Зборник радова САН LXIII — Математички институт САН књ. 7, 1959
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LXIII
Institut Mathématique № 7, 1959

БОГДАН БАЈШАНСКИ

ОПШТА КЛАСА ПОСТУПАКА ЗБИРЉИВОСТИ EULER–BOREL-ОВОГ ТИПА И ЊИХОВА ПРИМЕНА НА АНАЛИТИЧКО ПРОДУЖЕЊЕ

Увод
I. Једна класа функција у вези са (E, f) поступцима збирљивости
II. Перманенција (E, f) поступака збирљивости
III. Инклузија (E, f) поступака збирљивости
IV. Једна специјална класа поступака збирљивости
V. Примена на аналитичко продужење.

УВОД

0.1. Оперисање с дивергентним редовима појављује се непосредно после стварања инфинитезималног рачуна, већ код самог Leibnitz-а. Даљим ширењем математичке анализе употреба дивергентних редова постаје све чешћа. Математичари осамнаестог столећа увидели су да дивергентни редови претстављају снажну апаратуру, користили су ту апаратуру и добили низ значајних резултата. Euler је, например, извео функционалну једначину Riemann-ове ζ-функције, читав век пре Riemann-а. Међутим, пошто основни математички појмови, као појам броја, границе или функције, још нису били строго изграђени, природно је што су примењена резоновања била недовољно ригорозна. Чињеница да су резултати добијени на такав начин били ипак исправни, може се једино објаснити ванредном интуицијом оних који су до тих резултата дошли. Euler је, међутим, схватио потребу за извесним заснивањем рачуна с дивергентним редовима. Он је врло добро осећао разлику између операција с конвергентним и дивергентним редовима, и писао је, например: „Верујем да сваки ред мора имати једну одређену вредност. Да би се избегле све тешкоће, које се при томе појављују, ту вредност не би требало звати именом збира, јер је опште уобичајено са том речју везивати један такав појам, као да је збир настао стварним сабирањем, а та идеја се код дивергентних редова не јавља....“ Али дефиниција суме дивергентног реда коју је Euler дао била је мање срећна. Према његовој дефиницији: „Сума било ког реда јесте

вредност оног коначног израза чијим развијањем је ред добијен.“ Недостатак дефиниције је у томе што она имплицитно претпоставља да се један ред може добити развијањем само једног коначног израза. Али, например, ред $1+2+4+8+\ldots$ коме Euler додељује као вредност -1, објашњавајући то чињеницом да је тај ред добијен развијањем функције $(1-x)^{-1}$ за $x=2$, може се добити и развијањем функције $2(e^{2y}-1)^{-1}$ по $(e^{2ny}+1)^{-1}$ за $y=0$, и стога би му требало приписати вредност ∞ (комплексно). Тај недостатак Euler-ове дефиниције био је примећен већ од његових савременика (Bernoulli, Callet, Lagrange).

Ма да су дивергентни редови били често коришћени, не само од Euler-а, већ и многих његових савременика и следбеника, нарочито Fourier-а и Poisson-а, било је у исто доба и математичара који су се скептички односили према употреби дивергентних редова (D'Alembert, Laplace, Lagrange). Честе и неплодне дискусије о дивергентним редовима прекинуте су најзад радовима Cauchy-а и Abel-а, нарочито Cauchy-евим строгим заснивањем појма конвергенције. Као и Euler, ни Cauchy није успео да објасни чињеницу да се очигледно недопуштеним операцијама са дивергентним редовима долазило до тачних резултата. Међутим, за разлику од Euler-а, не успевши да објасни ту чињеницу, Cauchy није ни оперисао са дивергентним редовима. Дивергентни редови, као средство доказа, нестали су из математичке анализе. Они се поново јављају тек крајем деветнаестог века (Frobenius, Hölder, нарочито Cesàro).

Cesàro је дефинисао суме за извесне класе дивергентних редова, али је основни значај његовог рада у томе што је истакао да су такве дефиниције ствар конвенције. Не поставља се, дакле, питање шта је сума дивергентног реда, већ како дефинисати суму дивергентног реда. Проблем је најзад био правилно формулисан. Природно је било, затим, ограничити слободу дефиниције са два захтева: прво, да дефинисани збир претставља генерализацију збира конвергентног реда, и друго, да за дефинисани збир важе основни закони који важе за збирове конвергентних редова, а који се односе на сабирање два реда и множење реда неким бројем. Оно што би вероватно зачудило математичаре Euler-овог доба, јесте да постоји бесконачно мноштво различитих дефиниција које испуњавају оба услова, и да међу њима не постоји ниједна коју би било природно претпоставити свим осталим. Да би се истакла та релативност, у теорији дивергентних редова се не говори о $A-$, $B-$, итд. дефиницији збира дивергентног реда, већ о $A-$, $B-$ итд. поступку збирљивости, и садржина те теорије је испитивање међусобних односа различитих поступака збирљивости. Теорија дивергентних редова коначно је оправдала скоро све резултате које је Euler добио оперишући са дивергентним редовима, и скоро свака Euler-ова формула постаје тачна када се дода ознака одговарајућег поступка збирљивости. Исто тако, у проблемима у којима су и раније претежно коришћени дивергентни редови,

њихова употреба дала је нове значајне резултате (теорија Fourier-ових реоова: Féjer-ов став; теорија аналитичког продужења: Borel-ови, Lindelöf-ови, Mittag-Leffler-ови резултати).

0.2. Ради убрзања конвергенције споро конвергентних редова и ради сабирања дивергентних редова, Euler је, примећујући да ред Σa_n настаје из реда $\Sigma a_n x^{n+1}$ за $x = 1$, а такође из реда $\sum a_n \left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1}$ за $y = \frac{1}{2}$, писао

$$\sum a_k x^{k+1} = \sum a_k \left(\frac{y}{1-y}\right)^{k+1} = \sum a_k \sum \binom{k+\lambda}{k} y^{k+\lambda+1} =$$

$$= \sum_n \left(\sum_\nu \binom{n}{\nu} a_\nu\right) y^{n+1},$$

тако да је суму реда Σa_k израчунавао као суму реда Σb_n, где је $b_n = 2^{-n-1} \Sigma_\nu \binom{n}{\nu} a_\nu$.

То, што је код Euler-а било доказ, Knopp је дао као дефиницију: ред Σa_n је $(E, 1)$ — збирљив ка s, ако је ред Σb_n конвергентан и сума му је s. Из везе која постоји између општих чланова наведена два реда може се наћи и веза која постоји између њихових парцијалних сума, тако да се дата дефиниција може формулисати и на следећи начин: низ s_n је $(E, 1)$ — збирљив ка s ако низ $\sigma_n = 2^{-n} \Sigma \binom{n}{\nu} s_\nu$ конвергира ка s.

Ту дефиницију Knopp је даље уопштио: низ s_n је (E, q) — збирљив ка s ако низ

$$\sigma_n = (1+q)^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} s_\nu, \quad q > 0,$$

конвергира ка s. Тада очигледно, ако са $a_{n\nu}$ означимо елемент матрице која трасформише низ s_ν у σ_n, важи

$$a_{n\nu} = (1+q)^{-n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu}.$$

Другим речима, елементи у n-тој врсти те матрице претстављају коефицијенте степеног развитка функције

$$f^n(z) = \left(\frac{z+q}{1+q}\right)^n, \quad q > 0.$$

Meyer-König је године 1949 дефинисао једну нову класу S_r поступака збирљивости која стоји у извесном односу симетрије са класом Euler-Knopp-ових поступака [6]. Наиме, матрица која од-

говара једном Meyer-König-ovom поступку збирљивости начињена је тако да елементи у њеној n-тој врсти јесу коефицијенти степеног развитка функције

$$f^n(z)=\left(\frac{1-r}{1-rz}\right)^n, \quad 0<r<1.$$

Иако постоји знатна сродност између њих, Euler-Knopp-ови и Meyer-König-ови поступци претстављају две различите класе поступака, од којих ни једна не садржи другу као специјалан случај.

Дефинисавши једну врсту поступака збирљивости скоро истоветних са Meyer-König-овим, Карамата је покушао да открије и једну класу поступака збирљивости која би садржала као специјалан случај, како те поступке, тако и Euler-Knopp-ове. Стога је дефинисао поступке збирљивости са матрицом чија је n-та врста дата коефицијентима степеног развитка функције

$$f^n(z)=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^n.$$

Карамата [5] је формулисао и став перманенције за те поступке збирљивости, који је затим доказао Szegö.

0.3. Ми ћемо уопштити наведене поступке збирљивости на тај начин што ћемо дефинисати поступак збирљивости чија матрица у n-тој врсти садржи коефицијенте n-тог степене неке аналитичке функције $f(z)$. На тај начин свакој аналитичкој функцији $f(z)$, регуларној у почетку, одговараће један поступак збирљивости који ћемо звати генералисаним Euler-овим поступком и означавати са (E, f) [8]. Стављајући

$$f(z)=\frac{z+q}{1+q}, \quad \frac{1-r}{1-rz}, \quad \frac{az+b}{cz+d},$$

наш поступак збирљивости свешће се на Euler-ов, Meyer-König-ов или Караматин. Стављајући $f(z)=e^{z-1}$, добићемо Borel—Gaier-ов поступак [4] који од Borel-овог раздваја само једна незнатна разлика (ако

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n s_n}{n!}\to s \quad \text{кад } x\to\infty$$

низ s_n биће збирљив ка s: Borel-овим поступком. уколико x непрекидно тежи бесконачности, поступком (E, e^{z-1}), уколико x тежи бесконачности преко низа природних бројева. Очигледно је да из B—збирљивости следи (B, e^{z-1}) збирљивост, дакле, (E, e^{z-1}) поступак је јачи, али је тај добитак тривиалан).

Основни проблем који настаје дефиницијом ових поступака збирљивости јесте наћи услове за функцију $f(z)$ тако да њој асоцирани поступак буде перманентан. Познато је да Toeplitz-Schur-ов

став даје три услова који су потребни и довољни да би један поступак збирљивости био перманентан. Ти услови се изражавају преко елемената матрице поступка збирљивости, у нашем случају преко бројева $a_{n\nu}$, где смо увели ознаку $f^n(z) = \Sigma_\nu a_{n\nu} z^\nu$. У жељи да искористимо чињеницу што се ради о специјалној класи поступака збирљивости да бисмо став о перманенцији, који важи за сваки поступак збирљивости, упростили, претворили у специфичан став о перманенцији за нашу класу поступака збирљивости, морамо услове о коефицијентима $a_{n\nu}$ превести на услове непосредно о функцији $f(z)$. Прва два услова Toeplitz-Schur-а лако се преводе у том смислу. Али трећи услов, наиме услов да

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1), \quad n \to \infty,$$

доноси тешкоће. Чак и кад је функција $f(z)$ релативно једноставна, као, на пример, у специјалном случају који је третирао Szegö (в. [5] или [1] где је дата идеја Szegö-овог доказа) врло је тешко показати да је горњи услов задовољен, изузимајући наравно тривиалан случај кад су коефицијенти од $f(z)$ позитивни. Да је написани услов простији или да се односи директно на коефицијенте $a_{1\nu}$, ми бисмо га могли задржати као услов о коефицијентима, жртвујући унеколико практични и естетски захтев да се сви услови односе на функцију $f(z)$. Међутим, горњи услов је управо најтежи од сва три услова, и његово проверавање у конкретном случају може бити практички неостварљиво. Стога је било нужно њему наћи еквивалентан, или бар доста општи довољан услов, који би се односио на функцију $f(z)$. То је учињено у ставу 2.

Међутим, услови које став 2. поставља функцији $f(z)$ да би поступак збирљивости (E, f) био перманентан нису нимало очигледни. Поставља се природно читав низ питања: да ли су ти услови непротивречни, да ли су независни, колико је широка класа функција које испуњавају те услове, припадају ли тој класи функција и фунције чији су коефицијенти позитивни и за које је, према томе, став о перманенцији тривиалан. Даље, услови става 2. дати су у облику који је подесан за извођење доказа, специјално за доказивање става о перманенцији, али који није толико погодан за ефективно проверавање. Стога је потребно наћи еквивалентне услове за које је лако проверити да ли их дата функција задовољава или не. Најзад, уколико функције $f(z)$ и $g(z)$ задовољавају услове става 2., перманентни су не само поступци збирљивости асоцирани њима, већ и они који су асоцирани функцијама $f(z)\,g(z)$ и $g(f(z))$. Поставља се питање да ли и те две функције задовољавају услове става 2. Уколико то није случај, не само што услови става 2 нису довољно природни, већ подлежу врло тривиалним генерализацијама. Ниједно од наведених питања нема довољно очигледан одговор. Услови става 2 захтевали су према томе детаљно испитивање. Стога смо фун-

кције које задовољавају поменуте услове издвојили у посебну класу, коју смо, краткоће ради, назвали класом E-функција. Издвајање ових функција у посебну класу оправдано је међутим и са једног другог становишта. Често се у теорији функција сусреће услов за функцију $f(z)$ који захтева да додир кривих $f(e^{ti})$ и e^{ti} буде највише првог реда. E-својство, које је карактеристично за E-функције, претставља једну генерализацију тог услова, и могућно је да многи ставови формулисани са условом о додиру кривих могу бити генералисани тиме што би се тај услов заменио условом да одговарајуће функције буде E-функције [2]. Први одељак овог рада посвећен је проучавању E-функција, исцрпном у оној мери која је потребна за даља излагања. Став о перманенцији даје се тек касније, у другом одељку, тако да су његови услови тада довољно јасни. У истом одељку даје се један став о потребним условима за функцију $f(z)$ да би (E, f) поступак збирљивости био перманентан. Тај став нам је специјално омогућио да потпуно решимо проблем перманенције $E(\alpha, \beta)$ поступака збирљивости, јер је Szegö-ов резултат решио тај проблем само делимично. Став о инклузији који обично даје најбољу слику односа унутар једне класе поступака збирљивости, чини садржину трећег одељка. У четвртом одељку дати су ставови перманенције и инклузије за класу поступака збирљивости коју је дефинисао Карамата. Ти ставови — од којих је делимично познат једино први, што смо већ напоменули — дати су као директне последице претходно доказаних општих ставова. Најзад, како специјални случајеви посматраних поступака збирљивости, као Euler-ови и Borel-ови поступци, имају значаја као апаратура у теорији аналитичког продужења, било је од интереса дати опште ставове о аналитичком продужењу помоћу поступака (E, f), што је учињено у последњем одељку.

I. ЈЕДНА КЛАСА ФУНКЦИЈА У ВЕЗИ СА ГЕНЕРАЛИСАНИМ EULER-ОВИМ ПОСТУПЦИМА ЗБИРЉИВОСТИ

1.1. У овоме одељку посматраћемо једну поткласу класе унимодуларних функција, то јест функција које су регуларне у јединичном кругу и чији је максимални модуо у затвореном јединичном кругу једнак јединици. Функције те поткласе биће осим тога регуларне и на јединичном кругу. Даље, на јединичном кругу оне ће максимални модуо достизати највише у коначно много тачака, или ће бити облика $e^{\theta i} z^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Последњи услов претставља уствари доста благо ограничење. Наиме, из чињенице да је функција $f(z)$ регуларна на јединичном кругу и различита од константе следи да она јединични круг пресликава на неку аналитичку криву. Ако би функција достизала свој максимални модуо, који је раван јединици, у бесконачно много тачака јединичног круга, онда би та аналитичка крива имала са јединичним

кругом бесконачно много заједничких тачака. Како две аналитичке криве са бесконачно много заједничких тачака морају бити идентичке, то би функција пресликавала јединични круг на јединични круг. С друге стране, како је регуларна у и на јединичном кругу, функција у њему може имати највише коначно много нула. Нека су те нуле $z_1, z_2, \ldots z_i, \ldots z_p$, и нека је

$$g_i(z) = \frac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z}, \quad g(z) = g_1(z)\, g_2(z) \ldots g_p(z).$$

Тада је функција

$$h(z) = f(z)/g(z)$$

прво, регуларна у и на јединичном кругу, друго, нема нула унутар њега, треће, њен модуо на рубу јединичног круга је константан и једнак јединици. Стога је $h(z)$ нека константа чији је модуо раван јединици, дакле $h(z) = e^{\vartheta i}$. Одатле је

$$f(z) = e^{\vartheta i}\, g(z) = e^{\vartheta i} \prod_{i=1}^{p} \frac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z}, \quad |z_i| < 1 \text{ за } i = 1, 2, \ldots p$$

Према томе, условом да функција достиже свој максимални модуо на јединичном кругу највише коначно много пута, искључили смо, осим константе, једино функције које су производ коначно много специјалних хомографских функција. Уосталом, колико су сви наведени услови општи, показује и чињеница да је за сваку аналитичку функцију $f(z)$, регуларну у околини неке тачке z, могућно наћи — и то на бесконачно много начина — три константе A, a, b такве да функција $A f(az + b)$ задовољава све наведене услове.

Поред наведених услова ми постављамо и један услов о понашању функције у околини оних тачака на јединичном кругу у којима она достиже максимални модуо, и дајемо следеће две дефиниције.

ДЕФИНИЦИЈА 1. *Нека је функција* $f(z)$

i) *регуларна у околини тачке* $z = 1$,

ii) $f(1) = 1$, *и нека је*

iii) $|f(e^{it})| \leqslant 1$ *за* t *довољно мало.*

Рећи ћемо тада да функција $f(z)$ *има E-својство у тачки* $z = 1$ *ако*

iv) *из*

$$f(z) - z^{\alpha} = A\, i^p (z-1)^p + o(1)\, (z-1)^p, \quad z \to 1, \quad \alpha = f'(1), \quad A \neq 0,$$

следи

$$\Re\, \mathrm{I}\, A \neq 0.$$

Рећи ћемо да функција $g(z)$ има E-својство у тачки $z=\zeta$ ако функција $\frac{g(z\zeta)}{g(\zeta)}$ има E-својство у тачки $z=1$.

ДЕФИНИЦИЈА 2. *Аналитичка функција $f(z)$ је E-функција ако задовољава следеће услове*

i) *$f(z)$ је регуларно за $|z|<R$, $R>1$,*

ii) Max $|f(z)|=1$ *за* $|z|=1$,

iii) *$f(z)$ има E-својство у свакој тачки периферије јединичног круга у којој достиже максимални модуо.*

Приметимо одмах да су функције облика $e^{\vartheta i} z^k$, $k=0,1,2,\ldots$ E-функције. Ради тога је довољно утврдити да функције z^k, $k=0,1,2,\ldots$ имају E-својство у тачки $z=1$. Оне очигледно задовољавају услове i–iii) дефиниције 1, а услов iv) задовољавају, јер претпоставка тог услова код њих не може бити испуњена

Да бисмо показали да су услови у дефиницији 2 независни, довољно је да покажемо да услов iii) није последица прва два услова. Посматрајмо, ради тога, функцију

$$f(z)=z-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3,$$

која задовољава услове i–ii), а максимални модуо достиже у тачки $z=1$, јер је

$$|f(e^{ti})|^2=1-\sin^4\frac{t}{2}\left(1+\cos^2\frac{t}{2}\right),$$

и која не задовољава услов iii), јер је

$$f(z)-z=-\frac{1}{8}(z-1)^3$$

то јест

$$A=-\frac{1}{8}i.$$

1.2. За доказ става 1 потребна су нам извесна својства E–функција, која се дају у следеће три леме.

ЛЕМА 1. *Ако функција $f(z)$ има E-својство у тачки $z=1$ и регуларна је за $|z|<R$, $R>1$, тада за бројеве α, A и p дефинисане помоћу*

$$\alpha=f'(1)$$

$$f(z)-z^\alpha=Ai^p(z-1)^p+o(1)(z-1)^p,\quad z\to 1,\quad \alpha=f'(1),\quad A\neq 0,$$

важи

i) $\alpha > 0$,

ii) $\Re\mathfrak{l}\, A < 0$,

iii) *p је паран број.*

Доказ. Због регуларности функције $f(z)$ у тачки $z=1$ можемо писати

$$f(e^{ti}) = 1 + f'(1)\, ti + O(t^2), \quad t \to 0,$$

одакле је

$$|f(e^{ti})| = 1 - \Im\mathfrak{m}\, f'(1)\, t + O(t^2), \quad t \to 0.$$

Како $|f(e^{ti})|$ по претпоставци није веће од јединице у околини тачке $t=0$, то је $\Im\mathfrak{m}\, f'(1) = 0$, дакле $f'(1)$ је реално кад год $f(z)$ има E-својство у тачки $z=1$.

На основу принципа максималног модула $|f(1)| > |f(r)|$, $r<1$, па је, због тога што је $f'(1)$ реално,

$$1 > |1 + f'(1)(r-1) + O(r-1)^2| = 1 + f'(1)(r-1) + O[(r-1)^2], \quad r \to 1,$$

одакле је $f'(1)$ ненегативно.

Најзад, претпоставимо да је $f'(1) = 0$, и означимо са k ред, са T аргумент, а са $Rk!$ модуо најнижег извода функције $f(z)$ у тачки $z=1$ који је различит од нуле. Тада је

$$f(z) = 1 + Re^{Ti}(z-1)^k + o(1)(z-1)^k, \quad z \to 1.$$

Стављајући $z - 1 = re^{ti}$, добијамо

$$|f(1 + re^{ti})| = 1 + Rr^k \cos(T + kt) + o(r^k), \quad r \to 0.$$

Једноставан рачун показује да је увек могућно изабрати такво t у отвореном интервалу $(\pi/2, 3\pi/2)$ да је $T + kt$ у неком интервалу $(2m\pi - \pi/2, 2m\pi + \pi/2)$, даке $\cos(T + kt) > 0$, па стога постоји тачка z унутар јединичног круга за коју је $|f(z)| > 1$, што је у контрадикцији са принципом максималног модула. Према томе, $f'(1)$ не може бити нула.

С друге стране, из

$$f(z) = z^\alpha (1 + Ai^p (z-1)^p + o(1)(z-1)^p), \quad z \to 1, \quad \alpha = f'(1), \quad \Re\mathfrak{l}\, A \neq 0,$$

следи

$$f(e^{ti}) = e^{\alpha ti}\, [1 + (-1)^p A t^p + o(1)\, t^p], \quad t \to 0, \quad \alpha = f'(1), \quad \Re\mathfrak{l}\, A \neq 0.$$

Пошто је α реално, одатле добијамо да је

$$|f(e^{ti})| = 1 + (-1)^p\, \Re\mathfrak{l}\, A t^p + o(t^p), \quad t \to 0, \quad \Re\mathfrak{l}\, A \neq 0.$$

Како функција $|f(e^{ti})|$ достиже екстремум у тачки $t = 0$, то је $p = 2k$, и како је тај екстремум максимум, $\Re\mathfrak{l}\, A < 0$.

Напоменимо да је чињеница да је $f'(1)$ реално и позитивно уколико су задовољени услови i-ii) дефиниције 2 и услов $f(1)=1$, позната ([3], стр. 112).

На основу наведене леме примећујемо да ако функција $f(z)$ која није степен од z има E—својство у тачки $z=1$ тада је

$$(1)\ f(z)-z^{\alpha}=(-1)^k A(z-1)^{2k}+o(1)(z-1)^{2k},\ z\to 1,\ \alpha=f'(1),\ \Re A<0.$$

Из леме 1 проистиче специјално да је скуп E—функција затворен у односу на множење и итерацију, то јест да ако су $f(z)$ и $g(z)$ E-функције, тада су и $f(z)\,g(z)$ и $g(f(z))$ E-функције. Очигледно је да последње две функције задовољавају услове i—ii) дефиниције 2. Једино је потребно показати да задовољавају услов iii). То је евидентно ако је бар једна од функција $f(z)$ и $g(z)$ степен од z. У супротном случају, без ограничења општости можемо претпоставити да је $f(1)=g(1)=1$ и да је $z=1$ једина тачка на периферији јединичног круга у којој $f(z)$ и $g(z)$ достижу максимални модуо. Ставимо тада

$$f(z)=z^{\alpha}+Ai^p(z-1)^p+o(1)(z-1)^p,\quad z\to 1,\quad \alpha=f'(1),\quad \Re A\neq 0,$$

$$g(z)=z^{\beta}+Bi^q(z-1)^q+o(1)(z-1)^q,\quad z\to 1,\quad \beta=g'(1),\quad \Re B\neq 0.$$

Имаћемо да је

$$f(z)\,g(z)=z^{\gamma}+Ci^r(z-1)^r+o(1)(z-1)^r,\quad z\to 1,$$

где је $\gamma=\alpha+\beta=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=[f(z)\,g(z)]'_{z=1}$, $r=\mathrm{Min}(p,q)$, $C=A, B, A+B$ према томе да ли је $p<,\ >$ или $=q$, па је у сваком случају, на основу тврђења ii) леме 1, $\Re C\neq 0$, што значи да је $f(z)\,g(z)$ E-функција.

На сличан начин, водећи рачуна о томе да је

$$f(z)-1=\alpha(z-1)+o(1)(z-1),\quad z\to 1,$$

$$f^{\beta}(z)=z^{\alpha\beta}(1+\beta Ai^p(z-1)^p+o(1)(z-1)^p),\quad z\to 1,\quad \Re A\neq 0,$$

добијамо да је

$$g(f(z))=z^{\gamma}+Ci^r(z-1)^r+o(1)(z-1)^r,\quad z\to 1,$$

где је $\gamma=\alpha\beta=[g(f(z))]'_{z=1}$, $r=\mathrm{Min}(p,q)$, $C=\beta A,\ \alpha^q B,\ \beta A+\alpha^q B$ према томе да ли је $p<,\ >$ или $=q$. У сваком случају, из тврђења i-ii) леме 1 следи да је $\Re C\neq 0$, што значи да је $g(f(z))$ E-функција.

ЛЕМА 2. *E-функција или је облика $e^{\vartheta i}z^k$, $k=0,1,2,\ldots$ или максимални модуо достиже само у коначно много тачака периферије јединичног круга.*

Доказ. Нека је $f(z)$ E-функција различита од $e^{\vartheta i}z^k$. Свакој тачки ζ периферије јединичног круга у којој је $|f(z)|<1$ одговара због непрекидности модула један отворен лук $L\zeta$ јединичног круга такав да је $|f(z)|<1$ кад год z припада $L\zeta$.

Нека је ζ једна тачка са својством $|f(\zeta)|=1$. Без ограничења општости можемо претпоставити да је $\zeta=1$, $f(1)=1$. Како је $f(z)\neq z^k$, то, према (1), постоји број A такав да је $\Re A<0$ и да је

$$f(z)-z^\alpha=A(-1)^k(z-1)^{2k}+o(1)(z-1)^{2k},\quad z\to 1,\quad \alpha=f'(1),$$

из чега следи

$$|f(e^{ti})|=1+\Re A\,t^{2k}+o(t^{2k}),\quad t\to 0,\quad \Re A<0.$$

Дакле, постоји ε позитивно такво да је $|f(e^{ti})|<1$ за $0<|t|<\varepsilon$. На тај начин свакој тачки ζ периферије јединичног круга таквој да је $|f(\zeta)|=1$ одговара један отворен лук L_ζ јединачног круга у коме је ζ једина тачка у којој $f(z)$ достиже максимални модуо. Из фамилије свих лукова L_ζ можемо према Heine-Borel-овом ставу изабрати коначно много лукова таквих да свака тачка периферије јединичног круга припада једноме од њих. Како сваки од тих лукова садржи највише једну тачку у којој $f(z)$ достиже максимални модуо, број таквих тачака је коначан.

ЛЕМА 3. *Нека функција $f(z)$, различита од степена од z, има E-својство у тачки $z=1$. Ако је*

$$\psi(r,t)=\Re\log r^{-\alpha}e^{-\alpha ti}f(re^{ti})=\log|f(re^{ti})|-\alpha\log r,$$

тада постоји околина V тачке $r=1$, $t=0$ таква да

i) *$\psi(r,t)$ има све парцијалне изводе у V,*

ii) *у V је $\dfrac{1}{(2k)!}\dfrac{\partial^{2k}\psi(r,t)}{\partial t^{2k}}<-M$, $M>0$, где је $2k$ дефинисано помоћу* (1),

iii) $$\left.\frac{\partial^m\psi(r,t)}{\partial t^m}\right|_{t=0}\leqslant C_m|r-1|^{2k-m},\quad C_m\geqslant 0.$$

Доказ. Својство i) следи из чињенице да је $f(z)$ регуларно у тачки $z=1$ и да је $f(1)=1\neq 0$.

Пошто је

$$f(z)=z^\alpha(1+A(-1)^k(z-1)^{2k}+o(1)(z-1)^{2k}),\quad z\to 1,\quad \alpha=f'(1),$$

то је

$$|f(e^{ti})|=1+\Re A\,t^{2k}+o(t^{2k}),\quad t\to 0,$$

па је

$$\frac{1}{(2k)!}\left.\frac{\partial^{2k}\psi(1,t)}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=\Re A<0.$$

Ставимо $M = -{}^1/_2\, \mathfrak{R}\mathfrak{l}\, A$. Тада из непрекидности $\dfrac{\partial^{2k}\psi(r,t)}{\partial t^{2k}}$ следи ii).

Најзад, из

$$z^{-\alpha} f(z) = 1 + O(1)(z-1)^{2k}, \quad z \to 1,$$

следи $\psi(r,t) = \mathfrak{R}\mathfrak{l} \log[1 + O(1)[e^{ti}(r-1) + (e^{ti}-1)]^{2k}]$ кад $r \to 1$, $t \to 0$. Пошто је $e^{ti} - 1 = ti + O(t^2)$, $t \to 0$, сви парцијални изводи реда нижег од $2k$ функције $\psi(r,t)$ биће једнаки нули у тачки $r=1$, $t=0$. На основу тога сви изводи реда нижег од $2k-m$ функције $\left.\dfrac{\partial^m \psi(r,t)}{\partial t^m}\right|_{t=0}$ анулираће се у тачки $r=1$, јер је

$$\frac{d^n}{dr^n}\left(\left.\frac{\partial^m \psi(r,t)}{\partial t^m}\right|_{t=0}\right) = \left.\frac{\partial^{m+n}\psi(r,t)}{\partial t^m\, \partial r^n}\right|_{t=0}.$$

Према томе, свака од функција $\left.\dfrac{\partial^m \psi(r,t)}{\partial t^m}\right|_{t=0}$ има у тачки $r=1$ нулу реда најмање $2k-m$, одакле следи iii).

1.3. У овом параграфу навешћемо неколико специјалних класа E-функција.

Најпре, ако функција $f(z)$ задовољава услове i-iii) дефиниције 1, и један од следећих међусобно еквивалентних услова

a) $\mathfrak{R}\mathfrak{l}\, f''(1) \neq \alpha^2 - \alpha$, $\alpha = f'(1)$,

b) додир кривих $f(e^{ti})$ и e^{ti} је првог реда,

c) додир кривих $|f(z)| = 1$ и $|z| = 1$ је првог реда,

тада $f(z)$ има E-својство у тачки $z=1$.

Покажимо најпре да су услови a), b) и c) међусобно еквивалентни. Пошто је, на основу леме 1, $f'(1) \neq 0$ кад год су задовољени услови i-iii) дефиниције 1, b) и c) су еквивалентни. Даље, из

$$f(e^{ti}) = 1 + f'(1)\, ti - {}^1/_2\,(f''(1) + f'(1))\, t^2 + o(t^2), \quad t \to 0,$$

следи

$$|f(e^{ti})|^2 = 1 - (\mathfrak{R}\mathfrak{l}\, f''(1) - f'(1)^2 + o(t^2)), \quad t \to 0,$$

па је услов a) еквивалентан услову b), кад год су задовољени услови i-iii) дефиниције 1.

Да бисмо показали да функција која задовољава усвове i-iii) дефиниције 1 и услов a) има E-својство у тачки $z=1$, довољно је да приметимо да је

$$f(z) - z^{\alpha} = {}^1/_2[f''(1) - f'(1)^2 + f'(1)]\,(z-1)^2 + o(1)\,(z-1)^2, \quad z \to 1.$$

Показаћемо да ако су коефицијенти степеног реда функције $f(z)$ реални и ненегативни, ако је $f(z)$ регуларна за $|z|<R$, $R>1$, и $f(1)=1$, тада је $f(z)$ E-функција.

Тврђење је очигледно у случају $f(z)=z^k$. Претпоставимо стога да је $f(z)$ различито од z^k, $k=0, 1, 2, \ldots$ Тада се у степеном реду функције $f(z)=\Sigma a_n z^n$ налазе бар два коефицијента различита од нуле. Означимо их са a_p и a_q, $p \neq q$.

На основу Schwarz-ове неједначине, а због ненегативности коефицијената a_n, имаћемо

$$\left(\sum_0^\infty n a_n\right)^2 = \left(\sum_0^\infty n\sqrt{a_n}\sqrt{a_n}\right)^2 \leqslant \sum_0^\infty n^2 a_n \sum_0^\infty a_n .$$

Знак једнакости у написаној неједначини не може стајати, јер би тада $n\sqrt{a_n}$ било пропорционално са $\sqrt{a_n}$ кад год је $a_n \neq 0$, па би било $p=q$. Стога је

$$\left(\sum_0^\infty n a_n\right)^2 < \sum_0^\infty n^2 a_n ,$$

где смо искористили чињеницу да је Σa_n, на основу услова о функцији $f(z)$, једнако јединици. Из добијене неједначине имамо

$$\left(\sum_0^\infty n a_n\right)^2 - \sum_0^\infty n a_n < \sum_0^\infty n(n-1)\, a_n .$$

Дакле, задовољен је услов $f'(1)^2 - f'(1) \neq \Re f''(1)$.

Потребно би било да докажемо да је сличан услов задовољен у свим тачкама јединичног круга у којима $f(z)$ достиже максимални модуо. Али, с обзиром да је $f(z)$ различито од z^k, $k=0, 1, 2, \ldots$ и да има ненегативне коефицијенте, постоји само једна таква тачка, тачка $z=1$.

Најзад, напоменимо да у случају да су коефицијенти степеног реда функције $f(z)$ реални, тада – ако $f(z)$ задовољава услове i-iii) дефиниције 1 — да би $f(z)$ имало E-својство у тачки $z=1$ потребно је и довољно да $f(z)-z^\alpha$, $\alpha=f'(1)$, има у $z=1$ нулу парног реда.

II. ПЕРМАНЕНЦИЈА ГЕНЕРАЛИСАНИХ EULER-ОВИХ ПОСТУПАКА ЗБИРЉИВОСТИ

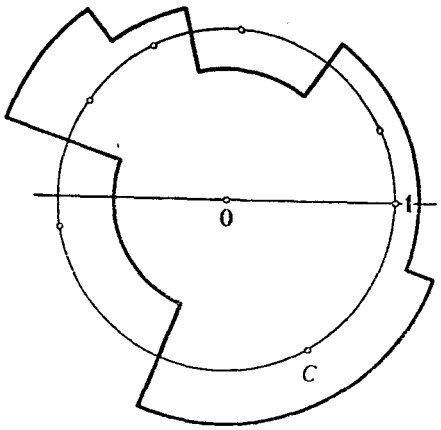
2.1. СТАВ 1. *Нека је*

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^\infty a_{n\nu} z^\nu .$$

Ако је $f(z)$ E-функција, тада је

$$\sum_{\nu=0}^\infty |a_{n\nu}| = O(1) \qquad \text{кад} \qquad n \to \infty .$$

Доказ. Пошто је $f(z)$ регуларно за $|z|<R$, $R>1$, то је сваки од редова $\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|$ конвергентан. Да би се показало и да је низ сума тих редова ограничен, потребна је довољно оштра оцена коефицијената $|a_{n\nu}|$, али је довољно ту оцену дати само за n велико. Оцена ће бити добијена преко Cauchy-еве формуле, али ће бити изабрана променљива путања интеграције, путања зависна од n, ν и функције $f(z)$.



Сл. 1

Ако је функција $f(z)$ облика $e^{\vartheta i}z^k$, $k=0,1,\ldots$ тврђење става је евидентно. На основу леме 2 можемо стога претпоставити да функција $f(z)$ достиже на јединичном кругу максимални модуо само у коначно много тачака $P_m: z=e^{t_m i}$. Означимо са $Q_m: z=e^{t'_m i}$ неку тачку на јединичном кругу која се налази између две суседне тачке P_{m-1} и P_m. Тада кружном луку $Q_m Q_{m+1}$ припада тачка P_m, а њој, према (1), одговарају два позитивна броја, $2k_m$ и α_m. Онда је могућно дефинисати кружне лукове $C_{mn\nu}$ и дужи $D_{mn\nu}$ помоћу

$C_{mn\nu}$:

$$t'_m < \arg z < t'_{m+1},$$

$$|z| = \begin{cases} 1-\gamma_{n,m} & \text{за} \quad \nu < \alpha_m n \\ 1+\gamma_{n,m} & \text{за} \quad \nu \geqslant \alpha_m n. \end{cases}$$

$D_{mn\nu}$:

$z=re^{it'_m}$, где се r мења у интервалу

$$\begin{array}{ll} [1-\gamma_{n,m},\ 1-\gamma_{n,m+1}] & \text{за } \nu < n \operatorname{Min}(\alpha_m, \alpha_{m+1}), \\ [1-\gamma_{n,m},\ 1+\gamma_{n,m+1}] & \text{за } \alpha_{m+1} n \leqslant \nu < \alpha_m n, \\ [1+\gamma_{n,m},\ 1-\gamma_{n,m+1}] & \text{за } \alpha_m n \leqslant \nu < \alpha_{m+1} n, \\ [1+\gamma_{n,m},\ 1+\gamma_{r,m+1}] & \text{за } \nu \geqslant n \operatorname{Max}(\alpha_m, \alpha_{m+1}), \end{array}$$

при чему је $\gamma_{n,m}=n^{-1/2k_m}$.

Кружни лукови $C_{mn\nu}$ и дужи $D_{mn\nu}$ заједно образују путању C под условом да је по дужима $D_{mn\nu}$ подесно изабран смер интеграције. Та путања је очигледно затворена и садржи у унутрашњости тачку $z=0$. Даље, како је функција $f(z)$ E-функција, она

је регуларна за $|z|<1+\delta$, $\delta>0$. С друге стране, тачака $e^{t_m i}$ има коначно много, па постоји број $k=\operatorname{Max} k_m$. За сваку тачку z путање C важи $|z|\leqslant 1+n^{-1/2k}$, па за $n\geqslant N_1>\delta^{-2k}$ путања C припада области регуларности функције $f(z)$. Према томе, за n довољно велико, допуштено је применити Cauchy-еву формулу

$$a_{n\nu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f^n(z)\,z^{-\nu-1}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_m\int\limits_{C_{mn\nu}} f^n(z)\,z^{-\nu-1}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\sum_m\int\limits_{D_{mn\nu}} f^n(z)\,z^{-\nu-1}\,dz,$$

па је

$$2\pi\,|a_{n\nu}|\leqslant\sum_m c_{mn\nu}+\sum_m d_{mn\nu},$$

где је

$$c_{mn\nu}=\int\limits_{C_{mn\nu}}|f(z)|^n\,|z|^{-\nu-1}\,|dz|,$$

$$d_{mn\nu}=\int\limits_{D_{mn\nu}}|f(z)|^n\,|z|^{-\nu-1}\,|dz|.$$

Стога, а с обзиром да индекс m узима само коначно много вредности, довољно је да покажемо да је

a) $\sum\limits_\nu c_{mn\nu}=O(1)$ кад $n\to\infty$ за свако m,

b) $\sum\limits_\nu d_{mn\nu}=O(1)$ кад $n\to\infty$ за свако m.

$$\text{a)}\quad c_{mn\nu}=\int\limits_{C_{mn\nu}}|f(z)|^n\,|z|^{-\nu-1}\,|dz|=\int\limits_{t'_m}^{t'_{m+1}}|f(re^{ti})|^n\,r^{-\nu}\,dt=$$

$$=r^{\alpha_m n-\nu}\int\limits_{t'_m}^{t'_{m+1}} r^{-\alpha_m n}\,|f(re^{ti})|^n\,dt. \tag{2}$$

Једноставности ради, претпоставићемо, што неће смањити општост наших закључака, да је $t_m=0$, и индекс m нећемо убудуће писати. Уведимо, у складу с тим, ознаке $t'=t'_m$, $t''=t'_{m+1}$.

Како је $f(z)$ E-функција, стављајући $\psi(r,t)=\log|f(re^{ti})|-\alpha\log r$, добићемо на основу леме 3 да постоје N_2 и ε' такви да кад год

је $|r-1|<n^{-1/2k}$, $|t|<\varepsilon, \varepsilon<\varepsilon', n>N_2$, тада је

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}\psi(r,t)}{\partial t^{2k}}<-M,\ M>0,\\ &\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\psi(r,t)}{\partial t^m}\bigg|_{t=0}\leqslant C_m|r-1|^{2k-m},\ C_m\geqslant 0.\end{aligned}$$

Како је $r^{-\alpha}|f(re^{ti})|$ непрекидно у једном прстену око јединичног круга, и како је $|f(e^{ti})|\leqslant 1-2\delta, \delta>0$ за $t'<t<-\varepsilon$ и $\varepsilon<t<t''$, то постоји N_3 такво да је

$$r^{-\alpha}|f(re^{ti})|\leqslant 1-\delta$$

за $n\geqslant N_3$ и $\varepsilon<t<t''$ и $t'<t<-\varepsilon$, где је $|r-1|\leqslant n^{-1/2k}$.

Стављајући $N=\mathrm{Max}\,(N_1, N_2, N_3)$ имаћемо за $n>N$

$$(4)\qquad \int_{\varepsilon}^{t''}+\int_{t'}^{-\varepsilon}[r^{-\alpha n}|f(re^{ti})|^n\,dt]\leqslant 2\pi(1-\delta)^n.$$

С друге стране, лема 3 нам омогућује да применимо Taylorову формулу на функцију $\psi(r,t)$, па добијамо

$$(5)\qquad \psi(r,t)=\sum_{m=0}^{2k}C_m(r)\,t^m \quad \text{за } n>N,\ |t|<\varepsilon,$$

где је

$$C_m(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{m!}\dfrac{\partial^m\psi(r,t)}{\partial t^m}\bigg|_{t=0}, & m=0,1,\ldots,2k-1\\[2ex] \dfrac{1}{m!}\dfrac{\partial^m\psi(r,t)}{\partial t^m}\bigg|_{t=\tau}, & m=2k,\ |\tau|<|t|<\varepsilon.\end{cases}$$

На основу (3) имаћемо

$$C_m(r)\leqslant C_m|r-1|^{2k-m},\ C_m\geqslant 0,$$

$$C_{2k}(r)\leqslant -M,\ M>0,$$

одакле је, на основу (5),

$$\psi(r,t)\leqslant\sum_{m=0}^{2k-1}C_m|r-1|^{2k-m}|t|^m-Mt^{2k},$$

па је

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} r^{-\alpha n} |f(re^{ti})|^n \, dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{n\psi(r,t)} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp n \left[\sum_{m=0}^{2k-1} C_m |r-1|^{2k-m} |t|^m - Mt^{2k} \right] dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{0}^{\varepsilon} \exp \left[\sum_{m=0}^{2k-1} C_m \, n^{m/2k} \, t^m - Mn \, t^{2k} \right] dt \leqslant$$

$$\leqslant 2n^{-1/2k} \int_{0}^{\infty} \exp \left[\sum_{m=0}^{2k-1} C_m \, u^m - Mu^{2k} \right] du .$$

Одатле, због (4), следи да је

$$\int_{t'}^{t''} r^{-\alpha n} |f(re^{ti})|^n \, dt = O(n^{-1/2k}), \quad n \to \infty.$$

Према (2)

$$(6) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\alpha n - \nu} \int_{t'}^{t''} r^{-\alpha n} |f(re^{ti})|^n \, dt \leqslant K n^{-1/2k} \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\alpha n - \nu}.$$

Како је

$$r = \begin{cases} r_1 & \text{за } \nu \geqslant \alpha n, \\ r_2 & \text{за } \nu < \alpha n, \end{cases}$$

где је

$$r_1 = 1 + n^{-1/2k}, \quad r_2 = 1 - n^{-1/2k},$$

то је

$$\sum_{\nu < \alpha n} r^{\alpha n - \nu} \leqslant \sum_{\nu=0}^{[\alpha n]} r_2^{[\alpha n] - \nu} = \sum_{\nu=0}^{[\alpha n]} r_2^{\nu} < \frac{1}{1 - r_2} = n^{1/2k},$$

$$\sum_{\nu \geqslant \alpha n} r^{\alpha n - \nu} \leqslant \sum_{\nu = [\alpha n]+1}^{\infty} r_1^{[\alpha n] + 1 - \nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_1^{-\nu} = \frac{r_1}{r_1 - 1} = 1 + n^{1/2k}.$$

Из добијених оцена следи

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r^{\alpha n - \nu} < 2 \, n^{1/2k} + 1,$$

па се на основу (6) добија

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} = O(1), \quad n \to \infty.$$

b) Уведимо следеће ознаке: $\alpha = \operatorname{Max} \alpha_m$, $k = \operatorname{Max} k_m$, $\delta_n = n^{-1/2}$, $\gamma_n = n^{-1/2k}$. Тада је

$$d_{mn\nu} = \int_{D_{mn\nu}} |f(z)|^n |z|^{-\nu-1} |dz| \leqslant \begin{cases} \int_{1-\gamma_n}^{1+\gamma_n} |f(re^{it'm})|^n r^{-\nu-1} dr & \text{за } \nu < \alpha n, \\ \int_{1+\delta_n}^{1+\gamma_n} |f(re^{it'm})|^n r^{-\nu-1} dr & \text{за } \nu \geqslant \alpha n. \end{cases}$$

По претпоставци је $|f(e^{it'm})| \leqslant 1-2\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. Тада ће због непрекидности бити $|f(re^{it'm})| \leqslant 1-\varepsilon$ за $|r-1| \leqslant \delta$, где је $\delta > 0$. Како $\gamma_n \to 0$ кад $n \to \infty$, то је, за n довољно велико, $\gamma_n < \delta$. Стога је

$$\int_{1+\beta_n}^{1+\gamma_n} |f(re^{it'm})|^n r^{-\nu-1} dr \leqslant \begin{cases} 2\gamma_n (1-\varepsilon)^n (1-\gamma_n)^{-\nu-1} & \text{ако је } \beta_n = -\gamma_n, \\ \gamma_n (1-\varepsilon)^n (1+\delta_n)^{-\nu-1} & \text{ако је } \beta_n = \delta_n, \end{cases}$$

одакле, за n довољно велико, такво да је

$$\delta_n \leqslant \frac{1}{2}, \quad \gamma_n \leqslant \frac{1}{2}, \quad (1-\gamma_n)^{2\alpha} > 1-\varepsilon,$$

следи

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} d_{mn\nu} \leqslant \sum_{\nu=0}^{\alpha n} d_{mn\nu} + \sum_{\nu=\alpha n}^{\infty} d_{mn\nu} \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma_n (1-\varepsilon)^n \sum_{\nu=0}^{\alpha n} (1-\gamma_n)^{-\nu-1} + \gamma_n (1-\varepsilon)^n \sum_{\nu=\alpha n}^{\infty} (1+\delta_n)^{-\nu-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2(1-\varepsilon)^n (1-\gamma_n)^{-\alpha n} + 2\delta_n^{-1} (1-\varepsilon)^n \leqslant$$

$$\leqslant 2(1-\varepsilon)^{\frac{n}{2}} + 2\sqrt{n}\,(1-\varepsilon)^n =$$

$$\leqslant o(1) \text{ кад } n \to \infty.$$

2.2. Као непосредну последицу става 1 добијамо следећи став о перманенцији (E, f) поступака збирљивости.

СТАВ 2. *Довољан услов за перманенцију (E, f) поступка збирљивости јесте да $f(z)$ буде E—функција различита од константе и да је $f(1)=1$.*

Доказ. На основу познатог Toeplitz-Schur-овог става потребно је да покажемо да

a) $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \to 1$ кад $n \to \infty$,

b) $a_{n\nu} \to 0$ кад $n \to \infty$ за свако ν утврђено,

c) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1)$ кад $n \to \infty$,

где је $f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu$.

Пошто су функције $f^n(z)$ регуларне за $|z| < R$, $R > 1$, то је $f^n(1) = \sum a_{n\nu}$. Како је $f(1)=1$, то је $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = 1$ за све n.

Пошто је $|f(z)| \leqslant 1$ за $|z|=1$, и пошто је $f(z)$ различито од константе, на основу принципа максималног модула биће, за $|z|=1/2$, $\operatorname{Max}|f(z)| = \delta < 1$. На основу Cauchy-еве неједначине имаћемо тада $|a_{n\nu}| \leqslant 2^\nu \delta^n$, па важи b).

Најзад, из става 1 следи c).

Доказани став даје довољне услове да би (E, f) поступак збирљивости био перманентан. Природно се поставља питање о потребним и довољним условима. Очигледно је да први услов у дефиницији E-функције, услов који захтева регуларност функције $f(z)$ у и на јединичном кругу, није потребан. Потребно је да функција буде регуларна унутар јединичног круга, јер у супротном случају редови $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|$ не би били сви конвергентни. Међутим, није потребно да функција $f(z)$ буде регуларна и на јединичном кругу, што показује пример функције дефинисане степеним редом $\frac{6}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, чији је полупречник конвергенције раван јединици, а која ипак дефинише један перманентан поступак збирљивости. Уколико бисмо се решили да проблему приђемо у свој могућој општости, морали бисмо третирати и случајеве када функција није регуларна на рубу јединачног круга. У том случају,

међутим, Toeplitz-Schur-ови услови о коефицијентима $a_{n\nu}$ не би се више дали превести на једноставне услове о функцији $f(z)$. На пример, превођење само Toeplitz-Schur-овог услова а) захтевало би резултате знатно оштрије од оних који су садржани у Fatou-Riesz-овом или апсолутном Fatou-Riesz-овом ставу. Стога је природно ограничење на оне (E, f) поступке збирљивости чија је функција генератриса регуларна у и на јединичном кругу. Напоменимо да су сви раније посматрани специјални случајеви (E, f) поступака збирљивости имали поменуто својство.

Очигледно је да су услови $f(1)=1$ и $|f(z)|\leqslant 1$ за $|z|\leqslant 1$ потребни за перманенцију (E, f) поступка збирљивости уколико се ограничимо поменутим захтевом да је $f(z)$ регуларно у кругу већем од јединичног. Што се тиче услова iii) у дефиницији E-функције, став 3 показаће да се тај услов не може сасвим отстранити. Остаје отворено питање да ли се тај услов може заменити општијим, на пример условом да функција $f(z)$ буде или степен од z или да максимални модуо на јединичном кругу достиже највише у коначно много тачака.

2.3. СТАВ 3. *Нека је*

i) $f(z)$ *регуларно за* $|z|<R$, $R>1$;

ii) $|f(z)|=1$ *за* $|z|=1$;

iii) $f(z)\neq e^{\vartheta i} z^k$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Тада, из

$$f^n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu$$

следи

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \to \infty \quad \text{кад } n\to\infty.$$

Доказ. Показаћемо најпре да $a_{n\nu}$ униформно тежи нули кад n тежи бесконачности. Применимо ради тога Cauchy-еву формулу. На основу ii) имаћемо тада

$$2\pi\,|a_{n\nu}| = \left|\int\limits_{|z|=1} f^n(z)\, z^{-\nu-1}\, dz\right| = \left|\int\limits_0^{2\pi} e^{[n\varphi(t)-\nu t]i}\, dt\right|,$$

где је

$$\varphi(t)=\arg f(e^{ti}) = -i\log f(e^{ti}).$$

Због i) и ii) $f(z)$ биће производ коначно много функција облика $e^{\vartheta i}\dfrac{z-z_i}{1-\bar{z}_i z}$, $|z_i|<1$, при чему, због iii), сви z_i нису исто-

времено једнаки нули. На основу тога $\varphi'(t)$ биће збир коначно много функција облика

$$\frac{1-\rho_i^2}{1-2\rho_i\cos(t-\theta_i)+\rho_i^2},$$

где сви ρ_i не могу истовремено бити једнаки нули, па функција $\varphi''(t)$ може имати највише коначно много нула у интервалу $[0,2\pi]$. Помоћу нула функције $\varphi''(t)$ и тачака које претстављају средине двеју узастопних нула интервал $[0,2\pi]$ раздељен је на коначан број $2k$ подинтервала. Нека је један такав подинтервал $[\alpha,\beta]$. Без ограничења општости можемо претпоставити да је $\varphi''(\alpha)=0$, $\varphi''(t)>0$ за $\alpha<t\leqslant\beta$. Наше тврђење биће доказано ако покажемо да је

$$(7)\qquad \left|\int_\alpha^\beta e^{[n\varphi(t)-\nu t]i}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2k} \text{ за } n>N(\varepsilon) \text{ и сваки цео број } \nu.$$

Нека је

$$g(\varepsilon)=\operatorname{Min}\varphi''(t) \text{ за } \alpha+\frac{\varepsilon}{4k}\leqslant t\leqslant\beta \text{ и } N(\varepsilon)=\frac{1024\,k^2}{\varepsilon^2 g(\varepsilon)}.$$

Очигледно је

$$(8)\qquad \left|\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon/4k} e^{[n\varphi(t)-\nu t]i}\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4k}.$$

Да бисмо оценили интеграл преко интервала $[\alpha+\varepsilon/4k,\beta]$ применићемо следећу лему Van der Corput-а (в. на пр. [10], стр. 117). Ако је $f''(n)\geqslant\rho>0$ за $a\leqslant n\leqslant b$, тада је

$$\left|\int_a^b e^{if(n)}\,dn\right|\leqslant\frac{8}{\sqrt{\rho}}.$$

Одатле је

$$(9)\qquad \left|\int_{\alpha+\varepsilon/4k}^\beta e^{[n\varphi(t)-\nu t]i}\,dt\right|\leqslant\frac{8}{\sqrt{ng(\varepsilon)}}<\frac{8}{\sqrt{N(\varepsilon)\,g(\varepsilon)}}=\frac{\varepsilon}{4k}.$$

Из (8) и (9) следи (7), дакле $a_{n\nu}$ униформно тежи нули кад $n\to\infty$. Према томе $p_n=\operatorname{Max}_\nu|a_{n\nu}|\to 0$ кад $n\to\infty$.

Према i) и ii) имаћемо, на основу Parseval-ове формуле,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{ti})|^2\,dt=1.$$

Како је очигледно

$$p_n \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|^2,$$

то је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqslant \frac{1}{p_n} \to \infty \qquad \text{кад } n \to \infty,$$

чиме је теорема доказана.

III. ИНКЛУЗИЈА МЕЂУ ГЕНЕРАЛИСАНИМ EULER-ОВИМ ПОСТУПЦИМА ЗБИРЉИВОСТИ

За доказ става инклузије потребна нам је следећа

ЛЕМА 4. *Нека је аналитичка функција $f(z)$ регуларна за $|z|<R$, $R>1$ и нека је $|f(z)| \leqslant 1$ за $|z|=1$. Ако је $f^n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu$, тада је*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(n) \quad \textit{кад } n \to \infty.$$

Доказ. Нека је α произвољан позитиван број и нека је $M(r)=\operatorname{Max}|f(z)|$ за $|z|=r$. Применом Cauchy-еве формуле на функцију $f^n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu$ добија се

$$|a_{n\nu}| \leqslant M^n(r)\, r^{-\nu} = r^{\alpha n-\nu}\,[r^{-\alpha} M(r)]^n \text{ за свако } r<R. \tag{10}$$

Према Hadamard-овој теореми, $\log M(r)$ је конвексна функција од $\log r$, па је

$$r^{-\alpha} M(r) = 1 + O(r-1), \quad r \to 1. \tag{11}$$

Ставимо

$$r = \begin{cases} 1-n^{-1} & \text{за } \nu \leqslant \alpha n, \\ 1+n^{-1} & \text{за } \nu > \alpha n. \end{cases}$$

Тада се за $n \geqslant N > (R-1)^{-1}$, због (10) и (11), добија

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| &= \sum_{\nu \leqslant \alpha n} |a_{n\nu}| + \sum_{\nu > \alpha n} |a_{n\nu}| \leqslant \\ &\leqslant [1+O(n^{-1})]^n \left\{ \sum_{\nu \leqslant \alpha n} (1-n^{-1})^{\alpha n-\nu} + \sum_{\nu > \alpha n} (1+n^{-1})^{\alpha n-\nu} \right\} \leqslant \\ &\leqslant O(1) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-n^{-1})^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+n^{-1})^{-\nu} \right\} = \\ &\leqslant O(1)\,(2n+1) = O(n), \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Напоменимо да се доказана лема може добити и као последица следеће теореме: Ако је функција $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ регуларна за $|z| < R$, $R > 1$, тада је

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(e^{it})|\, dt.$$

Напоменимо, такође, да је за доказ става 4 довољна и слабија оцена $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = o(\delta^n)$ за свако $\delta > 1$, која је позната ([7], IV *176*).

СТАВ 4. *Нека су (E, f) и (E, g) два перманентна поступка збирљивости. Ако је*

i) *функција $h(z) = g(f^{-1}(z))$, која је дефинисана у околини тачке $z = 1$, E-функција и ако је*

ii) $s_n = O(r^n)$, $n \to \infty$; $r < R$, $M(r) < R'$ *где је функција $f(z)$ регуларна за $|z| < R$, функција $h(z)$ за $|z| < R'$ и где је*

$$M(r) = \operatorname{Max} |f(z)| \text{ за } |z| = r,$$

тада из

$$(E, f) - \lim s_n = s$$

следи

$$(E, g) - \lim s_n = s.$$

Доказ. Претпоставимо да су услови става задовољени и уведимо следеће ознаке

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu, \quad g^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} z^\nu, \quad h^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} z^\nu;$$

$$T_1 = [a_{n\nu}], \quad T_2 = [b_{n\nu}], \quad T_3 = [c_{n\nu}].$$

Пошто је $h(f(z)) = g(z)$, биће $h^n(f(z)) = g^n(z)$, па је стога

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} \sum_{m=0}^{\infty} a_{\nu m} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} z^m.$$

Стога, на основу Weierstrass-ове теореме о двоструким редовима, имаћемо

$$b_{nm} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} a_{\nu m}, \quad \text{дакле,} \quad T_3 T_1 = T_2.$$

Пошто је низ s_n збирљив (E, f) ка s, и пошто је поступак збирљивости (E, h) перманентан, $T_3(T_1 s_n) \to s$. Треба доказати да је низ s_n такође (E, g) збирљив ка s, то јест да $T_2 s_n = (T_3 T_1) s_n \to s$.

Ради тога је довољно показати да је $T_3(T_1 s_n) = (T_3 T_1) s_n$, то јест да је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n\nu} a_{\nu m} s_m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} a_{\nu m} s_m. \tag{12}$$

Ради тога применићемо Weierstrass-ову теорему о двоструким редовима на ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} \sum_{m=0}^{\infty} a_{\nu m} s_m z^m.$$

На тај начин, промену поретка сумације (12) оправдаћемо ако докажемо да је ред $\sum_{m=0}^{\infty} a_{\nu m} s_m z^m = f_\nu(z)$ конвергентан за $|z| \leqslant 1+\delta$, $\delta > 0$ и да је ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} f_\nu(z)$ униформно конвергентан за $|z| \leqslant 1+\delta$.

Нека је $r < R$ и $M(r) < R'$; могућно је изабрати $\delta > 0$ и r_2 такве да је $(1+\delta) r = r_1 < r_2 < R$ и да је

$$M(r_2) < R'. \tag{13}$$

Тада, за $|z| \leqslant 1+\delta$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{\nu m}|\, |s_m|\, |z|^m &\leqslant K \sum_{m=0}^{\infty} |a_{\nu m}| r^m (1+\delta)^m = \\ &\leqslant K \sum_{m=0}^{\infty} |a_{\nu m}| r_1^m < \infty, \end{aligned} \tag{14}$$

јер редови

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu} z^\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|\, z^\nu$$

имају исти полупречник конвергенције. Дакле, редови којима су дефинисане функције $f_\nu(z)$ конвергирају за $|z| \leqslant 1+\delta$.

С друге стране, због (14), имаћемо

$$|f_\nu(z)| \leqslant K \sum_{m=0}^{\infty} |a_{\nu m}| r_1^m, \quad |z| \leqslant 1+\delta. \tag{15}$$

Применом леме 4 на функцију $f(r_1 z)/M(r_1)$ добијамо

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{\nu m}| r_1^m \leqslant L\nu M^\nu(r_1),$$

одакле следи $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{\nu m}| r_1^m \leqslant L M^\nu(r_2)$ за ν веће од извесног ν_0.

На основу (15) имамо тада

$$|f_\nu(z)| \leqslant K L M^\nu(r_2), \quad |z| \leqslant 1+\delta, \quad \nu > \nu_0,$$

па, пошто је ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{n\nu}| M^\nu(r_2)$, због (13), конвергентан, ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} f_\nu(z)$ униформно конвергира за $|z| \leqslant 1+\delta$, чиме је теорема доказана.

Доказана теорема поставља оштре услове функцији $g(z)$. Строгост тих услова не потиче, међутим, од недовољне општости теореме — она је у самој природи ствари. Да бисмо то показали примером, посматрајмо поступак (E, e^{z-1}). Пошто функција e^{z-1} узима вредност један у тачкама $z = 1 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, сваки од низова $s_n = (1+2k\pi i)^n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, збирљив је ка јединици. На тај начин, да би поступак (E, g) садржао поступак (E, e^{z-1}) потребно је, између осталог, да сваки од претходних низова буде (E, e^{z-1}) збирљив ка јединици. Међутим, то је могућно једино ако функција $g(z)$ у свим тачкама $z = 1 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ узима вредност један, што претставља једно врло оштро ограничење, које није једино.

IV. ЈЕДНА СПЕЦИЈАЛНА КЛАСА ПОСТУПАКА ЗБИРЉИВОСТИ

4.1. У овоме одељку применићемо добијене ставове на класу поступака збирљивости коју је увео Карамата, то јест на поступке збирљивости (E, f) који одговарају функцијама $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где су a, b, c и d реални бројеви.

Пошто $f(z)$ као сингуларитет има само један пол, да би ред од $f(z)$ био апсолутно конвергентан за $|z| = 1$, што је потребно за перманенцију одговарајућег поступка збирљивости, тај пол мора се налазити ван јединичног круга. Стога су услови $d \neq 0$ и $f(1) = 1$, то јест $a+b = c+d$ потребни за перманенцију. На тај начин, ограничавајући се на перманентне поступке, можемо четири параметра a, b, c, d свести на два независна и писати $f(z)$ у облику

$$f(z) = \frac{\alpha + (1-\alpha-\beta) z}{1-\beta z}.$$

Одговарајући поступак збирљивости означаваћемо са $E(\alpha, \beta)$.

СТАВ 5. *Да би поступак збирљивости $E(\alpha, \beta)$ био перманентан, потребно је и довољно да или*

$$\alpha = \beta = 0$$

или

$$\alpha < 1,\ \beta < 1,\ \alpha + \beta > 0.$$

Доказ. i) Услови су потребни.

На основу прва два услова Toeplitz — Schur-a, $f(z)$ не може бити константа, па је према томе $\alpha \neq 1$ и $\beta \neq 1$.

Као што смо већ показали, функција $f(z)$ мора бити регуларна за $|z| \leqslant 1$. Дакле $|\beta| < 1$.

Из

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqslant \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{n\nu} \right| = |f(-1)|^n = \left| \frac{2\alpha+\beta-1}{1+\beta} \right|^n$$

и из

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1) \text{ код } n \to \infty,$$

следи $|f(-1)| \leqslant 1$, дакле $|2\alpha+\beta-1| \leqslant 1+\beta$ што даје $\alpha < 1$ и $\alpha+\beta \geqslant 0$.

Ако је $\alpha+\beta=0$ биће или $\alpha=0$ и $\beta=0$ и одговарајући поступак је перманентан, или пак $\alpha \neq 0$, то јест $f(z) = \dfrac{z+\alpha}{1+\alpha z}$ и одговарајући поступак — према ставу 3 — није перманентан. Према томе, потребно је да буде или $\alpha=\beta=0$ или $\alpha+\beta > 0$.

ii) Услови су довољни.

Ако је $\alpha=\beta=0$ функција $f(z)$ своди се на функцију z, а одговарајући поступак збирљивости своди се на конвергенцију

У супротном случају, пошто је $\beta < 1$ и $\beta > -\alpha > -1$, функција $f(z)$ регуларна је за $|z| < R$, $R > 1$. Пошто је $\alpha < 1$ и $\alpha+\beta > 0$, биће $2\alpha+\beta-1 < 1+\beta$ и $-2\alpha-\beta+1 < 1+\beta$, па је $|f(-1)| < 1$. На тај начин $|f(z)| < 1$ у свим тачкама јединичног круга изузев тачке $z=1$, јер скуп тачака z за које је $|f(z)| \leqslant 1$ јесте или полураван $\Re z \leqslant 1$ или круг који пролази кроз тачку $z=1$, чији је центар на реалној оси и који садржи тачку $z=-1$, јер је $|f(-1)| < 1$. Пошто је

$$f'(1) = \frac{1-\alpha}{1-\beta},\quad f''(1) = \frac{2\beta(1-\alpha)}{(1-\beta)^2},\quad \alpha < 1,\ \alpha+\beta > 0,$$

имаћемо

$$f''(1) < f'(1)^2 - f'(1)$$

па је $f(z)$ E-функција. Како је $f(1) = 1$, задововљени су сви услови става 2.

4.2. СТАВ 6. *Нека су* $E(\alpha, \beta)$ *и* $E(\alpha', \beta')$ *два перманентна поступка збирљивости. Ако је*

i) $\alpha'+\beta'-\alpha'\beta > \alpha+\beta-\alpha\beta'$,

ii) $1 > \alpha+\beta-\alpha\beta'$,

iii) $s_n = O(r^n)$,

где је

$$r < \frac{1}{|\beta|}, \ \mathrm{Max}\left\{\frac{\alpha+(1-\alpha-\beta)r}{1+\beta r}, \frac{(1-\alpha-\beta)r-\alpha}{1+\beta r}\right\} < \frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}{|\beta'-\beta|}$$

тада из

$$E(\alpha, \beta) - \lim s_n = s$$

следи

$$E(\alpha', \beta') - \lim s_n = s.$$

Доказ. Из $f(z) = \dfrac{\alpha+(1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z}$

следи

$$f^{-1}(z) = \frac{z-\alpha}{1-\alpha-\beta+\beta z},$$

одакле је

$$(16) \qquad h(z) = g(f^{-1}(z)) = \frac{\alpha'-\alpha+\alpha\beta'-\alpha'\beta+(1-\alpha'-\beta'+\alpha'\beta)z}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'-(\beta'-\beta)z}.$$

Стављајући

$$h(z) = \frac{\alpha''+(1-\alpha''-\beta'')z}{1-\beta''z}$$

имаћемо

$$\alpha'' = \frac{\alpha'-\alpha+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}, \quad \beta'' = \frac{\beta'-\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}.$$

Према ставу 5, потребни и довољни услови да би $E(\alpha'', \beta'')$ био перманентан поступак су или $\alpha''=\beta''=0$ што је, због $\beta<1$, еквивалентно са $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, или пак $\alpha''<1$, $\beta''<1$, $\alpha''+\beta''>0$, што је еквивалентно са следећим неједначинама

$$\frac{\alpha'-\alpha+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'} < 1, \ \frac{\beta'-\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'} < 1, \ \frac{\alpha'+\beta'-\alpha-\beta+\alpha\beta'-\alpha'\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'} > 0.$$

Међутим, пошто функције $f(z)$ и $g(z)$ задовољавају услове теореме 5, последње три неједначине своде се на следеће две

$$\alpha'+\beta'-\alpha'\beta > \alpha+\beta-\alpha\beta', \ 1 > \alpha+\beta-\alpha\beta'.$$

Према томе задовољен је услов i) става 4.

Да бисмо показали да је задовољен и услов ii) истог става, приметимо да је функција $f(z)$ регуларна за $|z|<1/|\beta|$ и да је, према (16), функција $h(z)$ регуларна за $|z|<\frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}{|\beta'-\beta|}$. С друге стране, за $|z|<r$, $1\leqslant r<1/|\beta|$, $\operatorname{Max}|f(z)|$ биће једнак $\frac{\alpha+(1-\alpha-\beta)r}{1-\beta r}$ или $\frac{(1-\alpha-\beta)r-\alpha}{1+\beta r}$ према томе да ли је $\alpha+\beta(1-\alpha-\beta)r^2$ позитивно или негативно, што се може показати лаким рачуном. На основу тога и на основу претпоставке о понашању низа s_n закључујемо да је задовољен и услов ii) става 4.

V. ПРИМЕНА НА ТЕОРИЈУ АНАЛИТИЧКОГ ПРОДУЖЕЊА

5.1. Став који се даје у овом одељку претставља уопштење познатих ставова о аналитичком продужењу помоћу Euler-овог, односно Borel-овог поступка збирљивости. Пошто се третирају општији поступци збирљивости, и формулација става и доказ биће сложенији. На пример, појављује се тешкоћа због тога што функција $f(z)$ — генератриса поступка збирљивости који посматрамо — није нужно цела функција, већ може имати у великом степену произвољно распоређене сингуларитете, што ће бити од утицаја на област у којој одговарајући поступак збирљивости аналитички продужава дати елемент неке аналитичке функције. На тај начин, област у коју се врши аналитичко продужење зависиће од две врсте сингуларитета: сингуларитета функције чије аналитичко продужење тражимо и сингуларитета функције генератрисе оног поступка збирљивости помоћу кога се то продужење врши. (У раније проучаваним случајевима — Euler-ова, Borel-ова, Mittag—Leffler-ова, Lindelöf-ова збирљивост — област је зависила само од прве врсте сингуларитета).

Нека је $f(z)$ E-функција, $f(1)=1$, и нека је R полупречник конвергенције степеног реда од $f(z)$. Означимо са $K(f,\zeta)$ скуп свих тачака z таквих да је $\left|\frac{z}{\zeta}\right|<R$, $\left|f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\right|<1$. Нека је $F(z)$ аналитичка функција регуларна у почетку. Сваком њезином сингуларитету ζ одговара један скуп $K(f,\zeta)$. Пресек свих таквих скупова означићемо са $A(f,F)$.

Области $A(f,F)$ могу бити јако различите за разне функције $f(z)$. Оне не морају бити ни повезане, као што показује следећи пример. Ставимо

$$F(z)=(1-z)^{-1},\quad f(z)=e^{\frac{i}{2}z^2+(1-i)z-1+\frac{i}{2}}.$$

Тада је $|f(z)| = e^{(1-\Re z)(\Im z - 1)}$, па је $f(z)$ E-функција, а област $A(f, F)$ састављена је од оног угла између правих $\Re z = 1$ и $\Im z = 1$ у коме лежи тачка $z = 0$ и угла унакрсног томе.

Насупрот томе, област $A(f, F)$ увек је таква да је у њој на једнозначан начин дефинисано аналитичко продужење оног елемента функције $F(z)$ који је дат степеним развитком те функције у тачки $z = 0$. Да бисмо то показали, довољно је да утврдимо да сви сингуларитети функције $F(z)$ припадају комплементу области $A(f, F)$, и да тај комплимент са сваким сингуларитетом садржи и неки засек — у општем случају тај засек је нека крива линија која тај сингуларитет спаја са тачком бесконачно. Због $f(1) = 1$, очигледно је да скуп $K(f, \zeta)$ не садржи тачку $z = \zeta$, па $A(f, F)$ – као пресек свих таквих скупова — не садржи ниједан сингуларитет функције $F(z)$. Да комплемент скупа $A(f, F)$ садржи и засеке, мање је очигледно. Да бисмо то показали, довољно је да утврдимо да комплемент скупа $K(f, 1)$ садржи криву која спаја тачку $z = 1$ са тачком $z = \infty$. Ако је функција $f(z)$ цела, приметимо да на основу принципа максималног модула, непрекидности модула и чињенице да је $f(1) = 1$, постоји не само једна крива, већ читава једна област која повезује тачке $z = 1$ и $z = \infty$, у чијој је свакој тачки $|f(z)| \geqslant 1$, и која је стога садржана у комплементу скупа $A(f, F)$. Ако функција није цела, исто резоновање доказује егзистенцију једне области која припада комплементу од $A(f, F)$ и која повезује тачку $z = 1$ са неком тачком периферије круга $|z| = R$. Како спољашњост тога круга такође припада комплементу од $A(f, F)$, тај комплемент садржи област која повезује тачку $z = 1$ са тачком $z = \infty$.

Дефиниција области $A(f, F)$ омогућује нам да формулишемо

СТАВ 7. *Ако је (E, f) поступак збирљивости перманентан, (E, f) трансформација низа парцијалних сума реда $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = F(z)$ униформно конвергира ка $F(z)$ у сваком ограниченом затвореном делу $K(f, F)$ скупа $A(f, F)$.*

Доказ. i) Доказаћемо најпре тврђење става у специјалном случају $F(z) = (1-z)^{-1}$. Ставимо

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu, \qquad s_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\nu} z^m.$$

Тада је

$$\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{z^{\nu+1}}{1-z} \right) = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu.$$

Ако z припада области $A(f,(1-z)^{-1})=K(f,1)$, тада, прво, ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^{\nu}$ конвергира и сума му је $f^n(z)$, и друго, $|f(z)|<1$, па $f^n(z)\to 0$. Стога $\sigma_n(z)\to(1-z)^{-1}$.

Ако посматрамо ограничену затворену област садржану у $A(f,(1-z)^{-1})$, конвергенција ће бити униформна, јер у том случају $|f(z)|\leqslant 1-\delta$, $\delta>0$, па $f^n(z)$ униформно тежи нули.

ii) Показаћемо да постоји контура C са следећим својствима

a) Функција $F(z)$ регуларна је унутар контуре C и на њој;

b) $\left|\frac{z}{u}\right|\leqslant R-\delta$, $\delta>0$ за $z\in K(f,F)$, $u\in C$,

c) $\left|\frac{z}{u}\right|\leqslant 1-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ за $z\in K(f,F)$, $u\in C$.

По дефиницији области $A(f,F)$, $|z/\zeta|<R$ кад $z\in A(f,F)$. Покажимо да постоји $\delta>0$ такво да је $|z/\zeta|\leqslant R-2\delta$ за свако ζ које је сингуларитет функције $F(z)$ и свако z из $K(f,F)$. Приметимо, ради тога, да је у том домену функција $|z/\zeta|$ непрекидна, јер ζ не узима вредност нула, пошто је $F(z)$ регуларно у почетку. Даље, како су скуп $K(f,F)$ и скуп сингуларитета функције $F(z)$ компактни — последњи зато што радимо у z-равни проширеној тачком ∞, то функција $|z/\zeta|$ мора узимати своју максималну вредност у посматраном домену, и како је та максимална вредност мања од R, тврђење је доказано.

Даље, како је због $|z/\zeta|\leqslant R-2\delta$, функција $|f(z/\zeta)|$ непрекидна у посматраном домену, то и она достиже у њему свој максимум, који је — према дефиницији области $A(f,F)$ — мањи од јединице, па важи $|f(z/\zeta)|\leqslant 1-2\varepsilon$, $\varepsilon>0$ за $z\in K(f,F)$.

Нека је d_ζ отстојање тачке ζ од скупа $K(f,F)$, које је позитивно, јер је скуп $K(f,F)$ затворен и не садржи тачку ζ. Из чињенице да је скуп тачака ζ — као скуп сингуларитета аналитичке функције — затворен, следи да је позитиван и број $d=\inf d_\zeta$. Пошто је скуп $K(f,F)$ ограничен, то постоји број M такав да је $|z|\leqslant M$ кад год је $z\in K(f,F)$. Са ρ означимо полупречник конвергенције степеног реда функције $F(z)$, а са L — $\operatorname{Max}\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|$ за $|z_1|$, $|z_2|\leqslant R-\delta$. Уведимо, најзад, ознаку

$$2\eta=\operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}d,\ \frac{1}{2}\rho,\ \frac{\rho^2\delta}{2M},\ \frac{\rho^2\varepsilon}{2ML}\right).$$

Око сваке тачке ζ која је сингуларитет функције $F(z)$ опишимо круг $C_{\zeta, 2\eta}$ полупречника 2η. Кад тачка u лежи унутар тога круга, имамо $|u-\zeta|<2\eta$. Одатле је $\left|\left|\frac{u}{\zeta}\right|-1\right|<\frac{2\eta}{\rho}\leqslant\frac{1}{2}$, па је $|u|\geqslant\frac{\rho}{2}$. На основу тога биће

$$\left|\left|\frac{z}{u}\right|-\left|\frac{z}{\zeta}\right|\right|\leqslant\left|\frac{z}{u}-\frac{z}{\zeta}\right|=\frac{|z|}{|u||\zeta|}|\zeta-u|<\frac{2M}{\rho^2}2\eta<\delta,$$

па је, због $\left|\frac{z}{\zeta}\right|\leqslant R-2\delta$,

$$\left|\frac{z}{u}\right|\leqslant R-\delta.$$

Слично, пошто је

$$\left|f\left(\frac{z}{u}\right)-f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\right|\leqslant L\left|\frac{z}{u}-\frac{z}{\zeta}\right|,$$

добијамо да је

$$\left|\left|f\left(\frac{z}{u}\right)\right|-\left|f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\right|\right|\leqslant\frac{2ML}{\rho^2}2\eta<\varepsilon,$$

одакле, због $\left|f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\right|\leqslant 1-2\varepsilon$, следи

$$\left|f\left(\frac{z}{u}\right)\right|\leqslant 1-\varepsilon.$$

Ако је тачка ∞ један сингуларитет функције $F(z)$, око ње ћемо описати круг $|z|=\frac{1}{2\eta_\infty}$, где је $2\eta_\infty=\mathrm{Min}\left\{\frac{1-\varepsilon}{ML}, \frac{1-\delta}{M}\right\}$. Очигледно је да за свако z из $K(f, F)$ и свако u из тог круга важи

$$\left|\frac{z}{u}\right|\leqslant 1-\delta, \quad \left|f\left(\frac{z}{u}\right)\right|\leqslant 1-\varepsilon.$$

Унију свих отворених кругова $C_{\zeta, 2\eta}$ означимо са $S_{2\eta}$, унију свих затворених кругова $C_{\zeta, \eta}$ са S_η. Скуп $S_{2\eta}$ је отворен, покажимо да је скуп S_η затворен. Нека је x нека тачка нагомилавања скупа S_η. Тада постоји низ тачака $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ који кон-

вергира ка x и припада S_η, то јест свакоме x_n одговара бар једно ζ_n такво да је $x_n \in C_{\zeta_n, \eta}$. Претпоставимо да је за скоро све n, $\zeta_n = \infty$. Тада је за скоро све n, $|x_n| \geqslant 1/\eta_\infty$, па је и $|x| \geqslant 1/\eta_\infty$, чиме је у овоме случају тврђење доказано. Ако наша претпоставка није испуњена, постоји бесконачно много ζ_n таквих да је $|x_n - \zeta_n| \leqslant \eta$. Низ ζ_n не мора да конвергира ни да тежи комплексном ∞. Изаберимо подниз ζ'_m који конвергира или тежи ∞. Другу могућност можемо искључити, јер је она еквивалентна претходноме случају, у коме је тврђење доказано. Због тога и због затворености скупа сингуларитета аналитичке функције, $\lim \zeta'_n = \zeta \neq \infty$, па из $|x_n' - \zeta_n'| < \eta$ следи $|x - \zeta| < \eta$, дакле и тачка x припада скупу S_η.

Пошто је скуп $S_{2\eta}$ отворен, а S_η затворен, скуп $S = S_{2\eta} \setminus S_\eta$ биће отворен. У свакој компоненти T_i од S (сваком максималном повезаном отвореном делу скупа S) могућно је наћи просту затворену полигоналну линију C_i око скупа $T_i \cap S_\eta$. Скуп свих полигоналних линија C_i узећемо за путању C. Она очигледно задовољава услове a), b) и c), ако унутрашношћу од C назовемо онај скуп коме је C руб и који садржи тачку $z = 0$.

iii) На основу Cauchy-еве формуле биће

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(u)\, du}{u - z},$$

ако тачка z лежи у унутрашњости контуре C.

Уведимо ознаке

$$\varphi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\, s_\nu(z), \qquad s_\nu(z) = \frac{1 - z^{\nu+1}}{1 - z}.$$

Тада је

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(u)}{u} \lim_{n \to \infty} \varphi_n\left(\frac{z}{u}\right) du.$$

Пошто је $\left|\frac{z}{u}\right| \leqslant R - \delta$, према i) $\varphi_n\left(\frac{z}{u}\right)$ униформно конвергира, па ћемо имати

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \int_C \frac{F(u)}{u} \varphi_n\left(\frac{z}{u}\right) du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \int_C \frac{F(u)}{u} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n,\nu}\, s_\nu\left(\frac{z}{u}\right) du.$$

Како је ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \left(\frac{z}{u}\right)^{\nu+1}$, због $\left|\frac{z}{u}\right| \leqslant R-\delta$, униформно конвергентан, то је и ред $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \left(\frac{z}{u}\right)$ униформно конвергентан, па је

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\int_C \frac{F(u)}{u} s_\nu\left(\frac{z}{u}\right) du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\int_C F(u)\left(\frac{1}{u}+\frac{z}{u^2}+\frac{z^2}{u^3}+\cdots+\frac{z^\nu}{u^{\nu+1}}\right) du.$$

Деформисаћемо контуру C у контуру C' која ће потпуно лежати унутар круга конвергенције за функцију $F(z)$. Тада је

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\int_{C'} (A_0+A_1 u+\cdots)\left(\frac{1}{u}+\frac{z}{u^2}+\cdots+\frac{z^\nu}{u^{\nu+1}}\right) du=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(A_0+A_1 z+\cdots+A_\nu z^\nu)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} F_\nu(z),$$

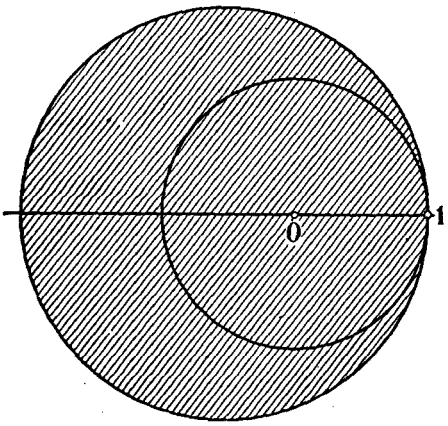
где је $F_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\nu} A_m z^m$ ν-та парцијална сума степеног реда функције $F(z)$.

5.2. Ради илустрације последњег става навешћемо како област $A(f, F)$ изгледа уколико се посматрају поступци збирљивости асоцирани функцијама

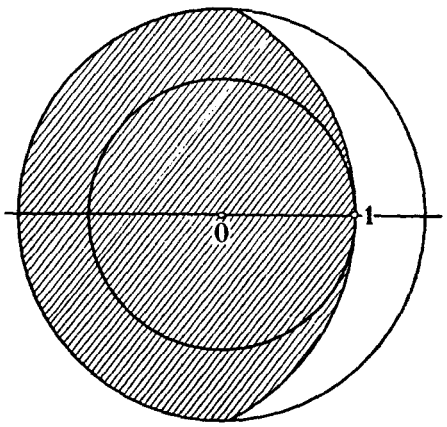
$$f(z)=\frac{\alpha+(1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z},\quad \alpha<1,\ \beta<1,\ \alpha+\beta>0,$$

тј. $E(\alpha, \beta)$ поступци, испитивани у четвртом одељку. Ограничићемо се природно на случај $F(z)=(1-z)^{-1}$, што значи да ћемо

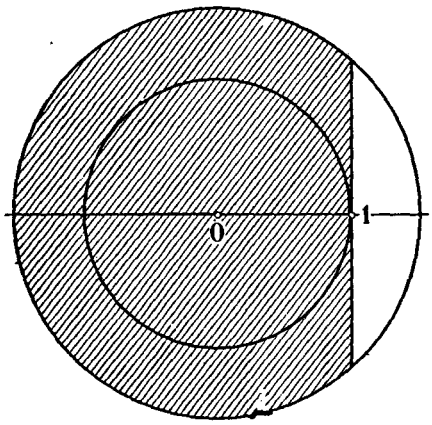
посматрати области $K(f, 1)$. Оне претстављају скуп тачака z за које је истврeмено $|z| < 1/|\beta|$ и $|\alpha + (1-\alpha-\beta) z| < |1-\beta z|$, дакле скуп тачака које се налазе унутар два круга, или унутар првог



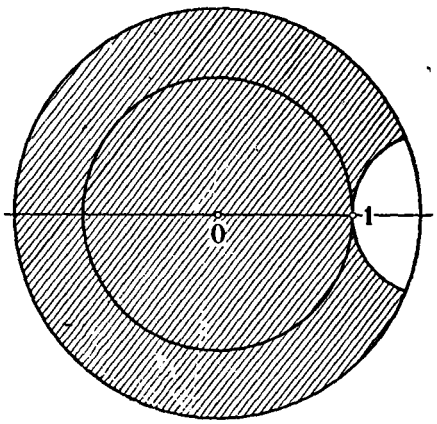
Сл. 2



Сл. 3



Сл. 4



Сл. 5

и ван другог од та два круга. Шрафиране области на цртежима 2—5 претстављају тада области $K(f, 1)$ за различите односе између коефицијената α и β.

(Саопштено 11 јануара 1956)

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Bajšanski — Sur une classe générale de procédés de sommations du type d'Euler—Borel. *Publ. Inst. Math. Ac. Serbe Sc.* **10** (1956), 131—152.

[2] ——— Généralisation d'un théorème de Carlemann. *Publ. Inst. Math Serbe Sc.* **12** (1958), 101—108.

[3] L. Bieberbach — Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II. New York 1945.

[4] D. Gaier — On modified Borel methods. *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 873—879.

[5] J. Карамата — О једној класи поступака збирљивости. *Зборник радова Мат. инст. САН.* (У припреми)

[6] W. Meyer—König — Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. *Math. Z.* **52** (1949), 257—304.

[7] G. Pólya und G. Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II Bd., Springer 1954.

[8] J. Sonnenschein — Sur les séries divergentes. *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.* (5) **35** (1949), 594—601.

[9] A. Zygmund — Trigonometrical series. New York 1952.

UNE CLASSE GÉNÉRALE DE PROCÉDÉS DE SOMMATIONS DU TYPE D'EULER—BOREL ET LEUR APPLICATION AU PROLONGEMENT ANALYTIQUE

BOGDAN M. BAJŠANSKI (Beograd)

Soit $f(z)$ une fonction regulière à l'origine. On définit un procédé de sommation, dit (E, f)-procédé, par la matrice $[a_{n\nu}]$, où

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu .$$

On dira que la fonction $f(z)$ a E-propriété au point $z=1$ si

i) $f(z)$ est régulière au point $z=1$,

ii) $f(1)=1$

iii) $|f(e^{ti})| \leqslant 1$ pour t suffisament petit, et

iv) $f(z)-z^\alpha = A\, i^p (z-1)^p + o(1)(z-1)^p, \quad z \to 1, \quad \alpha = f'(1), \; A \neq 0$

implique $\mathfrak{RI}\, A \neq 0$.

(La condition iv) est très générale. Elle est satisfaite, par exemple, si le contact des courbes $f(e^{ti})$ et e^{ti} au point $t=0$ est de premier ordre).

On dira que la fonction $f(z)$ a E-propriété au point ζ si la fonction $h(z)=\dfrac{f(z\zeta)}{f(\zeta)}$ a E-propriété au point $z=1$.

L'auteur démontre

THÉORÈME 1. *Si la fonction* $f(z)$

i) *est holomorphe pour* $|z|<R$, $R>1$;

ii) $\operatorname*{Max}_{|z|=1}|f(z)|=1$;

iii) $f(z)$ *a* E*-propriété au chaque point* $e^{\tau i}$ *tel que* $|f(e^{\tau i})|=1$;

alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|=O(1),\quad n\to\infty,$$

où

$$f^n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}z^{\nu}.$$

THÉORÈME 2. *Si la fonction* $f(z)$

i) *est holomorphe pour* $|z|<R$, $R>1$;

ii) $|f(z)|=1$ *pour* $|z|=1$;

iii) $f(z)\neq e^{\vartheta i}z^k$, $k=0,1,2,\ldots$

alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\to\infty \text{ lorsque } n\to\infty$$

où

$$f^n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}z^{\nu}.$$

En appliquant le premier théorème, l'auteur obtient le théorème de permanence et le théorème d'inclusion pour les procédés (E,f), et particulièrement pour une classe des procédés définie par Karamata, c'est-à-dire pour les procédés (E,f) où $f(z)=\dfrac{\alpha+(1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z}$.

Enfin, l'auteur démontre que la série géométrique est sommable uniformément par le procédé (E,f) vers la fonction $(1-z)^{-1}$ dans chaque région bornée et fermée qui est contenue dans la région définie par $|f(z)|<1$, $|z|<R$, où R est le rayon de la convergence de la série entière de $f(z)$. Le théorème général sur le prolongement analytique s'en déduit de la manière habituelle.