Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

АНТОН БИЛИМОВИЋ

О ГЕОМЕТРИСКИМ ПАРАМЕТРИМА

У другој половини деветнаестог века појмови променљиве величине и функције почели су улазити у програме средњих школа. У двадесетом веку у напредним земљама били су уведени чак и елементи више математике. Примена разноликих функционалних веза добила је широку популарност и дала значајне резултате у развитку не само математичког већ и општег људског знања. У средњу школу та примена је била уведена, а остаје и сада углавном у области анализе, у области квантитативних односа.

Насупрот анализи, која је почела да оперише не само сталним већ и променљивим величинама, елементарна геометрија се конзервативно придржавала старог, готово Еуклидовог, начина излагања средњошколског материјала. Еуклидова особина геометриских облика, њихова непроменљивост, чак њихова смрзнутост, остаје и даље на снази. Основе аналитичке геометрије, унесене заједно са основама више математике, нису утицале на карактер излагања и материјал елементарне геометрије. Логичка структура геометрије је доминирала у излагању тог предмета и остављала у сенци друге важне особине елементарне геометрије као школског материјала за развијање дубљих просторних претстава везаних са променљивошћу тих облика по форми, величини и положају. Еуклидова логичка основа излагања елементарне геометрије, сама по себи од капиталне важности, не само што није развијала просторне претставе, већ их је, обратно, сужавала и ограничавала природну људску фантазију у области тих претстава. Услед те логичке доминације у елементарну геометрију није ушла идеја променљивости, а нарочито недостаје чисто геометриска променљивост, не променљивост оних величина које сачињавају елементе неког геометриског објекта, рецимо, страна и углова троугла, већ променљивост самог облика у целини, троугла као облика који има своју форму, величину и положај и мења те особине било услед трансформације било услед неких других разлога.

Савремена виша геометрија са уопштеним просторима различитих особина бави се променљивошћу геометриских објеката у врло широкој и апстрактној форми, али те нове области нису још утицале на излагање и материјал елементарне геометрије.

При излагању елементарне геометрије узети у обзир нова достигнућа савремене математике врло је тежак задатак. Али баш на томе задатку сад се много ради. Тај задатак је нарочито тежак због тога што уношење нових идеја може оштетити толико важну, у васпитном односу, логичку структуру геометрије. Неки успех у тој области је ствар далеке будућности, али нека модификација излагања важних истина елементарне геометрије изводљива је и у данашње време, при садашњем броју часова математике и при садашњем положају тог предмета у савременом систему средњошколске наставе.

Први корак у том правцу било би оцењивање геометриског објекта у целини анализом оних битних геометриских особина које припадају свима геометриским објектима. То се оцењивање врши помоћу проучавања форме, величине и положаја и увођења нарочитих параметара: параметара форме, параметара величине и параметара положаја.[1] У савременој математичкој литератури појављују се чак нарочите гране геометрије: геометрија форме (geometry of form), геометрија величине (geometry of size) и геометрија положаја (geometry of position).[2]

Циљ овог чланка је показати у којој се форми може увести у наставу тај нови елемент проучавања геометриских објеката у целини.

Интуитивно увођење појмова форме, величине и положаја неког геометриског објекта не претставља тешкоће. Два геометриска објекта су исте форме, ако је један објект геометриски сличан другом. Два геометриска објекта исте форме су и исте величине, ако је растојање између две тачке првог објекта једнако растојању две одговарајуће тачке другог објекта и, најзад, два геометриска објекта су истог положаја, ако се све тачке првог објекта поклапају са одговарајућим тачкама другог објекта исте форме и исте величине.

За бројно оцењивање форме, величине и положаја уводе се било апстрактни било именовани бројеви, који се зову параметри. Означимо са f број параметара форме, са g број параметара величине и са p број параметара положаја неког геометриског објекта и проучимо на примерима те параметре. То проучавање се врши у току целокупне наставе како планиметрије тако и стереометрије.

Пре свега наведимо примере геометриских објеката без параметара форме ($f=0$). За те објекте сам назив објекта потпуно одређује његову форму.

[1]) В. нашу књигу — Геометриске основе рачуна са диадама. I. Диада и афинор. Београд. 1930.

[2]) W. Reeve and C. Tuites — Practical Mathematics Refresher. 1955.

Права, полуправа, две паралелне праве, прав угао, круг, квадрат односно уопште правилан многоугао одређеног броја углова, коцка, уопште правилан полиједар одређеног броја страна, лопта.

Примери геометриских облика са једним параметром форме ($f = 1$).

Правоугаоник. Параметар форме је апстрактан број — однос једне димензије према другој ($a:b$).

Ромб. За параметар форме можемо узети, рецимо, однос дијагонала ромба, — апстрактан број.

Угао. Параметар форме овог геометриског облика је апстрактан број: однос одговарајућег лука према полупречнику ($\alpha = s:r$).

Елипса. Параметар форме је бројни ексцентрицитет елипсе, рецимо, $e=c:a$.

Учинимо важне примедбе.

Природно је оцењивати форму апстрактним бројем — неименованим бројем. Али иста форма може бити оцењена и именованим бројем са именовањем *sui generis*, изабраним за дату форму. И на тај начин, како изгледа, своди се оцена форме на оцену величине, што, у суштини није природно. Узмимо угао, као геометриски облик од две полуправе са заједничким почетком и наведеном облашћу равни на коју се односи тај геометриски облик. Јасно је да је сваки угао геометриски облик који има само одређену форму и, ако смо у стању да одредимо ту његову форму, угао је потпуно одређен. Апстрактни број $\alpha=s:r$ потпуно одређује угао и сваки други начин одређивања угла увек може бити сведен на одређивање угла апстрактним бројем, бројем без икаквог именовања. Изрази: „угао π“, „угао 1/3“, „угао 15“ потпуно одређују углове. На жалост, историски, ту се умешало именовање „радијан“ и може изгледати да је параметар форме угла именовани број мерен у радијанима. Израз „у радијанима“ и сам „радијан“ треба тумачити не као именовање, него као навођење начина којим се мери угао апстрактним бројем. Тако и оцењивање форме правоугаоника можемо вршити „у квадратима“, па чак и „у опекама“ и за јединицу узимати „квадрат“ односно „опеку“ и тада параметру форме правоугаоника $h:a$, неименованом броју, одговарао би именовани број „h квадрата“ при $a=1$ или „k стандардних опека“ наслаганих једна на другу. Тај последњи начин описивања форме правоугаоника можда би био и најјаснији и најприроднији за једног примитивног зидара.

Како би изгледало тумачење једначине

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{1}{3!}\alpha^3+\dots$$

кад бисмо под α подразумевали именовани број чије именовање треба дизати на степене. Мерење угла степенима или градима и њиховим делима било би мерење нарочито изабраном јединицом, јединицом *sui generis*.Ово мерење има своје оправдање у погодности у практичкој примени, а не у теориском оперисању углом као геометриским обликом. Са савременог математичког гледишта сва таква мерења форме носе јасно вештачки карактер.

У општем случају за оцењивање форме једног истог геометриског објекта помоћу апстрактног броја постоји више начина. Узмимо, рецимо, правоугаоник. Сем односа страна $a:b=k_1$ форму истог правоугаоника можемо оценити и односом једне стране и дијагонале, рецимо, $a:d=k_2$, али између k_1 и k_2 треба да постоји веза; у овом случају је $k_2^2(1+k_1^2)=k_1^2$. Ако за одређивање форме правоугаоника узмемо угао α између дијагонале и стране a, између два параметра форме α и k_1 правоугаоника постоји веза: $k_1=\operatorname{cotg}\alpha$, а између α и k_2 ова: $k_2=\cos\alpha$.

Како смо навели, форма елипсе може бити одређена бројним ексцентрицитетом $e=c:a$, где је $c^2=a^2-b^2$, а a и b полуосе елипсе. Назовимо тај ексцентрицитет *основним*. За одређивање форме елипсе постоје још и друге величине[1], наиме још два ексцентрицитета: e' и e'' и три „спљоштења" $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ према дефиницијама:

$$e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2},\quad e''^2=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \mathfrak{a}=\frac{a-b}{a},\quad \mathfrak{a}'=\frac{a-b}{b},\quad \mathfrak{a}''=\frac{a-b}{a+b}.$$

Помоћу сваке од тих величина могу бити изражене све остале; напр. у зависности од основног ексцентрицитета e имамо:

$$e'^2=\frac{e^2}{1-e^2},\quad e''^2=\frac{e^2}{2-e^2},\quad \mathfrak{a}=1-\sqrt{1-e^2},\quad \mathfrak{a}'=1:(1-e^2)^{1/2}-1=$$

$$=[\sqrt{1-e^2}-1+e^2]:(1-e^2),\qquad \mathfrak{a}''=(1-\sqrt{1-e^2})^2:e^2.$$

Као примери просторних објеката са једним параметром форме могу послужити: правоугли паралелепипед са квадратном основом, ваљак, купа.

Примери геометриских облика са $f=2$.

Троугао. Параметри форме — два угла или односи две стране према трећој. — Паралелограм. Параметри форме — два угла једне стране са дијагоналом и са другом страном или односи једне стране и дијагонале према другој страни. — Правоугли паралелепипед. Параметри форме — односи две димензије према трећој. — Елипсоид. Параметри — односи две полуосе према трећој.

[1]) R. König und K. Weise. Mathematische Grundlagen des höheren Geodesie und Kartographie. I. B. 1951. S. 4.

Примери геометриских објеката за $f=1$ и $f=2$ у довољној мери разјашњавају суштину појма параметра форме и према томе навођење примера форме за $f=3, 4, 5, \ldots, n$ како у равни тако и у простору не претставља нарочите тешкоће у смислу разумевања питања, али решавање тих питања захтева извесну геометриску инвентивност за чије развијање баш ови примери претстављају погодан материјал.

Пређимо сад на појам параметра величине. Пре свега треба нагласити да је потребно разликовати појам параметра величине од појма величине уопште. И параметри форме су величине, апстрактне или специфичног именовања, или је њихова улога различита од улоге параметара величине.

Постоје два случаја. 1. Геометриски облик је у потпуности одређен само параметрима форме па чак и без таквих параметара, само називом. Такав геометриски облик нема параметра величине ($g=1$). Примери: права, полуправа, прав угао ($f=0$); произвољан угао ($f=0$) има своју такозвану *величину угла*, али та величина у суштини је природе параметра форме, а не параметра величине; косоугли триједар има три параметра форме ($f=3$), три угла, али нема параметра величине, ако за такав параметар не узимамо *глобални параметар форме* — однос површине одговарајућег сферног троугла закљученог у триједру и површине целокупне сфере. Косоугли триједар са једним правим углом има два параметра форме, са два права угла — један параметар форме и ортогонални триједар — ниједан. Ниједан од тих триједара нема параметра величине. Њихов глобални параметар форме је функција основних параметара форме.

2. Сами параметри форме не одређују геометриски облик у потпуности. Слични геометриски облици имају параметар величине и то само један ($g=1$).

За параметар величине можемо узети дужину a дужи која спаја две фиксиране тачке на геометриском облику.

За одређену вредност a_0 геометриски облик можемо сматрати као *модел* геометриског облика дате форме. Сваки други облик исте форме можемо одредити или непосредно величином a или односом $a:a_0$, апстрактним бројем, *размером* датог облика према моделу. Тај апстрактни број у овом случају такође игра улогу параметра величине.

Од параметра a може зависити нека површина S везана за геометриски облик. Та површина се изражава неким обрасцем

$$S = \lambda_1 a^2,$$

где је λ_1 коефицијент пропорционалности, апстрактни број, који зависи само од параметара форме геометриског облика. За случај запремине V имамо образац

$$V = \lambda_2 a^3,$$

где је λ_2 исто тако апстрактан број, функција параметара форме.

Ако геометриски облик нема параметара форме ($f=0$), коефицијенти λ_1 и λ_2 су аритметички бројеви. Тако например, за површину квадрата имамо $S=\lambda_1 a^2$, где је $\lambda_1=1$, а за запремину коцке $V=\lambda_2 a^3$ и $\lambda_2=1$. За сферу и лопту имамо: $S=\lambda_1 a^2$, $V=\lambda_2 a^3$, где су $\lambda_1=4\pi$ и $\lambda_2=\frac{4}{3}\pi$. За параметар величине је узет полупречник.

Ако геометриски облик има један параметар форме k_1, онда имамо

$$\lambda_1=\lambda_1(k_1), \quad \lambda_2=\lambda_2(k_1).$$

Примери: правоугаоник и квадар (правоугли паралелепипед са квадратном основом).

$$S = ab = \frac{b}{a} a^2=\lambda_1 a^2 \quad \text{са} \quad \lambda_1 = b:a=k_1;$$

$$T=2a^2+4ah = 2(1+2k_1) a^2=\lambda_1 a^2,$$

где су $k_1 = h:a$, $\lambda_1 = 2(1+2k_1) = \lambda_1(k_1)$,

$$V = a^2h=k_1 a^3=\lambda_2 a^3, \quad \text{где су} \quad \lambda_2=k_1=h:a.$$

Узмимо још случај облика са два параметра форме k_1 и k_2. Тада је

$$\lambda_1=\lambda_1(k_1, k), \quad \lambda_2=\lambda_2(k_1, k_2).$$

Пример. Правоугли паралелепипед са димензијама a, b, c а за $k_1=b/a$, $k_2=c/a$.

$$S=2(bc+ca+ab)=\lambda_1 a^2,$$

где је

$$\lambda_1=2(k_1 k_2+k_2+k_1);$$

$$V=abc=\lambda_2 a^3,$$

где је

$$\lambda_2=k_1 k_2.$$

Приметимо да за параметар величине можемо узети и величину неке површине односно величину неке запремине. Такав површински односно запремински параметар величине може бити изражен помоћу линиског параметра величине. Та веза зависи у општем случају од форме геометриског објекта и према томе од параметара форме.

Тако, например ако за површински параметар величине узмемо површину A великог круга лопте, површина S те лопте може се изразити као: $S=4A$, а запремини V одговара образац

$$V=\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\pi}}A^{3/2}.$$

Као други пример узмимо ваљак полупречника основе R и висине h са параметром форме $k_1=h:R$. За параметар величине одредимо површину основе ваљка $A=\pi R^2$. Целокупна површина S ваљка се тада изражава са

$$S=2\,(1+k_1)\,A\,,$$

а запремина

$$V=\frac{k_1}{\sqrt{\pi}}\,A^{3/2}\,.$$

И сваки линиски елемент може се изразити помоћу параметра форме k_1 и површинског параметра величине A. За R и h имамо:

$$R=(A/\pi)\,1/2, \quad h=k_1\,(A/\pi)\,1/2.$$

Слична израчунавања се врше за случај запреминског параметра величине.

Пређимо сад на параметре положаја.

Решавање питања колико и каквих података треба да буде наведено да се одреди положај одређеног геометриског објекта, праволиниског, равног или просторног, може послужити како дубљем проучавању самих конкретних објеката, тако и уопште развитку просторних претстава.

Наведена питања одређивања и упоредног оцењивања положаја геометриских објеката и њихових елемената систематски се решавају у аналитичкој геометрији, али та иста питања у почетној фази могу бити обрађена употребом материјала само елементарне геометрије и треба да буду стављена у ту геометрију, ако се жели да се та геометрија ослободи од укалупљене непокретности геометриских објеката толико штетне за развијање просторних претстава.

Као основа за увођење параметара положаја служе основни задаци одређивања положаја тачке на правој, у равни и у простору. Сваки од тих задатака има и своју конкретну форму у такозваним геометриским задацима на терену. Из елементарне анализе тих задатака следује да се положај тачке на правој одређује једним параметром положаја, рецимо, растојањем једне од друге тачке узете за полазну (први колац). Положај тачке у равни одређује се са два параметра, рецимо са два растојања тачке од две тачке, крајева једне дужи која је узета за базу; та два растојања можемо заменити и са два угла. Најзад за одређивање положаја тачке у простору треба знати три параметра положаја тачке и то, рецимо, у односу на основни троугао ABC у простору — угао између равни ABC и равни ABM, која пролази кроз тачку M чији положај одређујемо, и два параметра положаја тачке M у равни ABM у односу на базу AB.

После одређивања параметара положаја тачке лако је прећи на одређивање параметара положаја појединих геометриских објеката.

За праволиниску слику — дуж или уопште дати праволиниски систем тачака, $p=1$, јер је довољно одредити положај само једне тачке слике на правој линији. То исто се односи и на одређивање положаја датог система тачака на датој кружној линији.

За слику у равни $p=3$, јер се положај такве слике одређује положајем две тачке од којих се друга налази на сталном растојању од прве.

Најзад за просторни објект, напр. за коцку, која је чврсто везана за било који просторни објект, па према томе за сваки просторни објект имамо $p=6$, јер се једно теме коцке одређује са три параметра, друго са два, јер је то тачка на сталном растојању од прве тачке, и треће са једним параметром као тачка на сталним растојањима од две дате тачке.

Тумачење појмова параметара форме, величине и положаја толико је лако и занимљиво да не претставља никакве тешкоће у настави, треба само уводити те појмове у некој узаступности у вези са третираним материјалом и развитком ученика. Усвајање тих појмова је врло корисно како у односу на знатно проширење просторних претстава тако и у погледу на примене.

Значај геометриских параметара знатно се проширује у вези са проучавањем промене геометриских облика у зависности од промене параметара. Најпростија је улога параметра величине, она је најјаснија ученицима и блиско је везана са проучавањем промена релативно простих алгебарских израза, често са аритметичком проценом у смислу већих и мањих величина.

Проучавање промене форме у вези са променом параметара форме спада у чисто геометриску област. Промена геометриског облика само са једним параметром форме већ даје огроман материјал за проучавање геометриске форме уопште. Узмимо најпростији пример — параметар форме правоугаоника. Тај параметар игра огромну улогу у оцењавању форме предмета који нас окружују — књига, свеска, табла стола, фасада зграде итд. Параметар $a:b$ је главни елемент који карактерише њихову форму. Тај параметар служи естетским циљевима (златан пресек и друге поделе), па и практичним циљевима (динформат и др.), за оцењивање развитка неке индустрије. Прогрес грађевинарства можемо оценити не само висином зграда, већ параметром $h:a$ који узима у обзир и смањење основе.

Није од мањег интереса проучавање форме елипсе односно елипсоида обртања као прве форме отступања од круга односно од сфере. Почев од небеских тела и наше Земље па до ћелијица биљака и животиња — све то има форму коју у приближном посматрању можемо математизирати у облику деформисане кружне односно сферне форме са различитим вредностима параметара форме.

Баш при проучавању променљивости облика јасно се истичу сасвим различите улоге параметара форме и параметра величине. Математичко описивање форме треба да уђе у сазнање истом снагом као што је ушло у сазнање и у праксу описивање величине помоћу мерења одговарајућих димензија. Већ одвајање проучавања форме од проучавања величине и могућност оцењивања само форме помоћу броја велики је добитак за што дубље проучавање Природе и за употпуњавање материјала као основе за инвентивну делатност људског духа. Према томе способност видети форму и свесно је оцењивати без обзира на величину исто тако треба да буде основни елемент у савременој геометриској настави.

Најзад променљивост параметара положаја је, можда, најбогатија храна за развитак просторних претстава, јер је та променљивост у вези са кретањем, природном допуном геометрије. Јасно је да се много дубље проучавање геометриског објекта постиже тиме што се објект проучава у различитим положајима. Еуклидово проучавање објекта увек готово у истом положају потпуно је довољно, а можда баш и најзгодније за логичку анализу геометриског материјала, али је оно штетно за проучавање геометриских објеката у целини, и то не само као индивидуалних облика, већ као чланова целих породица тих облика везаних општим особинама функционалног карактера.

Нама изгледа да допуна обичног материјала елементарне геометрије појмовима параметара форме, величине и положаја, чак узимајући у обзир и њихову променљивост, не претставља никакве тешкоће, занимљива је за ђаке и према томе је потпуно савладљива. У исто време она је и врло важна као увод у даља проучавања више геометрије, нарочито за пројективну и афину геометрију и за топологију, једном речи, за проучавање оних области геометрије и математике уопште, које су везане за трансформације, а анализа математичких објеката са гледишта трансформација и теорија самих трансформација главни је део садржаја савремене математике. Проучавање наведених параметара је први корак за продирање у ту математику.

На крају треба истаћи да нове форме геометрије — геометрија форме, величине и положаја јесу нови елементи, који све више дижу ауторитет математике као универзалног апарата не само формалистичког већ потпуно природног садржаја који обухвата појаве Природе са свих њихових страна.

(Саопштено на седници Мат. института 7-III-1956)

SUR LES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES

Résumé

La variabilité des figures géométriques. Les paramètres géométriques: 1. De la forme. 2. De la grandeur et 3. De la position. Exemples. Traitement des paramètres géométriques à l'étude de géométrie élémentaire.