Зборник радова С.А.Н. L — Математички институт С.А.Н. књ. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique No 5, 1956

ДАНИЛО РАШКОВИЋ

ЈЕДАН ВЕКТОРСКИ НАЧИН ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ СФЕРНИХ КООРДИНАТА ВЕКТОРА БРЗИНЕ И УБРЗАЊА

Уобичајено је у Рационалној Механици [1] да се пројекције вектора брзине $[\vec{v}]$ и убрзања $[\vec{a}]$ на осе троосног локсогоналног криволиниског координатног система одређују скаларним једначинама

$$v_{q_i} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial [{}^1/_2\, v^2]}{\partial q_i}, \tag{1}$$

$$a_{q_i} = \frac{1}{A_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial [{}^1/_2\, v^2]}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial [{}^1/_2\, v^2]}{\partial q_i} \right], \tag{2}$$

где је v^2 квадрат брзине покретне тачке, q_i генералисана координата а $\dot{q}_i$ генералисана брзина, док је A_i Ламеов (Lamé) коефицијент за координату q_i. Он износи

$$A_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = \frac{d s_i}{d q_i} \tag{a}$$

Квадрат брзине биће

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3} A_i^2 \dot{q}_i^2 + 2 (B_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + B_2 \dot{q}_3 \dot{q}_1 + B_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2). \tag{3}$$

Коефицијенти B_i везани су са Ламеовим коефицијентима релацијама

$$B_i = A_j A_k (\vec{T}_j \vec{T}_k), \qquad i \neq j \neq k\ ;\ 1, 2, 3 \tag{b}$$

где је $\vec{T}$ орт тангенте на кордитатну осу q.

Сферни координантни систем јесте криволиниски ортогонални систем, са координатама ρ, φ, ψ, па су Ламеови коефицијенти: $A_1 = A_\rho = 1$, $A_2 = A_\varphi = \rho \cos\psi$, $A_3 = A_\psi = \rho$, са ортовима радијалног $(\vec{\rho}_0)$, циркуларног $(\vec{c}_0)$ и меридијалног правца $(\vec{v}_0)$ (сл. 1). Због ортогоналности оса коефицијенти B_i једнаки су нули, па је, према (3), квадрат брзине

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\, \dot{\varphi} \cos\psi)^2 + (\rho\, \dot{\psi})^2. \tag{4}$$

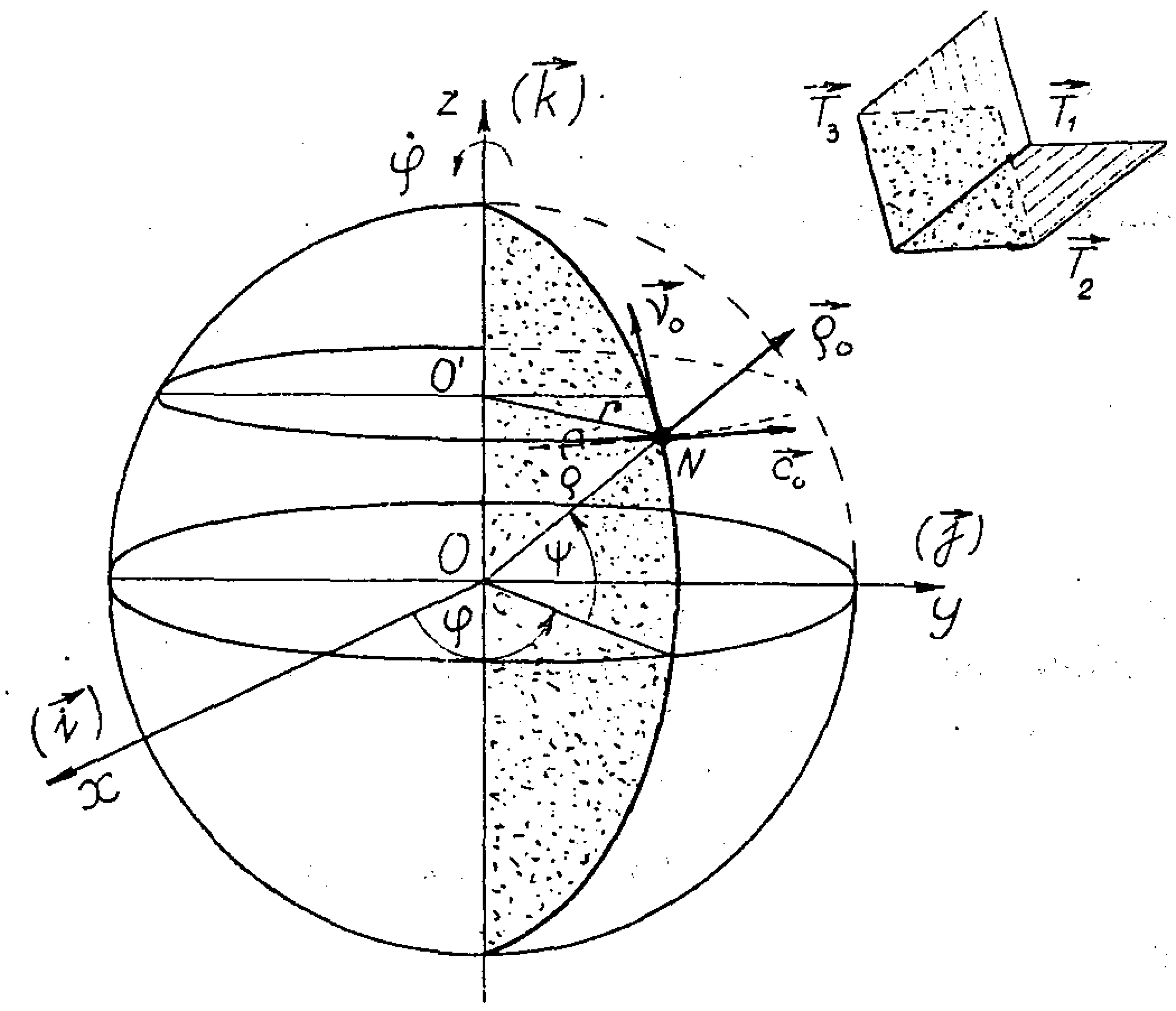
С обзиром на обрасце (1) и (2) биће пројекције вектора брзине и убрзања на осе овог система [2]:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_c = \rho\,\dot{\varphi}\cos\psi, \quad v_\nu = \rho\,\dot{\psi}, \tag{5}$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\,\dot{\psi}^2,$$

$$a_c = \frac{1}{\rho\cos\psi}\,\frac{d}{dt}\,(\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\psi) = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\varphi}), \tag{6}$$

$$a_\nu = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}\,(\rho^2\dot{\psi}) + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi\right].$$



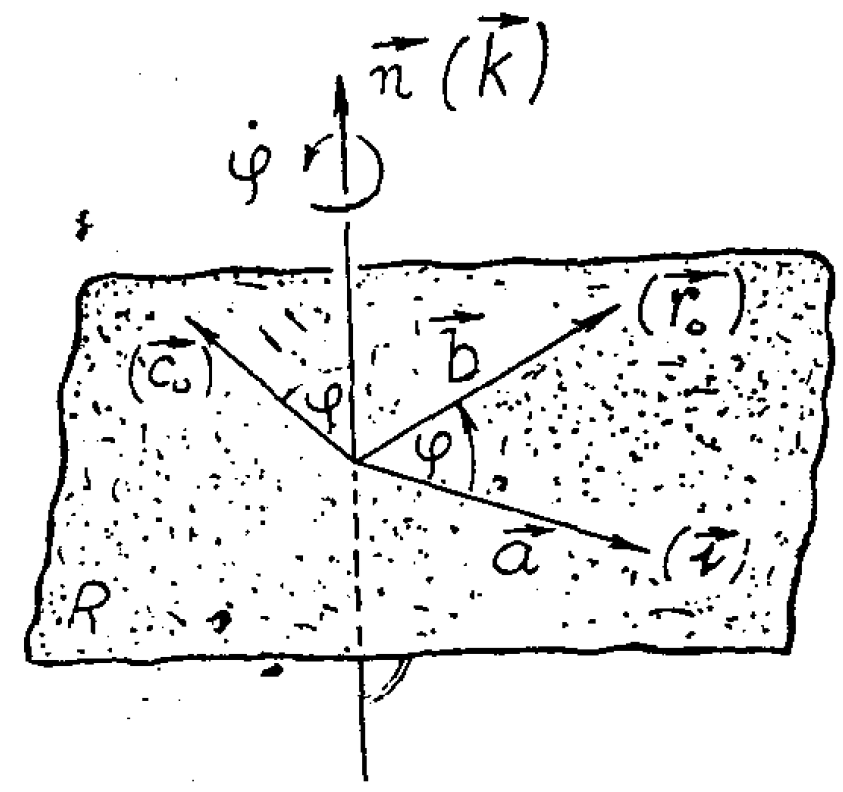
Сл. 1.

Примена ове скаларне методе је, као што се види, више формалног карактера, пошто се при томе губи физикални смисао сваког појединог члана који улази у обрасце (5) и (6). Као што је познато, [3], могу се обрасци (6) извести и као специјалан случај опште методе примене Ојлерових углова (ψ, θ, φ) и симетричних параметара (ξ, η, ζ, χ) или, пак, помоћу Келе-Клајнових (Cayley-Klein) параметара (α, β, γ, δ) који се опет изражавају помоћу симетричних параметара.

До образаца (6) може се доћи и једноставније векторским начином, уз предочавање физикалног значења сваког појединог члана у тим обрасцима, применом само формуле за ротацију вектора у равни или принципа релативног кретања, што је очигледније и од практичног интереса.

Ако је вектор $\vec{b}$, (сл. 2), постао обртањем вектора $\vec{a}$ у равни око осе оријентисане ортом $\vec{n}$ без деформације, тј. да је $|\vec{b}|=|\vec{a}|$, онда је формула ове ротације, [4],:

$$\vec{b}=\vec{a}\cos\varphi+[\vec{n}\,\vec{a}]\sin\varphi. \tag{7}$$



Сл. 2.

Ову формулу користимо при трансформацији координата у равни. Када се координатни систем Oxy заокрене око осе $Oz\,(\vec{k})$ у директном смислу за угао φ, (сл. 2), онда, према (7), добивамо ортове радијалног и циркуларног правца у равни Oxy:

$$\vec{r}_0=\vec{i}\cos\varphi+[\vec{k}\,\vec{i}]\sin\varphi=$$

$$=\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi, \tag{a}$$

$$\vec{c}_0=\vec{j}\cos\varphi+[\vec{k}\,\vec{j}]\sin\varphi=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi. \tag{b}$$

Орт просторног радијалног правца $(\vec{\rho}_0)$ постао је такође обртањем и то орта $\vec{r}_0$ у равни меридијана за угао ψ у дирекном смеру. Обртање је извршено око осе која је управна на раван меридијана, тј. око орта негативног циркуларног правца $(-\vec{c}_0)$, па је

$$\vec{\rho}_0=\vec{r}_0\cos\psi+[-\vec{c}_0\,\vec{r}_0]\sin\psi=\vec{r}_0\cos\psi+\vec{k}\sin\psi, \tag{c}$$

јер је $\vec{k}=[-\vec{c}_0\,\vec{r}_0]$. И орт меридионалног правца $(\vec{\nu}_0)$ такође је постао обртањем орта $\vec{r}_0$ у директном смеру у равни меридијана за угао $\psi+{}^1/_2\,\pi$ око осе оријентисане ортом $-\vec{c}_0$, па је

$$\vec{\nu}_0=-\vec{r}_0\sin\psi+\vec{k}\cos\psi. \tag{d}$$

Из (c) и (d) следи и овај однос

$$\vec{r}_0=\vec{\rho}_0\cos\psi-\vec{\nu}_0\sin\psi \tag{e}$$

Према томе између ортова оса сферног система $(\vec{\rho}_0, \vec{c}_0, \vec{\nu}_0)$ и оса система $Oxyz$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, постоје ови односи:

$$\begin{aligned}
\vec{\rho}_0&=\vec{i}\cos\varphi\cos\psi+\vec{j}\sin\varphi\cos\psi+\vec{k}\sin\psi,\\
\vec{c}_0&=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi\,,\\
\vec{\nu}_0&=-\vec{i}\cos\varphi\sin\psi-\vec{j}\sin\varphi\sin\psi+\vec{k}\cos\psi.
\end{aligned} \tag{8}$$

Косинуси захваћених углова (скаларни производи ортова ових оса) дати су у таблици 1.

Табл. 1.

			a_ρ	a_c	a_ν
			v_ρ	v_c	v_ν
			$\vec\rho_0$	$\vec c_0$	$\vec\nu_0$
$\ddot x$	$\dot x$	$\vec i$	$\cos\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi$	$-\cos\varphi\sin\psi$
$\ddot y$	$\dot y$	$\vec j$	$\sin\varphi\cos\psi$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi\sin\psi$
$\ddot z$	$\dot z$	$\vec k$	$\sin\psi$	0	$\cos\psi$

Према (5) брзина покретне тачке може се написати у облику

$$\vec v = \dot\rho\,\vec\rho_0 + (\rho\,\dot\varphi\cos\psi)\,\vec c_0 + \rho\,\dot\psi\,\vec\nu_0 \tag{9}$$

па диференцирањем добивамо убрзање

$$\vec a = \ddot\rho\,\vec\rho_0 + \dot\rho\,\dot{\vec\rho}_0 + \frac{d}{dt}(\rho\,\dot\varphi\cos\psi)\cdot\vec c_0 + \dot{\vec c}_0\,\rho\,\dot\varphi\cos\psi + (\dot\rho\,\dot\psi + \rho\,\ddot\psi)\,\vec\nu_0 + \rho\,\dot\psi\,\dot{\vec\nu}_0 \tag{10}$$

пошто су ортови промењљиви. Изводи ових ортова по времену, према (8), износе

$$\begin{aligned} &\dot{\vec\rho}_0 = \vec c_0\,\dot\varphi\cos\psi + \vec\nu_0\,\dot\psi; \qquad \vec r_0 = \vec c_0\,\dot\varphi,\\ &\dot{\vec c}_0 = -\dot\varphi\,(\vec\rho_0\cos\psi - \vec\nu_0\sin\psi) = -\dot\varphi\,\vec r_0,\\ &\dot{\vec\nu}_0 = -\vec\rho_0\,\dot\psi - \vec c_0\,\dot\varphi\sin\psi, \end{aligned} \tag{11}$$

те уношењем у (10) следи да је убрзање

$$\vec a = [\ddot\rho - \rho\,\dot\psi^2 - \rho\,\dot\varphi^2\cos\psi]\,\vec\rho_0 + \left[\frac{d}{dt}(\rho\,\dot\varphi\cos\psi) + \dot\rho\,\dot\varphi\cos\psi - \rho\,\dot\varphi\,\dot\psi\sin\psi\right]\vec c_0 + [2\dot\rho\,\dot\psi + \rho\,\ddot\psi + \rho\,\dot\varphi^2\sin\psi\cos\psi]\,\vec\nu_0. \tag{12}$$

Координате вектора убрзања слажу се са вредностима (6).

Како су ортови јединични вектори, сталног модула, то њихови изводи стоје управно на самим ортовима, (сл. 3), што се непосредно доказује условима ортогоналности и компланарности:

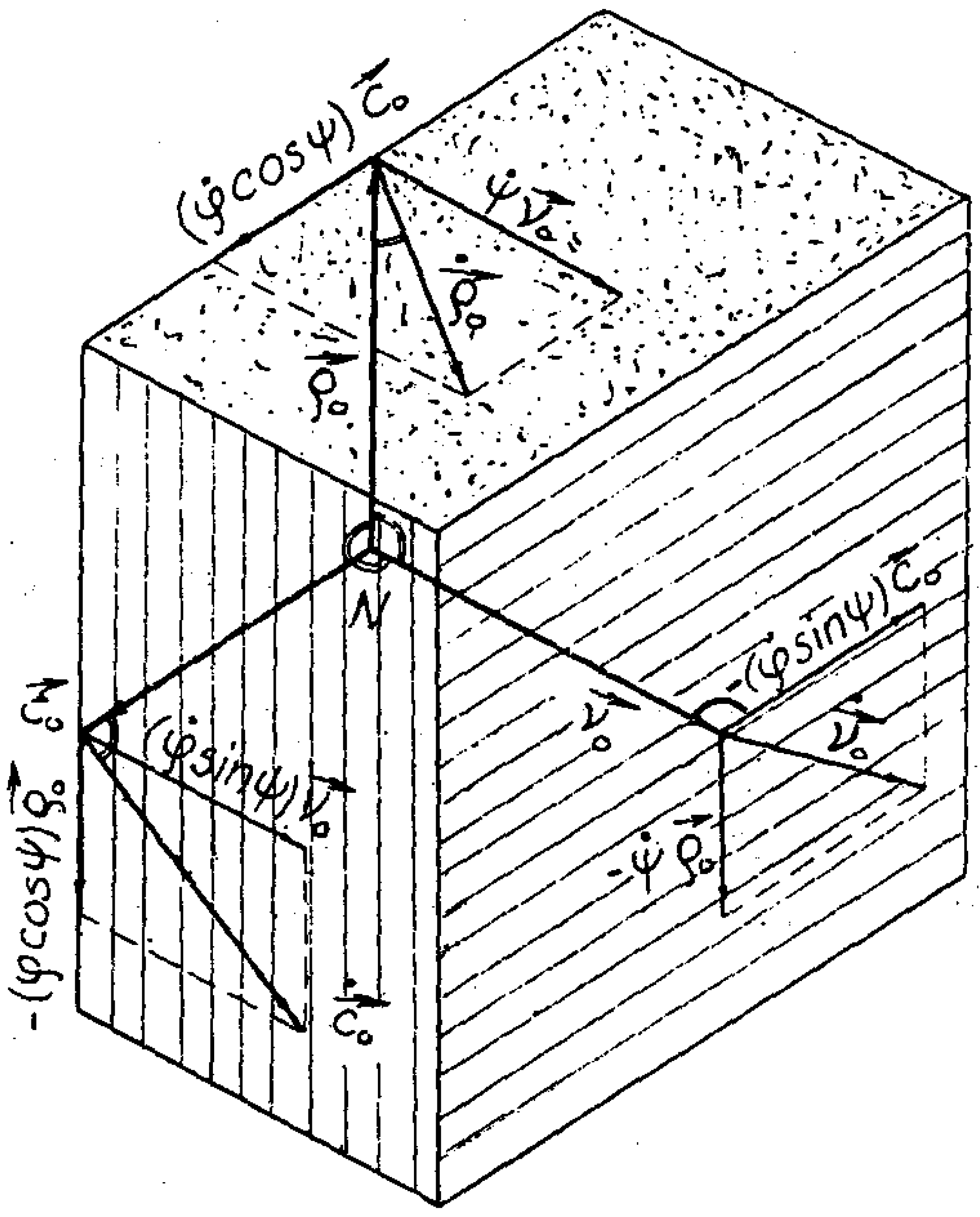
$$(\vec{\rho}_0\dot{\vec{\rho}}_0)=0, \qquad (\vec{c}_0\dot{\vec{c}}_0)=0,$$

$$(\vec{\nu}_0\dot{\vec{\nu}}_0)=0,$$

$$(\dot{\vec{\rho}}_0[\vec{c}_0\vec{\nu}_0])=0, \qquad (\dot{\vec{c}}_0[\vec{\nu}_0\vec{\rho}_0])=0,$$

$$(\dot{\vec{\nu}}_0[\vec{\rho}_0\vec{c}_0])=0.$$

Према томе је вектор $\dot{\vec{\rho}}_0$ управан на орту $\vec{\rho}_0$ и паралелан је тангенцијалној равни на сферу повученој у покретној тачки N. Слично важи и за изводе осталих ортова како је показано на сл. 3.



Сл. 3.

Помоћу таблице 1 можемо врло лако успоставити везу између пројекција вектора $\vec{v}$ и $\vec{a}$ на осе оба система како је показано у таблици 2.

Табл. 2.

$\dot{x}=$	$v_\rho\cos\varphi\cos\psi-v_c\sin\varphi-$ $-v_\nu\cos\varphi\sin\psi$	$v_\rho=$	$\dot{x}\cos\varphi\cos\psi+\dot{y}\sin\varphi\cos\psi+$ $+\dot{z}\sin\psi$
$\dot{y}=$	$v_\rho\sin\varphi\cos\psi+v_c\cos\varphi-$ $-v_\nu\sin\varphi\sin\psi$	$v_c=$	$-\dot{x}\sin\varphi+\dot{y}\cos\varphi$
$\dot{z}=$	$v_\rho\sin\psi+v_\nu\cos\psi$	$v_\nu=$	$-\dot{x}\cos\varphi\sin\psi-\dot{y}\sin\varphi\sin\psi$
$\ddot{x}=$	$a_\rho\sin\varphi\cos\psi-a_c\sin\varphi-$ $-a_\nu\cos\varphi\sin\psi$	$a_\rho=$	$\ddot{x}\cos\varphi\cos\psi+\ddot{y}\sin\varphi\cos\psi+$ $+\ddot{z}\sin\psi$
$\ddot{y}=$	$a_\rho\sin\varphi\cos\psi+a_c\cos\varphi-$ $-a_\nu\sin\varphi\sin\psi$	$a_c=$	$-\ddot{x}\sin\varphi+\ddot{y}\cos\varphi$
$\ddot{z}=$	$a_\rho\sin\psi+a_\nu\cos\psi$	$a_\nu=$	$-\ddot{x}\cos\varphi\sin\psi-\ddot{y}\sin\varphi\sin\psi$

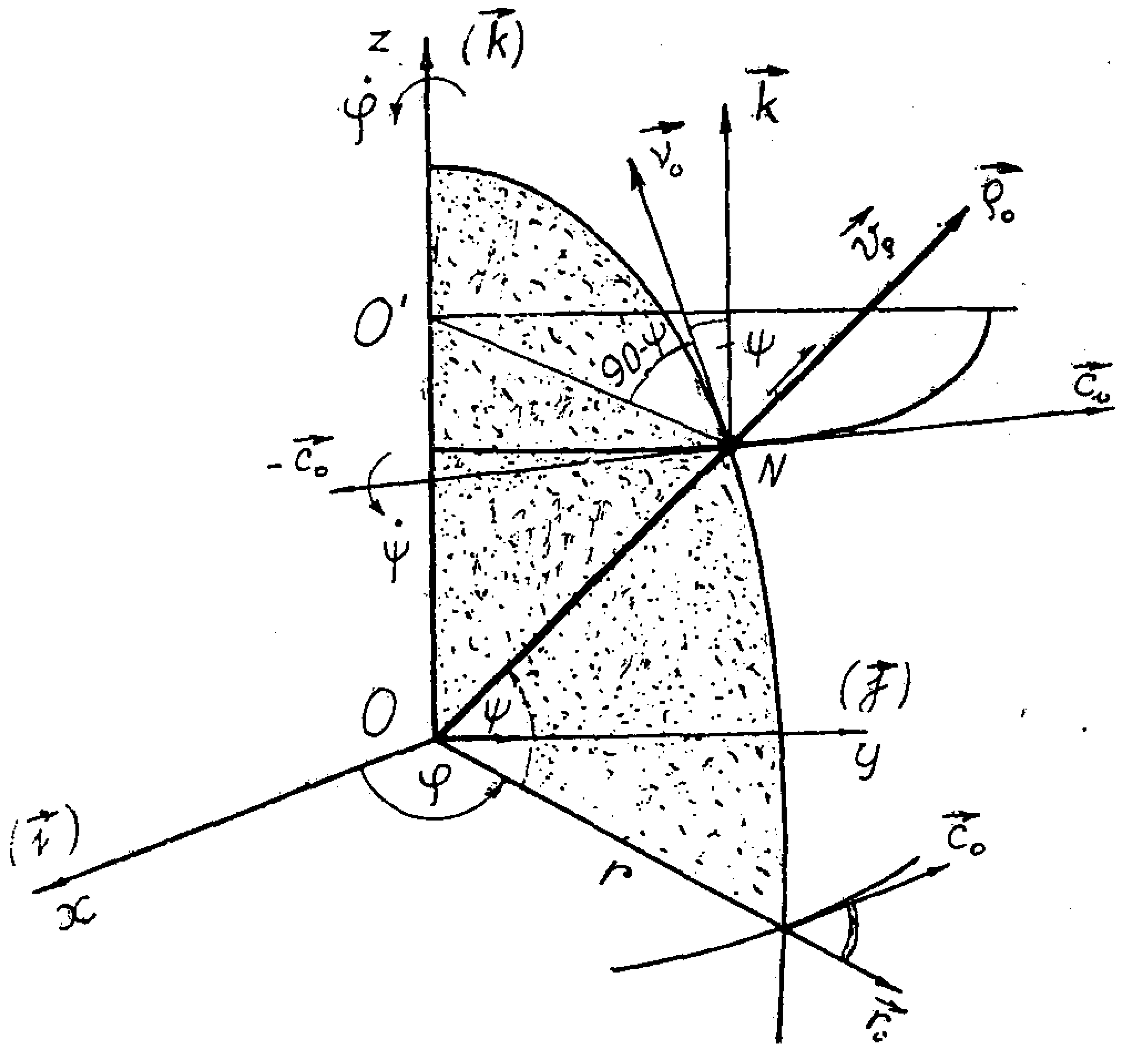
До ових резултата се долази и диференцирањем формула трансформација координата:

$$x=\rho\cos\varphi\cos\psi, \qquad \rho^2=x^2+y^2+z^2,$$
$$y=\rho\sin\varphi\cos\psi, \qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}(y/x),$$
$$z=\rho\sin\psi \qquad \psi=\arcsin(z/\sqrt{x+y^2+z^2})$$

само је посао око диференцирања огроман. Како се обично закон кретања даје у функцији $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ а траже се пројекције вектора $\vec{v}$ и $\vec{a}$ на осе сферног система, или обрнуто, горња таблица омогућује врло лако ове трансформације што је од великог практичног значаја у Механици, Балистици и Динамици флуида.

За случај кретања тачке у равни биће $\rho=r$, $\psi=0$, $\dot{\psi}=0$, па горње једначине дегенеришу у познате обрасце за случај приказивања кретања у поларним координатама; тада су $v_\nu=0$, $a_\nu=0$.

Кретање тачке N може се схватити и као просторно релативно кретање. Она се креће дуж „крутог штапа" $\overline{ON}=\rho$ који једно-



Сл. 4.

времено изводи два обртања, једно око непомичне осе Oz (орт $\vec{k}$) и друго око покретне осе оријентисане ортом $-\vec{c}_0$, сл. 4. Према томе је резултујућа угаона брзина

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\,\vec{k}-\dot{\psi}\,\vec{c}_0=(\dot{\varphi}\sin\psi)\,\vec{\rho}_0-\dot{\psi}\,\vec{c}_0+(\dot{\varphi}\cos\psi)\,\vec{v}_0 \qquad (13)$$

и угаоно убрзање

$$\dot{\vec{\omega}}=(\ddot{\varphi}\sin\psi+\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi)\vec{\rho}_0-\ddot{\psi}\vec{c}_0+(\ddot{\varphi}\cos\psi-\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi)\vec{\nu}_0\,. \tag{14}$$

Вектор положаја покретне тачке N је:

$$\vec{\rho}=\overrightarrow{ON}=\rho\,\vec{\rho}_0, \tag{15}$$

па му се мења и величина и правац, те његов извод по времену има два дела, релативни и преносни, па је брзина

$$\vec{v}=\dot{\vec{\rho}}+[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]=\dot{\rho}\,\vec{\rho}_0+(\rho\,\dot{\varphi}\cos\psi)\,\vec{c}_0+\rho\,\dot{\psi}\,\vec{\nu}_0=\vec{v}_r+\vec{v}_p\,. \tag{16}$$

Радијална компонента брзине претставља релативну брзину, док оне друге две компоненте брзине јесу компоненте преносне брзине, која лежи у тангенцијалној равни сфере.

Диференцирањем обрасца (16), с обзиром на релативни и преносни део извода, добивамо убрзање

$$\vec{a}=\ddot{\vec{\rho}}+[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{\rho}]+[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]]+2\,[\vec{\omega}\,\dot{\vec{\rho}}]=\vec{a}_r+\vec{a}_p+\vec{a}_K\,. \tag{17}$$

Члан $\ddot{\vec{\rho}}$ претставља релативно убрзање. Друга два члана претстављају преносно убрзање

$$\vec{a}_p=[\dot{\vec{\omega}}\,\vec{\rho}]+(\vec{\omega}\,\vec{\rho})\,\vec{\omega}-\omega^2\vec{\rho}=a_{p\rho}\,\vec{\rho}_0+a_{pc}\,\vec{c}_0+a_{p\nu}\,\vec{\nu}_0 \tag{18}$$

чије су координате

$$\begin{aligned} a_{p\rho}&=(\vec{\rho}_0\,\vec{a}_p)=-\rho\,\dot{\varphi}^2\cos^2\psi-\rho\,\dot{\psi}^2,\\ a_{pc}&=(\vec{c}_0\,\vec{a}_p)=\rho\,\ddot{\varphi}\cos\psi-2\,\rho\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\psi,\\ a_{p\nu}&=(\vec{\nu}_0\,\vec{a}_p)=\rho\,\ddot{\psi}+\rho\,\dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi. \end{aligned} \tag{19}$$

Ово убрзање, дакле, утиче на сва три компонентна убрзања за сферне координате.

Трећи члан у (17) је Корилисово убрзање

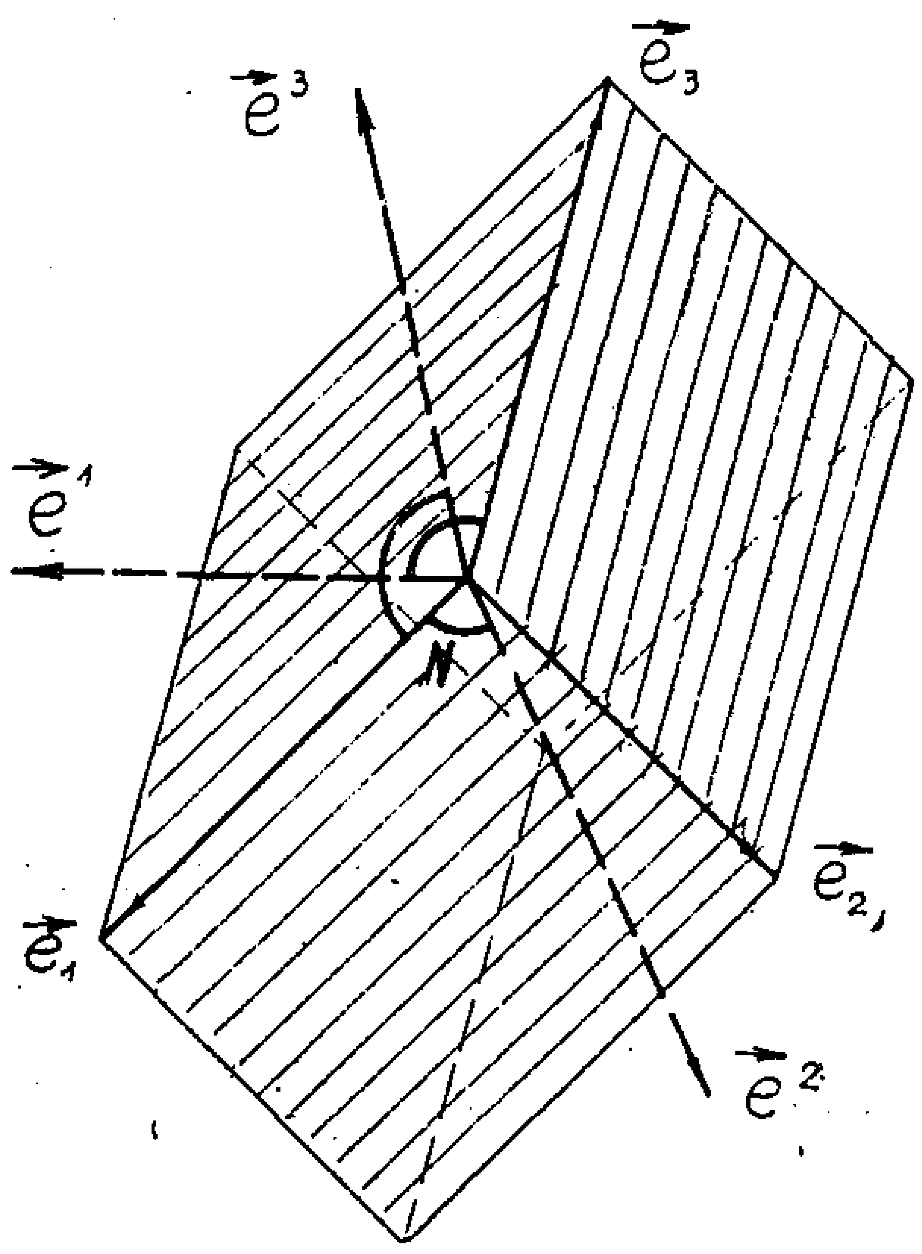
$$\vec{a}_K=2\begin{vmatrix}\vec{\rho}_0 & \vec{c}_0 & \vec{\nu}_0\\ \dot{\varphi}\sin\psi & -\dot{\psi} & \dot{\varphi}\cos\psi\\ \dot{\rho} & 0 & 0\end{vmatrix}=(2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\cos\psi)\,\vec{c}_0+2\,\dot{\rho}\,\dot{\psi}\,\vec{\nu}_0. \tag{20}$$

Оно дејствује такође у тангенцијалној равни, па утиче на циркуларну и меридионалну компоненту убрзања.

За $\rho=r$, $\psi=0$ добивени обрасци се поклапају са онима за релативно кретање у равни изражено помоћу поларних координата, [2].

Крајем прошлог и почетком овог века Експериментална Физика дошла је до нових открића, који су захтевали и нову математичку апаратуру за објашњење тих појава. Тако је створен Тензорски рачун, који данас све више продире и у техничке дисциплине. У основи тога рачуна стоје линеарне трансформације, па треба координате једног вектора изразити на различите начине.

Из Статике у простору познато је да се сила може разложити у три некомпланарна правца која се стичу у нападној тачки силе, [5]. На исти се начин може и сваки вектор разложити у три таква правца, па се и положај покретне тачке може одредити помоћу трију координатних вектора $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ који образују триједар (сл. 5). Тада је вектор положаја тачке



Сл. 5

$$\vec{r} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3, \tag{21}$$

где су x^i његове *контраваријантне координате*, а индекс i значи редни број координате. Да бисмо одредили ове координате треба горњу једначину множити скаларно редом векторским производима $[\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, $[\vec{e}_3, \vec{e}_1]$, $[\vec{e}_2, \vec{e}_1]$. Како су мешовити производи, напр. $(\vec{e}_1 [\vec{e}_2 \vec{e}_3]) = 0$, $(\vec{e}_2 [\vec{e}_2 \vec{e}_3]) = 0$, то су контраваријантне координате

$$x^1 = \frac{(\vec{r}\,[\vec{e}_2 \vec{e}_3])}{\Delta}, \quad x^2 = \frac{(\vec{r}\,[\vec{e}_3 \vec{e}_1])}{\Delta}, \quad x^3 = \frac{(\vec{r}\,[\vec{e}_1 \vec{e}_2])}{\Delta}, \tag{22}$$

где је

$$\Delta = (\vec{e}_1 [\vec{e}_2 \vec{e}_3]). \tag{23}$$

Из (22), ако су координатни вектори $\vec{e}_i$ ортови, следи да су координате x^i Декартове координате вектора $\vec{r}$.

Вектори

$$\vec{e}^{\,1} = \frac{[\vec{e}_2 \vec{e}_3]}{\Delta}, \quad \vec{e}^{\,2} = \frac{[\vec{e}_3 \vec{e}_1]}{\Delta}, \quad \vec{e}^{\,3} = \frac{[\vec{e}_1 \vec{e}_2]}{\Delta}, \quad \vec{e}^{\,i} = \frac{[\vec{e}_j \vec{e}_k]}{\Delta} \tag{24}$$

такође образују триједар основних вектора конјугован првом. Због векторских производа, вектори $\vec{e}^{\,i}$ су управни на раван вектора

$\vec{e}_j$ и $\vec{e}_k$ различитих индекса, (сл. 5). Њихов мешовити производ износи

$$(\vec{e}^1 [\vec{e}^2 \vec{e}^3]) = \Delta^1 \tag{25}$$

па је $\Delta \Delta^1 = 1$.

На основу (24) могу се контраваријантне координате изразити помоћу скаларних производа вектора $\vec{r}$ и конјугованих координатних вектора $\vec{e}^i$, па је

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (\vec{r} \vec{e}^i) \vec{e}_i . \tag{26}$$

Узму ли се, обрнуто, вектори $\vec{e}^i$ за координатне векторе може се вектор положаја тачке $(\vec{r})$ написати у облику

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}^1 + x_2 \vec{e}^2 + x_3 \vec{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} (\vec{r} \vec{e}_i) \vec{e}^i, \tag{27}$$

где су x_i његове *коваријантне координате* у односу на први триједар.

Између координатних вектора оба конјугована триједра постоји овај однос

$$(\vec{e}_i \vec{e}^k) = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad i = k \\ 0 & \quad i \neq k \end{cases} \tag{28}$$

где је δ_i^k *Кронекеров* (Kronecker) *симбол*.

Напр.,

$$(\vec{e}_1 , \vec{e}^1) = (\vec{e}_1 [\vec{e}_2 , \vec{e}_3])/\Delta = 1 , \delta_1^1 = 1 ;$$

$$(\vec{e}_1 \vec{e}^2) = (\vec{e}_1 [\vec{e}_3 \vec{e}_1])/\Delta = 0 , \delta_1^2 = 0 .$$

Према томе може се вектор положаја тачке написати у једном од ова два облика

$$r = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = x_1 \vec{e}^1 + x_2 \vec{e}^2 + x_3 \vec{e}^3 . \tag{29}$$

С обзиром на (28) обе врсте координата тачке могу се одредити из (29) скаларним множењем вектора $\vec{e}_i$ односно $\vec{e}^i$, па су:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\vec{r} \vec{e}_1) = g_{11} x^1 + g_{12} x^2 + g_{13} x^3 ; & x^1 &= (\vec{r} \vec{e}^1) = g^{11} x_1 + g^{12} x_2 + g^{13} x_3 , \\ x_2 &= (\vec{r} \vec{e}_2) = g_{21} x^1 + g_{22} x^2 + g_{23} x^3 ; & x^2 &= (\vec{r} \vec{e}^2) = g^{21} x_1 + g^{22} x_2 + g^{23} x_3 , \\ x_3 &= (\vec{r} \vec{e}_3) = g_{31} x^1 + g_{32} x^2 + g_{33} x^3 ; & x^3 &= (\vec{r} \vec{e}^3) = g^{31} x_1 + g^{32} x_2 + g^{33} x_3 , \end{aligned} \tag{30}$$

где су g_{ik}, односно g^{ik}, вредности скаларних производа координатних вектора. Те вредности се обично схематски претстављају

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \hline \vec{e}_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \vec{e}_2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \vec{e}_3 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \hline \vec{e}^1 & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ \vec{e}^2 & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ \vec{e}^3 & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \tag{31}$$

Због важности комутативног закона за скаларно множење двају вектора, важе и ове релације

$$(\vec{e}_i \vec{e}_k) = (\vec{e}_k \vec{e}_i) = g_{ik} = g_{ki}, \quad (\vec{e}^i \vec{e}^k) = g^{ik} = g^{kl}. \tag{32}$$

Како су системи (30) линеарни то су коефицијенти g^{ik} једнаки кофакторима детерминанте косинусне схеме вектора $\vec{e}_i$ подељеним самом детерминантом Δ, па су координате

$$x_i = \sum_{k=1}^{3} g_{ik}\, x^k, \quad x^i = \sum_{k=1}^{3} g^{ik}\, x_k, \quad g^{ik} = \frac{K_{ik}}{\Delta}. \tag{30a}$$

У многим техничким проблемима потребно је одредити овакве координате вектора брзине и убрзања. Због ортогоналности сферног система брзина покретне тачке може се написати у овим облицима

$$\vec{v} = \sum A_i \dot{q}_i \vec{T}_i = \sum v^i \vec{e}_i = \sum v_i \vec{e}^i = v_\rho \vec{\rho}_0 + v_c \vec{c}_0 + v_\nu \vec{\nu}_0 \tag{33}$$

где су v^i контраваријантне а v_i коваријантне координате. Упоређивањем вредности са обе стране једнчина (33) лако се одређују контраваријантне координате

$$v^i = \dot{q}_i, \quad v^1 = \dot{\rho}, \quad v^2 = \dot{\varphi}, \quad v^3 = \dot{\psi}. \tag{34}$$

Оне су, дакле, једнаке генералнсаним брзинама.

Према (29), (30), (33) и (1) коваријанте координате су

$$\begin{aligned} v_i &= (\vec{v}\,\vec{e}_i) = A_i (\vec{v}\,\vec{T}_i) = A_i^2 \dot{q}_i | = A_i^2 | v^i = \partial\,(^1/_2\, v^2)/\partial\, \dot{q}_i, \\ v_1 &= \dot{\rho}, \quad v_2 = \rho^2 \dot{\varphi} \cos^2\psi = r^2 \dot{\varphi}, \quad v_3 = \rho^2 \dot{\psi}, \end{aligned} \tag{35}$$

јер су координатни вектори

$$\begin{aligned} &\vec{e}_i = A_i \vec{T}_i, \quad \vec{e}^i = (A_i)^{-1} \vec{T}_i, \quad \Delta = \rho^2 \cos\psi, \quad \Delta_1 = 1/\rho^2 \cos\psi, \\ &\vec{e}_1 = \vec{\rho}_0, \ \vec{e}_2 = (\rho\cos\psi)\, \vec{c}_0, \ \vec{e}_3 = \rho\, \vec{\nu}_0; \ \vec{e}^1 = \vec{\rho}_0, \ \vec{e}^2 = \vec{c}_0/\rho\cos\psi, \ \vec{e}^3 = \vec{\nu}_0/\rho \end{aligned} \tag{36}$$

и њихове косинусне схеме (31)

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$		$\vec{e}^1$	$\vec{e}^2$	$\vec{e}^3$
$\vec{e}_1$	1	0	0	$\vec{e}^1$	1	0	0
$\vec{e}_2$	0	$\rho^2\cos^2\psi$	0	$\vec{e}^2$	0	$1/\rho^2\cos^2\psi$	0
$\vec{e}_3$	0	0	ρ^2	$\vec{e}^3$	0	0	$1/\rho^2$

Како је координатни вектор $\vec{e}_1$ једнак орту $\vec{\rho}_0$, то су брзине $v^1=v_1=\dot{\rho}$ релативна брзина. Друге две контраваријантне координате претстављају угаоне брзине, а коваријантне брзине двоструке секторске брзине у равнима упоредника и меридијана. Између пројекција брзина на осе сферног система и ових координата, према (33), (34) и (35), постоје ови односи

$$v_{q_i}=\frac{1}{A_i}\,\frac{\partial\,({}^1/_2\,v^2)}{\partial\,\dot{q}_i}=\frac{v_i}{A_i}=A_i\,v^i. \tag{37}$$

Убрзање покретне тачке може се написати у овом облику

$$\vec{a}=\sum_1^3 a^i\,\vec{e}_i=\sum_1^3 a_i\,\vec{e}^i=a_\rho\,\vec{T}_1+a_c\,\vec{T}_2+a_\nu\,\vec{T}_3=a_\rho\,\vec{\rho}_0+a_c\,\vec{c}_0+a_\nu\,\vec{\nu}_0, \tag{38}$$

па упоређивањем, с обзиром на (36) и (2), добивамо контраваријантне координате вектора убрзања

$$a^i=\frac{a_{q_i}}{A_i}=\frac{1}{A_i^2}\left[\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,({}^1/_2\,v^2)}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\,({}^1/_2\,v^2)}{\partial q_i}\right]. \tag{39}$$

Према (6) оне износе

$$\begin{aligned}
a^1&=a^\rho=\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\varphi}^2\cos^2\psi-\rho\,\dot{\psi}^2,\\
a^2&=\frac{a_c}{\rho\cos\psi}=\ddot{\varphi}+2\frac{\dot{\rho}\,\dot{\varphi}}{\rho}-2\,\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\,\mathrm{tg}\,\psi,\\
a^3&=\frac{a_\nu}{\rho}=\ddot{\psi}+2\,\frac{\dot{\rho}\dot{\psi}}{\rho}+\dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi.
\end{aligned} \tag{40}$$

Према (29), (30), (34) и (38) коваријантне координате су

$$a_i=(\vec{a}\,\vec{e}_i)=A_i\,(\vec{a}\,\vec{T}_i)=A_i\,a_{q_i}=\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,({}^1/_2\,v^2)}{\partial\,\dot{q}_i}-\frac{\partial\,({}^1/_2\,v^2)}{\partial\,q_i}, \tag{41}$$

односно, према (6):

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - \rho\,\dot{\psi}^2,\\
a_2 &= \rho^2\,\ddot{\varphi}\cos^2\psi + 2\,\rho\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\cos^2\psi - 2\,\rho^2\dot{\varphi}\,\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi,\\
a_3 &= \rho^2\,\ddot{\psi} + 2\,\rho\,\dot{\rho}\,\dot{\psi} + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Како је $\vec{e}_1 = \vec{\rho}_0$ то је $a^1 = a_1 = a_\rho$. Циркуларно и меридионално убрзање једнаки су моментима одговарајућих контраваријантних убрзања за координатни почетак O. Обратно, коваријантне координате a_2 и a_3 једнаке су моментима циркуларног и меридионалног убрзања за почетак O.

Општије посматрано квадрат брзине у криволиниском координатном систему, према (3), дат је изразом

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k \tag{43}$$

те претставља хомогену квадратну форму генералисаних брзина са коефицијентима $g_{ii} = A_i^2$, $g_{ik} = g_{ki} = B_j$, $i \neq j \neq k$, који су или константе или зависе од генералисаних координата (q_i). Због те зависности диференцирањем половине квадрата брзине добивамо изразе

$$\frac{\partial(^1/_2\,v^2)}{\partial\dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{3} g_{ik}\,\dot{q}_k\,, \tag{a}$$

$$\frac{\partial(^1/_2\,v^2)}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_r\sum_s \frac{\partial g_{rs}}{\partial q_i}\dot{q}_r\,\dot{q}_s\,, \tag{b}$$

па је и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(^1/_2\,v^2)}{\partial\dot{q}_i} = \sum_k g_{ik}\,\ddot{q}_k + \sum_r\sum_s \frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s}\dot{q}_r\,\dot{q}_s\,. \tag{c}$$

Како је

$$\sum_r\sum_s \frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s}\dot{q}_r\dot{q}_s = \sum_r\sum_s \frac{\partial g_{is}}{\partial q_r}\dot{q}_r\dot{q}_s = \frac{1}{2}\sum_r\sum_s\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial q_r}\right)\dot{q}_r\dot{q}_s$$

то су, према (41) и горњим релацијама, коваријантне координате вектора убрзања у криволиниским координатама

$$a_i = \sum_{k=1}^{3} g_{ik}\,\ddot{q}_k + \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix}\dot{q}_r\dot{q}_s, \tag{44}$$

где је уведен, краткоће ради, *Кристофелов* (Christoffel) *симбол прве врсте*

$$\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial q_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial q_i}\,. \tag{45}$$

За сферни систем су $B_i=0$, тј. $g_{ik}=0$, па ови симболи имају специјалне вредности дате у таблици 3.

Табл. 3

			$2\times$	$2\times$	$2\times$			
			1	2	3	4	5	6
i	$A_i^2=g_{ii}$	$\ddot{q}_i$	$\dot{q}_1^2=\dot{\rho}^2$ $\left[{1\ 1 \atop i}\right]$	$\dot{q}_1\dot{q}_2=\dot{\rho}\,\dot{\varphi}$ $\left[{1\ 2 \atop i}\right]$	$\dot{q}_1\dot{q}_3=\dot{\rho}\dot{\psi}$ $\left[{1\ 3 \atop i}\right]$	$\dot{q}_2^2=\dot{\varphi}^2$ $\left[{2\ 2 \atop i}\right]$	$\dot{q}_2\dot{q}_3=\dot{\varphi}\dot{\psi}$ $\left[{2\ 3 \atop i}\right]$	$\dot{q}_3^2=\dot{\psi}^2$ $\left[{3\ 3 \atop i}\right]$
1	1	$\ddot{\rho}$	0	0	0	$-\rho\cos^2\psi$	0	$-\rho$
2	$\rho^2\cos^2\psi$	$\ddot{\varphi}$	0	$\rho\cos^2\psi$	0	0	$-\rho^2\cos\psi\sin\psi$	0
3	ρ^2	$\ddot{\psi}$	0	0	ρ	$\rho^2\cos\psi\sin\psi$	0	0

$$\left[{1\ 2 \atop 2}\right]=-\left[{2\ 2 \atop 1}\right];\quad \left[{2\ 2 \atop 3}\right]=-\left[{2\ 3 \atop 2}\right];\quad \left[{1\ 3 \atop 3}\right]=-\left[{3\ 3 \atop 1}\right].$$

Из ове таблице непосредно следи да су коваријантне координате претстављене изразима

$$\begin{aligned} a_1&=g_{11}\ddot{q}_1+\left[{2\ \ 2 \atop 1}\right]\dot{q}_2^2+\left[{3\ \ 3 \atop 1}\right]\dot{q}_3^2,\\ a_2&=g_{22}\ddot{q}_2+2\left[{1\ \ 2 \atop 2}\right]\dot{q}_1\dot{q}_2+2\left[{2\ \ 3 \atop 2}\right]\dot{q}_2\dot{q}_3,\\ a_3&=g_{33}\ddot{q}_3+\left[{2\ \ 2 \atop 3}\right]\dot{q}_2^2+2\left[{1\ \ 3 \atop 3}\right]\dot{q}_1\dot{q}_3. \end{aligned} \tag{46}$$

Унесу ли се вредности симбола добивају се исте вредности као и (42).

Према (32) и (44) контраваријантне координате су

$$a^i=\sum_k g^{ik}a_k=\sum_k g^{ik}\left(\sum_i g_{ki}\ddot{q}_i+\sum_r\sum_s\left[{r\ \ s \atop k}\right]\dot{q}_r\dot{q}_s\right).$$

Користећи Кронекеров симбол (28) горње координате се могу написати у облику

$$a^i=\ddot{q}_i+\sum_r\sum_s\left\{{r\ \ s \atop i}\right\}\dot{q}_r\dot{q}_s, \tag{47}$$

где је, краткоће ради, уведен *Кристофелов симбол друге врсте*

$$\left\{{r\ s \atop i}\right\}=\sum_k g^{ik}\left[{r\ \ s \atop k}\right]. \tag{48}$$

За сферни систем вредности ових симбола дате су у таблици 4.

Табл. 4.

			2×	2×	2×			
			1	2	3	4	5	6
			$\dot{q}_1^2=\dot{\rho}^2$	$\dot{q}_1\dot{q}_2=\dot{\rho}\dot{\varphi}$	$\dot{q}_1\dot{q}_3=\dot{\rho}\dot{\psi}$	$\dot{q}_2^2=\dot{\varphi}^2$	$\dot{q}_2\dot{q}_3=\dot{\varphi}\dot{\psi}$	$\dot{q}_3^2=\dot{\psi}^2$
i	g^{ii}	$\ddot{q}_i$	$\left\{\begin{matrix}1\;1\\i\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}1\;2\\i\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}1\;3\\i\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}2\;2\\i\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}2\;3\\i\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}3\;3\\i\end{matrix}\right\}$
1	1	$\ddot{\rho}$	0	0	0	$-\rho\cos^2\psi$	0	$-\rho$
2	$\frac{1}{\rho^2\cos^2\psi}$	$\ddot{\varphi}$	0	$\frac{1}{\rho}$	0	0	$-\operatorname{tg}\psi$	0
3	$\frac{1}{\rho^2}$	$\ddot{\psi}$	0	0	$\frac{1}{\rho}$	$\sin\psi\cos\psi$	0	0

$$\left\{\begin{matrix}1\;2\\2\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}1\;3\\3\end{matrix}\right\};\qquad \left\{\begin{matrix}1\;3\\3\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}3\;3\\1\end{matrix}\right\}=-1;\qquad \left\{\begin{matrix}3\;2\\3\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}2\;3\\2\end{matrix}\right\}=-\sin^2\psi.$$

Контраваријантне координате биће:

$$\begin{aligned}
a^1&=\ddot{q}_1+\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\dot{q}_2^2+\left\{\begin{matrix}3\,1\\1\end{matrix}\right\}\dot{q}_3^2=\ddot{q}_1+g^{11}\begin{bmatrix}2\,2\\1\end{bmatrix}\dot{q}_2^2+g^{11}\begin{bmatrix}3\,3\\1\end{bmatrix}\dot{q}_3^2,\\
a^2&=\ddot{q}_2+2\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\dot{q}_1\dot{q}_2+2\left\{\begin{matrix}2\,3\\2\end{matrix}\right\}\dot{q}_2\dot{q}_3=\ddot{q}_2+2g^{22}\begin{bmatrix}1\,2\\2\end{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2+2g^{22}\begin{bmatrix}2\,3\\2\end{bmatrix}\dot{q}_2\dot{q}_3,\\
a^3&=\ddot{q}_3+\left\{\begin{matrix}2\,2\\3\end{matrix}\right\}\dot{q}_2^2+2\left\{\begin{matrix}1\,3\\3\end{matrix}\right\}\dot{q}_1\dot{q}_3=\ddot{q}_3+g^{33}\begin{bmatrix}2\,2\\3\end{bmatrix}\dot{q}_2^2+2g^{33}\begin{bmatrix}1\,3\\3\end{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_3.
\end{aligned}\tag{49}$$

Уносећи у (49) вредности симбола добијају се исте вредности као (40).

У таблицама 3 и 4 дате су и извесне особине Кристофелових симбола обе врсте за сферни систем координата.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Билимовић — Рационална Механика I, Београд, 1950.
[2] Д. Рашковић — Механика II (Кинематика), Београд, 1950.
[3] E. T. Whittaker — A Treatise on the Analytical Dynamics of particles and rigid bodies, Cambridge, 1937.
[4] Р. Кашанин — Виша Математика I, 1949.
[5] Д. Рашковић — Механика I (Статика), Београд, 1950.

PROCÉDÉ VECTORIEL DE DÉTERMINATION DE COORDONNÉES SPHÉRIQUES DES VECTEURS DE VITESSE ET D'ACCÉLÉRATION

Par

D. RAŠKOVIĆ

Dans ce travail on donne pour cette détermination une méthode vectorielle simple, en n'utilisant que la formule de rotation dans le plan, respectivement le principe du mouvement relatif dans l'espece. La méthode proposée est très pratique, car elle permet de saisir le sens physique des différentes parties de ces projections. On donne, en outre, l'interprétation des coordonnées covariantes et contravariantes de ces vecteurs.