Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт књ. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

ИЗВОЂЕЊЕ BELTRAMI-MICHELL-ОВИХ ЈЕДНАЧИНА У ТЕНЗОРСКОМ ОБЛИКУ ИЗ SAINT-VENANT-ОВИХ УСЛОВА КОМПАТИБИЛНОСТИ

Ознаке:

ρ	— густина,
X_i	— коваријантне координате спољашње запреминске силе,
λ, μ	— Lamé-ови коефицијенти еластичности,
E, $\varkappa$	— Young-ов модул и Poisson-ова константа,
g_{ij}	— метрички тензор тродимензионог еуклидског простора у односу на генералисани систем координата x^i $(i=1, 2, 3)$,
$\sigma = g^{ij}\sigma_{ij} = \sigma_i{}^i$	— скаларна инваријанта тензора деформације σ_{ij} (кубна дилатација),
$\theta = g^{ij}\vartheta_{ij} = \vartheta_i{}^i$	— скаларна инваријанта тензора напона ϑ_{ij},
u_i	— коваријантне координате вектора померања,
$R^l{}_{ijk}$	— Riemann-Christoffel-ов тензор,
ε_{ijk}	— Ricci-ев антисиметрични тензор,
$\Delta u_i = u_i{}^{,j}{}_{,j}$.	

У св. V „Publ. de l'Institut math.“, стр. 1—4 [1], са исправкама и допунама у св. IX [2] истог часописа, показао сам како се могу извести Beltrami-Michell-ове једначине у општем тензорском облику, кад се пође од Lamé-ових једначина, напр. у облику

$$\rho X_i + (\lambda+\mu)\,\sigma_{,i} + \mu\,\Delta u_i = 0.$$

Овде ћу сад показати како се тај исти општи облик Beltrami-Michell-ових једначина може добити и полазећи од услова компатибилности тензора деформације у тензорском облику. На ову могућност указао је M. **Brdička** у једном свом раду [3], али је сам он извео једначине само за тзв. чисто Beltrami-ев случај, тј. у отсуству запреминских сила, а поврх тога и само за афине тензоре. Наредно извођење је у потпуности опште.

Ради постизања постављеног циља поћи ћемо од Saint-Venant-ових услова компатибилности у наредном облику (види мој „Тензорски рачун“ [4])

$$\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,\sigma^{ij,\,rs}=0. \tag{1}$$

Кад се овде тензор деформације замени, према Hooke-овом закону

$$\sigma^{ij}=\frac{1}{E}\left\{(1+\varkappa)\,\vartheta^{ij}-\varkappa\,g^{ij}\,\theta\right\}, \tag{2}$$

тензором напона, добиће се

$$(1+\varkappa)\,\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,\vartheta^{ij,\,rs}-\varkappa\,\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,g^{ij}\,\theta^{,rs}=0. \tag{3}$$

Знамо да је

$$\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}=\begin{vmatrix} g_{ij} & g_{is} & g_{iq} \\ g_{rj} & g_{rs} & g_{rq} \\ g_{pj} & g_{ps} & g_{pq} \end{vmatrix}=$$

$$=g_{ij}\begin{vmatrix} g_{rs} & g_{rq} \\ g_{ps} & g_{pq} \end{vmatrix}-g_{is}\begin{vmatrix} g_{rj} & g_{rq} \\ g_{pj} & g_{pq} \end{vmatrix}+g_{iq}\begin{vmatrix} g_{rj} & g_{rs} \\ g_{pj} & g_{ps} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

а осим тога је увек:

$$\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}\,g^{ij}=\varepsilon_{irp}\,\varepsilon^{i}{}_{sq}=g_{pq}\,g_{rs}-g_{ps}\,g_{rq}, \tag{5}$$

$$g_{ij}\,\vartheta^{ij,\,rs}=\theta_{i}{}^{i,\,rs}=\theta^{,rs}, \tag{6}$$

$$g^{ij}\,\theta_{,ij}=\theta_{,i}{}^{,i}=\Delta\theta=g_{ij}\,\theta^{,ij}=\theta^{,i}{}_{,i}. \tag{7}$$

Из Navier-ових једначина [4]

$$\rho\,X_i+\vartheta^{j}{}_{i,\,j}=0 \tag{8}$$

лако се изводе наредне везе

$$\vartheta^{j}{}_{i,\,jk}=-\rho\,X_{i,\,k}\;, \tag{9}$$

и

$$g_{is}\,g_{rj}\,\vartheta^{ij,\,rs}=\vartheta^{ij}{}_{,\,ij}=\vartheta_{rs}{}^{,rs}=\vartheta_{sr}{}^{,rs}=(\vartheta^{r}{}_{s,r})^{,s}=-\rho\,X_{s}{}^{,s}. \tag{10}$$

Ако сад у једначинама (3) подигнемо индекс p и извршимо контракцију $p=q$, добићемо

$$(1+\varkappa)\,\varepsilon_{ir}{}^{p}\,\varepsilon_{jsp}\,\vartheta^{ij,\,rs}-\varkappa\,\varepsilon_{ir}{}^{p}\,\varepsilon_{jsp}\,g^{ij}\,\theta^{,rs}=0. \tag{11}$$

Израчунавањем назначених израза налазимо

$$\varepsilon_{ir\cdot}^{\ \ p}\,\varepsilon_{jsp}=g_{ij}\,g_{rs}-g_{is}\,g_{rj},$$

$$(g_{ij}\,g_{rs}-g_{is}\,g_{rj})\,g^{ij}=2\,g_{rs}.$$

На тај начин из (11), узимајући у обзир (10), добивамо прво

$$(1+\varkappa)\,(g_{rs}\,\theta^{,rs}+\rho\,X_{s}{}^{,s})-2\,\varkappa\,g_{rs}\,\theta^{,rs}=0,$$

па затим

$$\rho\,(1+\varkappa)\,X_{i}{}^{,i}+(1-\varkappa)\,\Delta\theta=0.$$

Одатле добивамо, још од раније [1] познату али на други начин изведену, везу

$$\Delta\theta=-\rho\,\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\,X_{i}{}^{,i} \tag{12}$$

и с обзиром на (10)

$$\vartheta_{rs}{}^{,rs}=\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\,\Delta\theta. \tag{13}$$

После ових помоћних излагања може се приступити развијању једначина (3). Наиме, с обзиром на низ претходних релација и на чињеницу да у еуклидском простору резултат два узастопна коваријантна извода не зависи од поретка у коме се они изводе, а према (4) за $\varepsilon_{irp}\,\varepsilon_{jsq}$, добиће се

$$(1+\varkappa)\,[(g_{pq}\,g_{rs}-g_{ps}\,g_{rq})\,\theta^{,rs}-(g_{pq}\,g_{rj}-g_{pj}\,g_{rq})\,g_{is}\,\vartheta^{ij,rs}+$$

$$+(g_{ps}\,g_{rj}-g_{pj}\,g_{rs})\,g_{iq}\,\vartheta^{ij,rs}]-\varkappa\,(g_{pq}\,g_{rs}-g_{ps}\,g_{rq})\,\theta^{,rs}=$$

$$=(1+\varkappa)\,(g_{pq}+\Delta\theta-\theta_{,pq}-\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\,g_{pq}\,\Delta\theta-\rho\,X_{p,q}-\rho\,X_{q,p}-\Delta\vartheta_{pq})-$$

$$-\varkappa\,(g_{pq}\,\Delta\theta-\theta_{,pq})=0,$$

одн. после промене знака, деобе са $1+\varkappa$ и свођења

$$\rho\,(X_{p,q}+X_{q,p})+\frac{1}{1+\varkappa}\,\theta_{,pq}+\Delta\vartheta_{pq}-\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,g_{pq}\,\Delta\theta=0.$$

Најзад, кад се овде за $\Delta\theta$ унесе његова вредност према (12), добива се тражени најопштији тензорски облик Beltrami-Michell-ових једначина

$$\rho\,(X_{i,k}+X_{k,i})+\frac{1}{1+\varkappa}\,\theta_{,ik}+\Delta\vartheta_{ik}+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}\,g_{ik}\,X_{j}{}^{,j}=0, \tag{14}$$

где су слободни индекси i и k. Како је тензор напона ϑ_{ik} симетричан, са леве стране је симетрични тензор, па овој тензорској једначини за $i, k=1, 2, 3$ одговара шест скаларних једначина.

Ако у тензорској једначини (14) подигнемо индекс i она се претвара у једначину

$$\rho\,(X^i{}_{,k}+X_k{}^{,i})+\frac{1}{1+\varkappa}\,\theta^{,i}{}_{,k}+\Delta\vartheta_k{}^i+\frac{\rho\varkappa}{1-\varkappa}\,\delta_k{}^i\,X_j{}^{,j}=0, \tag{15}$$

која у општем случају не мора бити симетрична. Међутим и она очигледно одређује само шест различитих скаларних једначина. Наиме, ако двапут коваријантни симетрични тензор на левој страни тензорске једначине (14) обележимо кратко T_{ik}, тада међу координатама тензора $T_k{}^i$ који је на левој страни једначине (15) постоји веза

$$g_{im}\,T_k{}^m = g_{km}\,T_i{}^m,$$

која одређује само три различите скаларне једначине.

(Саопштено на седници Мат. института САН)

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. P. Angelitch — Eine Bemerkung zu den Gleichungen von Beltrami-Michell, *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.* 5 (1953), 1—4.

[2] ——————— Eine Bemerkung zu den Gleichungen von Beltrami-Michell, *ibid.* 9 (1956), 93—94.

[3] М. Брдичка — Уравнения совместности и функции напряжений в тензорном виде. *Čehosl. fiz. žurn.* 3 (1953), 1, 36—52.

[4] Т. П. Анђелић — Тензорски рачун. Београд, 1952.

THE BELTRAMI-MICHELL COMPATIBILITY EQUATIONS IN GENERAL TENSOR FORM OBTAINED FROM SAINT-VENANT'S COMPATIBILITY EQUATIONS

By

T. P. ANGELITCH

In a previous paper [1, p. 1—4 and 2, p. 93—94] the author has shown how the most general form (14) of the *Beltrami-Michell* compatibility equations can be obtained from the equations of equilibrium for an elastic solid (*Lamé*'s equations). Here he shows how the same result can be attained by starting from the compatibility equations in terms of strians (*Saint-Venant*'s compatibility equations). To this possibility pointed first *M. Brdička* [3], but his developments are restricted to the so-called pure *Beltrami*'s case, i. e. without body forces.