\nu,k}\,Y^{2mp-\nu-2k}.$$

На основу (3.5) је даље

$$\frac{Y^{2mp-2k-\nu}}{z^{2mp-2k}}\sim z^{\frac{2m}{2m-1}(p-\nu)-\frac{2k}{2m-1}}\sum_{\mu}\bar{g}_{\mu,\nu,p}\,z^{-\frac{2m}{2m-1}\mu},$$

па је, према томе,

$$(3.10)\qquad \frac{A_{2k}(y)}{y^{2k}}\sim z^{-\frac{2k}{2m-1}+\frac{2m}{2m-1}k}\sum_{\nu}\bar{h}_{\nu,k}\,z^{-\frac{2m}{2m-1}(\nu+k-[2k/3])}.$$

Из образаца (3.9) и (3.10) следи, множењем и сабирањем,

$$(3.11)\qquad \sum_{k=2}^{(2m-1)n}A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y)=z^{-\frac{m-1}{2m-1}}\left\{\sum_{\mu=1}^{N_3-1}\bar{e}_\mu\,z^{-\frac{2m}{2m-1}\mu}+O\left(z^{-\frac{2m}{2m-1}N_3}\right)\right\}.$$

Стављајући у (3.9) $k=0$ добивамо специјално да је

$$(3.12)\qquad \Omega_0(y)=z^{-\frac{m-1}{2m-1}}\left\{\sum_{\mu=0}^{N_2-1}\bar{e}_{\mu,0}\,z^{-\frac{2m}{2m-1}\mu}+O\left(z^{-\frac{2m}{2m-1}N_2}\right)\right\},$$

где је $\bar{e}_{0,0}=\beta_{0,0}$ па је, из (3.11) и (3.12),

$$(3.13)\qquad H_2(y)\sim z^{-\frac{m-1}{2m-1}}\sum_{\nu=0}^{N_2-1}\bar{r}_\nu\,z^{-\frac{2m}{2m-1}\nu},\quad \bar{r}_0=\bar{e}_{0,0}.$$

Дефинитивно је, на основу (3.6) и (3.13),

$$(3.14)\qquad J^*(z)=Cz^{-\frac{m}{2m-1}}\exp\left\{Az^{\frac{2m}{2m-1}}\right\}\left\{\sum_{\nu=0}^{N_4}\bar{\alpha}_\nu\,z^{-\frac{2m}{2m-1}\nu}+O\left(z^{-\frac{2m}{2m-1}}\right)\right\}$$

$$C=\sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}}\,(2m)^{-1/2(2m-1)}\cdot B,$$

одакле следи теорема. Коефицијенти $\beta, \gamma, \ldots, \bar{\alpha}, \bar{e}, \ldots$ израчунавају се и овде као да су операције које су вршене са асимптотским развитцима, вршене са конвергентним редовима.

Доказана теорема важи у читавој комплексној z-равни, будући да као и у прошлој глави (3.14) важи у десној полуравни, тј. за $|\arg z|\leqslant\pi/2$, а развитак у левој полуравни добива се, стављајући у (3.14) $z=-z$, јер је у овом случају

$$J^*(-z)=J^*(z).$$

3.2. На основу обрасца (3.3) теорема 3.1 садржи као специјалан случај развитак фундаменталног решења поменуте диференцијалне једначине, по степенима од t. Формулисаћемо тај резултат у виду засебне теореме.

ТЕОРЕМА 3.2. *Нека је $K(x,t)$ фундаментално решење парцијалне диференцијалне једначине*

$$\left(L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0$$

у случају када је она параболична. Постоје бројеви $\alpha_\nu^*(x;b_0,b_1,\ldots,b_{2m-1})$ такви да за $\Re(t)>0$ важи асимптотски развитак

$$K(x;t)\sim C_1\,t^{-\frac{1}{2(2m-1)}}\exp\left\{A_1\,t^{-\frac{1}{2m-1}}\right\}\sum\alpha_\nu^*\,t^{\frac{\nu}{2m-1}},\qquad t\to 0$$

где је

$$A_1 = (ix)^{\frac{2m}{2m-1}} (2m-1)(2m)^{-\frac{2m}{2m-1}},$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} (ix)^{-\frac{m-1}{2m-1}} \sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}} (2m)^{-\frac{1}{2(2m-1)}} .$$

$$. \exp\left\{(2m)^{-\frac{1}{2m-1}} (2m-1)\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{2m}(2m-2) b_1 i^{2m} x\right\}.$$

3.3. Напоменимо, на крају, да се потпуно аналогни резултати могу доказати истим поступком који је употребљен у овом раду и за нешто општији интеграл

$$f_\nu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(u)+zu} u^\nu du.$$

Као примену у овом случају добили бисмо асимптотске развитке извода функције $K_x^{(\nu)}(x; t)$ за $t \to 0$.

(Саопштено 30 октобра 1957)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Avakumović V. G. — Einige Sätze über Laplacesche Integrale. *Publ. Inst. Math.* 3 (1950), 288—304.

[2] Bakhoom N. G. — Asymptotic Expansion of the Function $F_k(x) = \int_0^\infty e^{-u^k + xu} du$ *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 35 (1933), 83-100.

[3] Carslaw H. S. — Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals. Dover Publ. 1956.

[4] Erdélyi A. — Asymptotic Expansion, Dover, Publ. 1956.

[5] Ефграфов М. А. — Асимптотичские оценки и целие функции. Гостехиздат Москва 1957.

[6] Focke J. — Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase, Berlin 1957.

[7] Hardy G. H. — Littlewood J. E. — Some Problem of Partitio Numerorum, *Göttigen Nachrichten* (1920), 13—17.

[8] Knopp K. — Theory and Application of Infinite Series. London 1954.

[9] Rosenbloom P. C. — Linear Equations of Parabolic Type with Constant Coefficients. Contribution to the Theory of Partial Differential Equations, Princeton 1954.

[10] Täcklind S. — Sur les classes quasianalitiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique. (Thesis) Upsala 1936.

[11] Wright E. M. The Asymptotic Expansion of the Generalized Bessel Function. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **38** (1934), 257-270.

[12] ——————— The Generalized Bessel Function of Order Greater then one. *Quart. Journal Math. Oxford* **2** (1940), 35-48.

[13] ——————— The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **46** (1948), 389—408.

ON A CLASS OF FOURIER INTEGRALS

V. MARIĆ (Beograd)

Let

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} a_\nu x^{2m-\nu}$$

be a polynomial with complex coefficients, $a_0 = 1$,

$$J_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P(t)+zt}\,dt, \quad J_1(P'(y)) = J(y)$$

and

$$\Omega_{2k}(y) = \frac{1}{my^{2k}}\ {}_1F_0\left\{-\frac{P''(y)}{2}\right\}$$

where ${}_1F_0(x)$ stands for Wrigt's generalisation of hypergeometric function, with

$$\alpha_1 = \frac{1}{m}, \ \beta_1 = \frac{2k+1}{2m} \quad \text{(see Ch. I, § 1.11).}$$

Further take $A_l(y)$ to denote a certain class of polynomial defined by *c*) in § 1.1.

The following theorem, from Chapter I, concerning Fourier integral $J(y)$ is fundamental in the paper:

THEOREM 1.1. If we put

$$J(y)=e^{-P(y)+P'(y)y}\left\{\sum_{k=0}^{(2m-1)n} A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y)+\tilde{R}_n(y)\right\},$$

then there exist fixed numbers $\alpha,\ \beta>0$, *so that the inequalities*

$$|\tilde{R}_n(y)|<\begin{cases} C_1\,|y|^{-m(2n+2)+1}\,n^{\alpha n} \\ C_2\,|y|^{2m(2n+1)+1}\,n^{-\beta n} \end{cases}$$

hold for every positive integer n, *and all* y *belonging to the domain*

$$D:\quad \begin{aligned} -\frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1}<\arg y<\frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1} \\ \pi-\frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1}<\arg y<\pi+\frac{\pi}{4m}\,\frac{m+1}{m-1} \end{aligned} \qquad |y|>y_0$$

where y_0 *is a sufficiently large number.*

For the proof a suitable modification of the saddle point method is used.

As the consequence of the theorem 1.1, two theorems of different kinds are proved in Chapter II.

The first theorem contains a representation of the integral $J(y)$ as a product of a function of an exponential type and a convergent series in Wright's function quoted above.

THEOREM 2.1. *In the whole complex y-plane we have*

$$J(y)=e^{-P(y)+P'(y)y}\sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}(y)\,\Omega_{2k}(y)$$

In the second theorem the asymptotic expansion of the integral $J_1(z)$ is given as follows:

THEOREM 2.2. *There exist numbers* $D_\nu = D_\nu(a_0, a_1, \ldots, a_{2m-1})$, $\alpha_\nu = \alpha_\nu(a_0, a_1, \ldots, a_{2m-1})$, *so that the expansion*

$$J_1(z) \sim \exp\left\{\sum_{\nu=0}^{2m-1} D_\nu z^{-\frac{2m-\nu}{2m-1}}\right\} \sum \alpha_\nu z^{-\frac{m-1+\nu}{2m-1}}, \quad z \to \infty,$$

holds in the whole z-plane.

The method for calculating coefficients D_ν, α_ν is also indicated.

In the last chapter the results and methods from theorems 1.1 and 2.2 are employed in order to get an asymptotic expansion of fundamental solution of a certain differential equation.

Let $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ denote a simbolic polynomial in $\frac{\partial}{\partial x}$ with complex coefficients, i. e.

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-\nu}, \quad b_0 = \pm 1,$$

then

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t L(iu) + ixu}\, du$$

is the fundamental solution of the partial differential equation

$$\left\{L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\right\} u(x, t) = 0$$

in the case when it is parabolic, i. e. when $n = 2m$ and $b_0(-1)^{m-1}\zeta^{2m}$ is positive definite for real ζ.

If in $J_1(z)$ for a_ν we put especially $-\, b_\nu i^{2m} t^{\frac{\nu}{2m}}$, then we get

$$K(x, t) = \frac{t^{-1/2m}}{2\pi} J_1(ixt^{-1/2m}), \quad \Re\{t\} > 0$$

Using this formula we prove the following

THEOREME 3.1. *There exist numbers* $\alpha_\nu^*(x; b_0, \ldots, b_{2m-1})$ *so that the expansion*

$$K(x; t) \sim C_1 t^{-\frac{1}{2(2m-1)}} \exp\left\{A_1 t^{-\frac{1}{2m-1}}\right\} \sum \alpha_\nu^* t^{\frac{\nu}{2m-1}}, \quad t \to 0$$

where

$$A_1=(ix)^{\frac{2m}{2m-1}}(2m-1)(2m)^{-\frac{2m}{2m-1}},\quad \alpha_0^*=1$$

$$C_1=\frac{1}{2\pi}(ix)^{-\frac{m-1}{2m-1}}\sqrt{\frac{2\pi}{2m-1}}(2m)^{-\frac{1}{2(2m-1)}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\left(\frac{1}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}}(2m-1)\bar{\lambda}_1-\frac{1}{2m}(2m-2)b_1 i^{2m}x\right\}$$

holds when $\Re\{t\}>0$.