Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О ЈЕДНОЈ РЕДУКЦИЈИ ПОТПУНОГ НОРМАЛНОГ ЕЛИПТИЧКОГ ИНТЕГРАЛА ТРЕЋЕ ВРСТЕ

Нека је

$$L(k,\psi) \equiv FE(k,\psi) - EF(k,\psi), \tag{1}$$

где су $F(k,\psi)$ и $E(k,\psi)$ нормални елиптички интеграли I и II врсте модула k и амплитуде ψ, док су F и E одговарајући потпуни интеграли.

Израз $L(k,\psi)$ своди се на потпуни нормални елиптички интеграл III врсте Legendre-ова типа са параметром $-k^2 \sin\psi$ тј.

$$L(k,\psi) = \operatorname{ctg}\psi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,[\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) - F], \tag{2}$$

а у својој тези [1] показао сам да је

$$m\,L(k,\psi) = F\,k^2 \sin\psi \sin\psi_{m-1} + F\,k^2 \sin\psi \sum_{\nu=2}^{m-1} \sin\psi_{\nu-1} \sin\psi_\nu, \tag{3}$$

кадгод су задовољени услови

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2} = \operatorname{tg}\psi_\nu \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}, \tag{4}$$

$$\nu = 1, 2, \dots\, m-1,$$

и обрнуто. При томе је $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = \psi$, $\psi_m = \frac{\pi}{2}$; величина ψ се може изразити као функција од k.

Познато је да се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте може изразити комбинацијама потпуних и непотпуних елиптичких интеграла I и II врсте. Горњи резултат омогућио ми је да изнађем један низ случајева у којима се овакво изражавање врши помоћу само п о т п у н и х интеграла. Према горњем је

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) = F + \frac{F\,k^2 \operatorname{tg}\psi \sin\psi}{m\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\Big(\sin\psi_{m-1} + \sum_{\nu=2}^{m-1} \sin\psi_{\nu-1}\sin\psi_\nu\Big), \tag{5}$$

уз услове (4), при чему се природни број $m>1$ може бирати произвољно. Тако например за $m=2$ добио сам образац

$$\Pi_0(-1+k')=\frac{1+k'}{2k'}F, \tag{6}$$

(други члан на десној страни обрасца (3) отпада) при чему је k' комплементаран модуо модулу k:

$$k'=\sqrt{1-k^2}.$$

Овај образац био је и раније познат, но он је дедуциран из опште методе која је изложена у тези. За остале вредности m добивају се потпуно нови резултати. Тако за $m=3$ добио сам

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi)=\frac{F}{3}\left(1+\frac{1}{1-\sin\psi}\right), \tag{7}$$

где $\sin\psi$ мора задовољавати једначину

$$k^2\sin^4\psi-2k^2\sin^3\psi+2\sin\psi-1=0 \tag{8}$$

која даје једну једину вредност за $\sin\psi$ у размаку $(0,1)$ итд.

У овом раду показаћу да се може добити један низ нових вредности за потпуне нормалне елиптичке интеграле III врсте код којих за параметар n важи неједначина $-k^2<n<0$ и који се изражавају само потпуним интегралом I врсте истог модула. Доказаћу, наиме, следећи

СТАВ: *Кад год низ амплитуда ψ_ν, $(\nu=1, 2, .., m-1)$ задовољава $m-1$ једначину*

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2}=\operatorname{tg}\psi_\nu\sqrt{1-k^2\sin^2\psi_\nu}, \tag{9}$$

$$\nu=1,\ 2,\dots m-1;\quad \psi_0=0,\quad \psi_1=\psi,\quad \psi_m=\frac{\pi}{2},$$

тада је

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{(1-k^2\sin^2\psi)F}{k'^2}-$$

$$-\frac{Fk^2\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{mk'^2}\left(\sin\psi_{m-1}+\sum_{\nu=2}^{m-1}\sin\psi_{\nu-1}\sin\psi_\nu\right), \tag{10}$$

и обрнуто.

Доказ овог става лако следи на основу једне Legendre-ове формуле [2]

$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\log\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}+k^2\sin\psi\cos\psi\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}-k^2\sin\psi\cos\psi\sin\theta\cos\theta}=$$

$$=F(k,\theta)-\cos^2\psi\,\Pi(-k^2\sin^2\psi,k,\theta)-$$

$$-\frac{k'^2\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\Pi\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi},k,\Theta\right),$$

ако се у овој стави $\theta=\frac{\pi}{2}$. Тада интеграли Π и $F(k,\theta)$ постају потпуни интеграли Π_0 и F, па следи

$$F-\cos^2\psi\,\Pi_0(-k^2\sin^2\psi)-\frac{k'^2\sin^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=0.$$

Ако се вредност $\Pi_0(-k^2\sin^2\psi)$ израчуна из ове једначине и стави у образац (5), добиће се једначина (10), што је требало показати.

За $m=2$ добива се један једини услов (9):

$$\operatorname{ctg}^2\psi=k',$$

а у једначини (10) отпада други члан у малој загради, тако да се опет добива образац (6). Међутим, за $m>2$ добива се потпуно нови низ вредности. Тако например за $m=3$ важи условна једначина (8), а образац (10) постаје

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{F\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{3k'^2}[3\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}-$$

$$-k^2\sin\psi_2\cos\psi(1+\sin\psi)],$$

док из једначина (9) $\left(\nu=1,\ 2;\ \psi_3=\frac{\pi}{2}\right)$ за $\nu=1$ следи

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_2}{2}=\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi},$$

тј.

$$\sin\psi_2=\frac{2\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{1-k^2\sin^4\psi},$$

односно

$$\sin\psi_2=\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

јер је према (8) $1-k^2\sin^4\psi=2\sin\psi(1-k^2\sin^2\psi)$.

На основу тога је

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{F}{3k'^2}(3-2k^2\sin^2\psi-k^2-k^2\sin\psi+k^2\sin^3\psi),$$

а после проширивања разломка на десној страни са $\sin\psi$ и примене једначине (8),

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2\cos^2\psi}{1-k^2\sin^2\psi}\right)=\frac{F}{3k'^2\sin\psi}(1+\sin\psi)(1-k^2\sin\psi).$$

При томе $\sin\psi$ има вредност из једначине (8). Због $n=-k^2\sin^2\psi$ горња једначина може се писати у облику

$$\Pi_0\left(-\frac{n+k^2}{n+1}\right)=\frac{(k+\sqrt{-n})(1-k\sqrt{-n})}{3k'^2\sqrt{-n}}F.$$

За веће вредности m, условне једначине ће се, разумљиво, компликовати, али се из изложенога види да су при оваквим редукцијама модуо и параметар увек везани алгебарским једначинама.

(Саопштено на седници Мат. института 27-VI-1956)

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Фемпл — О једној линеарној комбинацији нормалних елиптичких интеграла I и II врсте, *Зборник радова Математичког института С А Н* 5 (1956), 61—116.

[2] A. Enneper — Elliptische Functionen. У преради F. Müller-a. Halle a. S, 1890.

SUR UNE RÉDUCTION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE NORMALE COMPLÈTE DE III ESPÈCE

par

S. FEMPL

On sait que les intégrales elliptiques normales complètes de III espèce se laissent exprimer par la combinaison des intégrales elliptiques normales complètes et incomplètes de I et II espèces.

Dans sa thèse [1], l'auteur a donné une suite de conditions (formule (9)) auxquelles doivent satisfaire le module et le paramètre de l'intégrale de III espèce pour qu'une telle intégrale puisse être exprimée à l'aide des seules intégrales complètes de I espèce avec le même module.

Dans cette note on donne, sous les mêmes conditions, une autre suite d'intégrales de III espèce (formule (10)) s'exprimant à la manière précédente.