*Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV*
*Institut Mathématique № 6. 1957*

ЧАСЛАВ В. СТАНОЈЕВИЋ

# О ИНТЕГРАБИЛНОСТИ НЕКИХ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ РЕДОВА

1. Јунг и Колмогоров (в. [1], стр. 108—111) испитивали су услове под којима ред

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \tag{1.1}$$

претставља Фуријеов ред.

Јунг је доказао да ред (1.1) претставља Фуријеов ред ако је низ $\{a_\nu\}$ ограничене варијације, $a_\nu = o(1)$, и ако је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta a_\nu| \lg(\nu+1) < \infty. \tag{1.2}$$

Од Колмогорова потиче став: *Ако је низ* $\{a_\nu\}$ *квази-конвексан* $a_\nu = o(1)$, *тада је ред* (1.1) *Фуријеов ред.*

2. Оба та става садржи

СТАВ 1. *Нека је*

$$a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu = o(1),$$

*где је* $\{\alpha_\nu\}$ *ограничене варијације,* $\{\beta_\nu\}$ *квази-конвексан и* $|\beta_\nu| \leq M$.

*Ако је*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu \Delta \alpha_\nu| \lg(\nu+1) < \infty \tag{2.1}$$

*тада је ред* (1.1) *Фуријеов ред.*

Доказ. Из

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \beta_\nu \cos \nu x$$

применом Абелове трансформације, добићемо

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_\nu \Delta \alpha_\nu D_\nu(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_\nu D_\nu(x) + a_n D_n(x)$$

где је

$$D_\nu(x) = \frac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Дирихлеово језгро.

Поновном применом Абелове трансформације, налазимо да је

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_\nu D_\nu(x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \{\alpha_{\nu+1} \Delta^2 \beta_\nu + \Delta \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_{\nu+1}\} K_\nu(x) + (n-1) \alpha_n \Delta \beta_{n-1} K_{n-1}(x)$$

где је

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\nu+1} \left( \frac{\sin(\nu+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

Фејерово језгро. Стога је

$$\begin{aligned} s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_\nu \Delta \alpha_\nu D_\nu(x) + \\ + \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \{\alpha_{\nu+1} \Delta^2 \beta_\nu + \Delta \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_{\nu+1}\} K_\nu(x) + \\ + a_n D_n(x) + (n-1) \alpha_n \Delta \beta_{n-1} K_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ако је $x \neq 0$, последња два члана на десној страни у (2.2) теже 0, када $n \to \infty$, и стога

$$s_n(x) \to f(x),$$

где је

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \Delta \alpha_\nu D_\nu(x) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \{\alpha_{\nu+1} \Delta^2 \beta_\nu + \Delta \alpha_{\nu+1} \Delta \beta_{\nu+1}\} K_\nu(x)$$

Интегришући у размаку $(0, \pi)$, лако се налази да је

$$\int_0^{\pi} |f(x)|\, dx \leqslant M \sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu \Delta\alpha_\nu| \lg(\nu+1) +$$

$$+N \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \{|\alpha_{\nu+1}\Delta^2 \beta_\nu| + |\Delta\alpha_{\nu+1} \Delta\beta_{+1}|\} = S_1 + S_2 .$$

Збир $S_1$ је коначан према (2.1).

Пошто је низ $\{\beta_\nu\}$ квази-конвексан и $\beta_\nu = O(1)$, имамо

$$(\nu+1) |\Delta\beta_{\nu+1}| = o(1) = O(1)$$

а како је $\{\alpha_\nu\}$ ограничене варијације, то је

$$S_2 \leqslant N' \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) |\Delta^2 \beta_\nu| + N'' \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta\alpha_\nu|$$

Према томе $S_2$ је такође коначно.

Применом става: *Ако један тригонометриски ред конвергира, изузев у једној тачки, ка једној интеграбилној функцији, тада је тај ред Фуријеов ред*, добивамо да је ред (1.1) са $a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu$, Фуријеов ред.

За $\alpha_\nu \equiv 1$ став 1 своди се на став Колмогорова, а за $\beta_\nu \equiv 1$. добија се Јунгов резултат.

3. Незнатном изменом услова за $\{\alpha_\nu\}$ и $\{\beta_\nu\}$, добиће се

СТАВ 2: *Нека је*

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu x$$

*Фуријеов ред једне* $L(0, \pi)$ — *интеграбилне функције* $\varphi(x)$. *Ако је низ* $\{\beta_\nu\}$ *квази-конвексан и* $\beta_\nu = o(1)$ *тада је ред* (1.1) *са* $a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu$, *Фуријеов ред.*

Доказ. Двоструком применом Абелове трансформације добићемо

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \Delta^2 \beta_\nu \tau_\nu(x) + (n-1) \Delta\beta_n \tau_{n-1}(x) + \beta_n \varphi_n(x) \tag{3.1}$$

где је

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos \nu x$$

$$\tau_\nu(x) = \frac{1}{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \varphi_k(x)$$

Ако је $x \neq 0$, последња два члана у (3,1) теже ка 0, када $n \to \infty$, и стога $s_n(x)$ тежи ка

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, \Delta^2 \beta_\nu \tau_\nu(x)$$

када $n \to \infty$.

Интегришући у размаку $(0, \pi)$, добићемо

$$\int_0^\pi |f(x)|\, dx \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, |\Delta^2 \beta_\nu| \int_0^\pi |\tau_\nu(x)|\, dx. \tag{3.2}$$

Према Хардију и Литлвуду [2] имамо

$$\int_0^\pi |\tau_\nu(x)|\, dx \leqq M \int_0^\pi |\varphi(x)|\, dx$$

а из (3.2) добијамо

$$\int_0^\pi |f(x)|\, dx \leqq M \int_0^\pi |\varphi(x)|\, dx \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, |\Delta^2 \beta_\nu|$$

Стога је функција $f(x)$ интеграбилна.

*(Саопштено на седници Мат. института 29-II-1956)*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Zygmund — Trigonometrical Series, 2 ed., Chelsea, New York, (1952).

[2] G. Hardy and J. E. Littlewood — A Maximal Theorem with Function-theoretical Applications. *Acta Math.* **54**, (1930), 81–116.

# ON INTEGRABILITY OF CERTAIN TRIGONOMETRICAL SERIES

by

Č. V. STANOJEVIĆ

1. The problem of

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \tag{1.1}$$

being a Fourier series, was considered by Young and Kolmogorov [1].

Young proved *that the series* (1.1) *is a Fourier series, if* $\{a_\nu\}$ *is of bounded variation,* $a_\nu = o(1)$, *and if*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta a_\nu| \lg(\nu+1) < \infty \tag{1.2}$$

The following theorem is due to Kolmogorov: *If* $\{a_\nu\}$ *is quasi-convex and* $a_\nu = o(1)$, *then the series* (1.1) *is a Fourier series.*

2. Both of these theorems are contained in the following theorems.

THEOREM 1. *Let*

$$a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu = o(1)$$

*where* $\{\alpha_\nu\}$ *is of bounded variation,* $\{\beta_\nu\}$ *quasi-convex, and* $|\beta_\nu| \leqslant M$.

*If*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu \Delta \alpha_\nu| \lg(\nu+1) < \infty \tag{2.1}$$

*then the series* (1.1) *is a Fourier series.*

THEOREM 2. *Let*

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos \nu x$$

*be a Fourier series of a* $L(0, \pi)$ — *integrable function* $\varphi(x)$. *If* $\{\beta_\nu\}$ *is quasi-convex, and* $\beta_\nu = o(1)$, *then the series* (1.1), *with* $a_\nu = \alpha_\nu \beta_\nu$, *is a Fourier series.*