Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6. 1957

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ

ПРИМЈЕДБА О ЈЕДНОМ MARDEN-ОВОМ СТАВУ

1. Нека је

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \tag{1}$$

задани полином n-тог степена и нека је

$$f^*(z) = z^n \overline{f}(1/z) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = \bar{a}_0 \prod_{j=1}^{n} (z - z_j^*) \tag{1*}$$

полином чије су нуле $z_j^* = 1/\bar{z}_j$ симетричне нулама полинома (1) у односу на јединични круг $|z| = 1$.

Нека је, даље, полиному (1) придружен низ полинома $f_j(z) = \sum_{k=0}^{n-j} a_k^{(j)} z^k$, дефинисаних релацијама

$$f_0(z) = f(z)$$

$$f_{j+1}(z) = \bar{a}_0^{(j)} f_j(z) - a_{n-j}^{(j)} f_j^*(z), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

тј.

$$a_k^{(j+1)} = \bar{a}_0^{(j)} a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)} \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}$$

и нека је

$$P_k = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

низ производа у којима је

$$\delta_{j+1} \dot{a}_0^{(j+1)} = |a_0^{(j)}|^2 - |a_{n-j}^{(j)}|^2, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тада вриједи овај Marden-ов, [1; стр. 150, став (42, 1)],

СТАВ 1. *Ако у низу* (3) *има* p *негативних и* $n-p$ *позитивних производа* P_k, *тада полином* (1) *има* p *нула унутар и* $n-p$ *нула ван јединичног круга* $|z| = 1$, *а нема ни једне нуле на томе кругу.*

2. У тежњи да низовима (2) и (3) обухвати и случај кад полином (1) има и нула на јединичном кругу, Marden је дао такођер [1; стр. 157, став (44, 1)].

СТАВ 2. *Ако је у низу производа* (3), *за неко* $k < n$, *производ* $P_k \neq 0$, *а у низу полинома* (2) *полином* $f_{k+1}(z) \equiv 0$, *тада се* $n-k$ *нула полинома* (1), *идентичних са нулама полинома* $f_k(z)$ *из низа* (2), *налази на јединичном кругу* $|z| = 1$. *Поред тога, ако је* p *број негативних производа* P_j, $j = 1,2,\ldots,k$, *полином* (1) *има* p *нула унутар и* $q = k-p$ *нула ван јединичног круга.*

Овај став, међутим, није тачан, јер је при извођењу његова доказа учињена једна омашка.

Наиме, полином облика ([1]; стр. 155, (44, 1))

$$\psi(z) = \prod_{j=1}^{n-k} (z - e^{i\theta_j}) \tag{4}$$

није једини полином, чији одговарајући полином облика (1*) има особину да је

$$\psi^*(z) = (-1)^{n-k} e^{-i\sigma} \psi(z) \tag{4*}$$

$$\sigma = \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_{n-k}.$$

Ту особину има и полином

$$\varphi(z) = \prod_{\lambda=1}^{m} (z - e^{i\Theta_\lambda}) \prod_{\nu=1}^{s} \left[z^2 - \left(\rho_\nu + \frac{1}{\rho_\nu}\right) z e^{i\psi_\nu} + e^{2i\psi_\nu}\right] \tag{5}$$

$$\varphi^*(z) = (-1)^{n-k} e^{-i\sigma} \varphi(z) \tag{5'}$$

$$n-k = m + 2s, \quad \sigma = \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots \Theta_m + 2(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_s)$$

који, поред нула на јединичном кругу, има и парове симетрично распоређених нула у односу на тај круг.

Ако је, дакле, [1; стр. 156, (44,4)]

$$f(z) = \varphi(z)\, g(z) = \tag{6}$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{m} (z - e^{i\Theta_\lambda}) \prod_{\nu=1}^{s} \left[z^2 - \left(\rho_\nu + \frac{1}{\rho_\nu}\right) z e^{i\psi_\nu} + e^{2i\psi_\nu}\right] \sum_{j=0}^{k} b_j z^j,$$

$$m + k + 2s = n,$$

гдје је $g(z) = \sum_{j=0}^{k} b_j z^j$ полином који нема ни нула на јединичном кругу ни парова симетрично распоређених нула у односу на тај круг, биће

$$f^*(z) = \varphi^*(z)\, g^*(z) = (-1)^{n-k} e^{-i\sigma} \varphi(z)\, g^*(z) \tag{6*}$$

$$a_0 = (-1)^{n-k} e^{i\sigma} b_0, \; a_n = b_k$$

тј.

$$f_j(z)=\varphi^*(z)\,g_j(z);\quad f_j^*(z)=\varphi(z)\,g_j^*(z) \tag{7}$$

$$a_0^{(j)}=b_0^{(j)};\quad a_{n-j}^{(j)}=(-1)^{n-k}\,e^{-i\sigma}\,b_{k-j}^{(j)}\qquad j=1,\,2,\ldots,k$$

односно

$$f_k(z)=\varphi^*(z)\,b_0^{(k)}=(-1)^{n-k}\,e^{-i\sigma}\,\varphi(z)\,b_0^{(k)};\quad f_k^*(z)=\varphi(z)\,\bar{b}_0^{(k)} \tag{8}$$

$$f_{k+1}(z)=\bar{a}_0^{(k)}\,f_k(z)-a_{n-k}^{(k)}\,f_k^*(z)\equiv 0.$$

Обрнуто, ако је $f_{k+1}(z)\equiv 0$, тада из (8) и (2) произлази да је полином $f_k(z)$ заједнички фактор и полинома $f(z)$ и полинома $f^*(z)$

Како у овом случају полином $f_k(z)$ нема обавезно све нуле на јединичном кругу, то је очигледно да став 2., онако како је формулисан, није тачан.

Примјер: $f(z)=-6-(9+5i)\,z+(9-15\,i)\,z^2+(4-10\,i)\,z^3+8\,z^5$

$$f_1(z)=-28+(54+30\,i)\,z-(86-10\,i)z^2-(96+60\,i)\,z^3+$$
$$+(72-40\,i)\,z^4$$

$$f_2(z)=3000\,i\,[2\,i-(3+i)\,z-(1+3\,i)\,z^2+2\,z^3]$$

$$f_3(z)\equiv 0$$

$$\varphi(z)=z^3-\frac{1}{2}(1+3i)\,z^2-\frac{1}{2}(3+i)\,z+i=$$

$$=\left(z-e^{\pi i}\right)\left(z-\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)$$

Овдје је: $k=2$, $n-k=3$, $\delta_1=-28$, $\delta_2=-6000$, $p=1$, $q=1$, а полином $f(z)$ има двије нуле ($z_1=-1/2$, $z_2=1/2+i/2$) унутар јединичног круга, двије нуле ($z_3=-3i/2$, $z_4=1+i$) ван тога круга и само једну нулу ($z_5=-1$) на том кругу.

3. Напомињемо да у овом случају полином (8) има особине полинома $g(z)$ из става (45,2) [1; стр. 159], односно да је полином (8) идентичан са полиномом $f_k(z)$, о ком се говори у вјежби 2. [1; стр. 161].

У вези с тим видјети такођер [2; стр. 8] и [3].

(Саопштено на седници Мат. института 5-VI-1957)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Marden M. — The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, New-York, 1949.

[2] Dieudonné J. — La théorie analytique des polynômes d'une variable. *Mémorial des sciences mathématiques*, **XCIII**, Paris, 1938.

[3] Deaux R. — Sur les équations antiréciproques, *Mathesis*, **LVIII**, № 9—10 (1949), 281—284.

REMARQUE SUR UN THÉORÈME DE M. MARDEN

par

Š. RALJEVIĆ

L'auteur a remarqué que le polynôme (5) dont les coefficients satisfont à (5') a la propriété (4*) qui d'après M. Marden [1, p. 155] caractérise le polynôme (4) D'autre part, le polynôme (5) possède des zéros en dehors du cercle $|z|=1$, ce qui montre que le Th. (44, 1), [1, p. 157] n'est pas vrai.