Зборник радова С. А. Н. L — Математички институт С. А. Н. књ. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique № 5, 1956

С. АЉАНЧИЋ и Ј. КАРАМАТА

ПРАВИЛНО ПРОМЕНЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ И FRULLANI-ЕВ ИНТЕГРАЛ

Циљ овог излагања је да се укаже на повезаност која постоји између Frullani-ева интеграла и класе правилно промељивих финкција.

1. Нека је $f(x)$ интеграбилна у сваком коначном размаку (α, β), $\alpha > 0$. У више наврата, први пут 1823, Cauchy [4–6] је посматрао интеграл

$$\int_{+0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \qquad a > 0,\ b > 0, \tag{1}$$

који је несвојствен у тачки $x = +0$ и $x = \infty$, и показао да је његова вредност

$$(f_0 - f_\infty) \log \frac{b}{a},$$

уколико постоје граничне вредности

$$\lim_{x=+0} f(x) = f_0 \quad \text{и} \quad \lim_{x=\infty} f(x) = f_\infty. \tag{2}$$

Ово следи из идентитета

$$\int_{x'}^{x''} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = \int_{ax'}^{bx'} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ax''}^{bx''} \frac{f(t)}{t} dt, \tag{3}$$

јер је, према (2),

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = f(x) \log \frac{b}{a} + \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(x)}{t} dt = f(x) \log \frac{b}{a} + o(1)$$

кад $x \to$ било $+0$ било ∞.

У литератури је интеграл (1) добио име Frullani-ев интеграл, јер га је 1828 године Frullani [9] поново проучавао, иако се његов доказ не може одржати са данашње тачке гледишта.

У новије време (1940) први се на питање егзистенције интеграла (1) вратио Iyengar [11]. Он је приметио да за егзистенцију Frullani-ева интеграла није потребно да $f(x)$ конвергира када $x \to +0$ и ∞, већ да је довољно да она буде C-збирљива, и тада је

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (\overline{f}_0 - \overline{f}_\infty)\log\frac{b}{a},$$

где је

$$\overline{f}_0 = C - \lim_{x=+0} f(x) \quad \text{и} \quad \overline{f}_\infty = C - \lim_{x=\infty} f(x).$$

Шта више, он је показао да је C-збирљивост *потребан* и *довољан* услов да би Frullani-ев интеграл егзистирао *за свако* позитивно a и b. Чињеницу да је функција $f(x)$ C-збирљива у тачки $x=+0$ односно $x=\infty$, Iyengar је изразио егзистенцијом несвојствена интеграла

$$(4) \qquad \int_{+0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{и} \quad \lim_{x=+0}\frac{1}{x}\int_{+0}^{x} f(t)\,dt,$$

односно

$$(5) \qquad \int_{x}^{\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,dt \quad \text{и} \quad \lim_{x=\infty} x\int_{x}^{\infty} \frac{f(t)}{t^2}\,dt.$$

У низу расправа Agnew [1–3], Racine [17] и Ostrówski [16] третирали су питање егзистенције Frullani-ева интеграла. У [1] Agnew је упростио Iyengar-ов доказ. Ostrowski је до аналогних резултата дошао независно од Iyengar-а и Agnew-а. Једина новина према Iyengar-овом резултату до које су они дошли, састоји се у томе што су C-збирљивост функције $f(x)$ у тачки $x=+0$ и $x=\infty$ изразили различитим еквивалентним облицима. Тако су услови (4) и (5) код Agnew-а замењени са

$$\lim_{x=+0}\frac{1}{x}\int_{+0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{и} \quad \lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\int_{+0}^{x} f(t)\,dt,$$

код Racine-а егзистенцијом првог десног извода у тачки $x=+0$ функција

$$\Phi(x) = \int_{+0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{и} \quad \Psi(x) = \int_{+0}^{x} f\left(\frac{1}{t}\right)dt,$$

а код Ostrowskog са

$$\lim_{x=+0} x\int_{x}^{1} \frac{f(t)}{t^2}\,dt \quad \text{и} \quad \lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\int_{+0}^{x} f(t)\,dt$$

Ако не водимо рачуна о изразу којим је изражена C-збирљивост нити о томе да ли се ради о тачки $x=+0$ или $x=\infty$ (јер једноставном сменом прелазимо с једне на другу), Iyengar-ов резултат своди се у суштини на овај став:

Нека је $f(x)$ интеграбилна у сваком коначном размаку (α, β), $\alpha > 0$. *Потребан и довољан услов да постоји гранична вредност*

$$J(\lambda) \stackrel{def}{=} \lim_{x=0} \int_{x}^{\lambda x} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

за свако $\lambda > 0$ *је да* $f(x)$ *буде* C*-збирљива када* $x \to \infty$.

Ако са L *означимо њен* C*-збир, тада је*

$$J(\lambda) = L \log \lambda.$$

Поред тога, Iyengar је показао да је за егзистенцију $J(\lambda)$ *за свако* $\lambda > 0$ довољно да та гранична вредност постоји за свако λ *произвољно малог размака*, или, као што су то доказали Agnew и Ostrowski, на скупу позитивне мере; ако је, пак, $f(x)$ *ограничена* довољно је да $J(\lambda)$ постоји *за две* вредности λ_1 и λ_2 од λ, такве да је количник $\log \lambda_1 / \log \lambda_2$ ирационалан.

2. Предмет овог излагања је да укажемо на уску везу између Frullani-ева интеграла и класе *правилно промењивих функција* које је други од аутора [12] увео још 1930. Напомињемо да је у радовима [12, 13] други од аутора ову класу функција назвао „регуларно растућим“ (à croissance regulière); међутим, сматрамо да назив „правилно промењива“ функција више одговара суштини. У ствари, горе наведени Iyengar-ов став, који с обзиром на идентитет (3) (када b/a заменимо са λ) решава питање егзистенције Frullani-ева интеграла, само је специјалан случај основних резултата из теорије правилно промењивих функција. Ради бољег прегледа, навешћемо прво дефиницију и главне особине правилно промењивих функција.

За функцију $p(x)$ кажемо да је правилно промењива у тачки $x-\infty$ ако је интеграбилна и константног знака[1] *и ако, кад је* $p(x) \neq 0$, *постоји гранична вредност*

$$h(\lambda) \stackrel{def}{=} \lim_{x=\infty} \frac{p(\lambda x)}{p(x)} \quad \text{за свако} \quad \lambda > 0. \tag{6}$$

[1] Под „знаком од a“, тј. $\operatorname{sg}(a)$, подразумевамо

$$\operatorname{sg}(a) = \begin{cases} +1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

(i) *Из егзистенције граничне вредности* (6) *следи да је* $h(\lambda)=\lambda^{\alpha}$ *и да тај гранични прелаз важи униформно по* $\lambda\in(a,b)$, $0<a<b<\infty$. α *је индекс правилно променљиве функције* $p(x)$.

(ii) *Потребан и довољан услов да је интеграбилна функција константног знака* $p(x)\neq 0$ *правилно променљива у тачки* $x=\infty$, *јесте да или*

1° *постоји број* k *такав да*

$$\int_0^1 t^k \frac{p(tx)}{p(x)}\,dt \to \frac{1}{\alpha+k+1}>0, \qquad x\to\infty,$$

или

2° $$\int_0^1 \log\frac{p(x)}{p(tx)}\,dt\to\alpha, \qquad x\to\infty,$$

или

3° $$\int_1^{\infty} \log\frac{p(tx)}{p(x)}\,\frac{dt}{t^2}\to\alpha, \qquad x\to\infty.$$

(iii) *Правилно променљива функција* $p(x)$ *индекса* α *има репрезентацију*

$$p(x)=c(x)\,x^{\alpha}\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt},$$

где $c(x)\to c$ *и* $\varepsilon(x)\to 0$ *када* $x\to\infty$.

Докази резултата (i), (ii) 1° и (iii) могу се наћи у [12] и [13]. Резултат (ii) 2° и 3° доказаћемо на крају ове тачке. Примећујемо да је други од аутора у наведеним радовима доказао униформност граничног прелаза (6) на основу репрезентације (iii) док су 1949 Korevaar, v. Ardenne-Ehrenfest и de Bruijn [14] и 1955 Delange [8] ово доказали непосредно из дефиниције правилно променљиве функције[2].

У погледу минималних претпоставки које обезбеђују егзистенцију граничне вредности (6), други од аутора у [12] примећује (не наводећи доказ), да $h(\lambda)$ постоји *за свако* $\lambda>0$ ако постоји *за две* вредности λ_1 и λ_2 од λ, такве да је количник $\log\lambda_1/\log\lambda_2$ ирационалан и ако $p(x)$ не опада, или, општије, ако задовољава услов

(7) $$\liminf_{x=\infty}\frac{p(\lambda x)-p(x)}{p(x)}\geqslant-\omega(\lambda)\to 0, \quad \lambda\to 1.$$

---

[2] Од интереса је приметити да ако се уместо егзистенције граничне вредности (6) претпостави само ограниченост количника $p(\lambda x)/p(x)$, да тада постоји битна разлика између једностране и обостране ограничености (Delange [7]).

Доказ резултата (ii) 2^0 и 3^0 следи лако из репрезентације (iii) правилно промењљивих функција. Доказаћемо само први; други следи на аналоган начин.

Нека постоји гранична вредност (ii) 2^0. Тада је

$$\log p(x) - \frac{1}{x}\int_0^x \log p(t)\, dt = \alpha + \varepsilon(x), \tag{8}$$

где $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to \infty$. Ако ставимо

$$P(x) = \int_0^x \log p(t)\, dt,$$

(8) се своди на

$$P'(x) - \frac{1}{x} P(x) = \alpha + \varepsilon(x),$$

одакле следи

$$P(x) = P(1)\, x + \alpha x \log x + x \int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt.$$

Дакле,

$$p(x) = e^{P'(x)} = c(x)\, x^\alpha e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt},$$

где је

$$c(x) = e^{P(1) + \alpha + \varepsilon(x)},$$

тј. $p(x)$ има репрезентацију (iii).

Обрнуто, нека је (iii) репрезентација функције $p(x)$. Тада је, због $c(x) \to c$ и $\varepsilon(x) \to 0$ кад $x \to \infty$,

$$\int_0^1 \log \frac{p(x)}{p(tx)}\, dt = -\alpha \int_0^1 \log t\, dt + \int_0^1 \log \frac{c(x)}{c(tx)}\, dt + \int_0^1 \left\{ \int_x^{tx} \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau}\, d\tau \right\} dt =$$

$$= \alpha + \int_0^1 \log \frac{c(x)}{c(tx)}\, dt + \int_0^1 \varepsilon(tx)\, dt = \alpha + o(1)$$

јер су интегранди у последња два интеграла униформно ограничени по x.

3. Iyengar-ов став који смо навели у §1 непосредно следи на основу особина правилно промењљивих функција, наведених у §2, и то као специјалан случај, јер се код Iyengar-ова става, као што ћемо видети, ради о правилно промењљивим функцијама специјалне структуре. Наиме, ако ставимо

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt = \log p(x), \tag{9}$$

сходно дефиницији правилно промењљиве функције, гранична вредност $J(\lambda)$ из Iyengar-ова става постојаће тада и само тада ако је функција $p(x)$, која овде има специјалну структуру, правилно промењљива у тачки $x=\infty$. Ако је то случај, тада из (i) §2 следи да је

$$J(\lambda) = \alpha \log \lambda,$$

где је α индекс правилно промењљиве функције $p(x)$. Индекс α одредићемо на основу (ii) 2^0 § 2; наиме, водећи рачуна о (9) налазимо парцијалном интеграцијом

$$\alpha = \lim_{x=\infty} \int_0^1 \log \frac{p(x)}{p(tx)}\, dt = \lim_{x=\infty} \int_0^1 t\, \frac{\partial}{\partial t} \{\log p(tx)\}\, dt =$$

$$= \lim_{x=\infty} \int_0^1 f(tx)\, dt = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

тј. α је једнака C-збиру функције $f(x)$ кад $x \to \infty$. Да смо, уместо од 2^0, пошли од резултата 3^0 добили би

$$\alpha = \lim x \int_x^\infty \frac{f(t)}{t^2}\, dt,$$

што претставља еквивалентни облик C-збира функције $f(x)$ у тачки $x=\infty$.

Остаје још да се у светлости теорије правилно промењљивих функција осврнемо на Iyengar-ов резултат у погледу минималних услова под којим постоји $J(\lambda)$, које смо навели на крају § 1. И овај је садржан у аналогној примедби коју смо у § 2 учинили у погледу минималних претпоставки под којим постоји гранична вредност $h(\lambda)$. Наиме, Iyengar-ова претпоставка о *ограничености* функције непотребно је строга, јер се, с обзиром на (9), услов (7) своди на

$$\liminf_{x=\infty} \int_x^{\lambda x} \frac{f(t)}{t}\, dt \geqslant -\Omega(\lambda) \to 0, \quad \lambda \to 1, \tag{10}$$

а овај услов је испуњен већ када је функција $f(x)$ *једнострано* ограничена, јер је тада

$$\int_x^{\lambda x} \frac{f(t)}{t} dt > - \int_x^{\lambda x} \frac{M}{t} dt = -M \log \lambda ,$$

па у (10) можемо узети $\Omega(\lambda) = M \log \lambda$.

FONCTIONS À COMPORTEMENT REGULIER ET L'INTÉGRALE DE FRULLANI

Par

S. ALJANČIĆ et J. KARAMATA

L'objet du présent article est d'étudier le rapport entre l'intégrale dite de Frullani

$$\int_0^{\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt \qquad (a > 0 , b > 0)$$

et la classe des fonctions à comportement régulier introduite par le second de deux auteurs [12, 13].

Déjà Cauchy [4 – 6] a montré que l'intégrale de Frullani existe lorsque la fonction $f(x)$ est intégrable dans tout intervalle fini ne contenant pas l'origine et lorsque les limites $\lim\limits_{x=+0} f(x)$ et $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ existent. Iyengar [11] a montré que la sommabilité C de $f(x)$ au voisinage des points 0 et ∞ est *nécessaire* et *suffisante* pourque l'intégrale de Frullani existe pour tout a et b. Agnew [1 – 3] a simplifié la démonstration de Iyengar et Ostrowski [16] a donné une démonstration indépendente, en exprimant d'une forme différente la sommabillité C de $f(x)$.

Une fonction $p(x)$ est dite à comportement régulier au voisinage de l'infini, lorsqu'elle est intégrable et de signe constant dans tout intervalle fini et lorsque la limite

$$h(\lambda) \overset{def}{=} \lim_{x=\infty} \frac{p(\lambda x)}{p(x)} \tag{1}$$

existe pour tout $\lambda > 0$. Dans ce cas cette limite a lieu uniformément par rapport à λ dans tout intervalle fini ne contenant pas l'origine et $h(\lambda)$ est nécessairement de la forme λ^{α}, α étant l'indice de $p(x)$. En outre, toute fonction à comportement régulier à l'indice α peut être mise sous forme canonique, à savoir

$$p(x)=c(x)\,x^{\alpha}\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt},$$

où $c(x)\to c$ et $\varepsilon(x)\to 0$ $(x\to\infty)$. Enfin la forme de la condition la plus indiquée pour l'application en vue du comportement régulier est l'une des deux suivantes:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $p(x)$ à logarithme intégrable soit à comportement régulier au voisinage de l'infini est l'existence de l'une de deux limites

$$\lim_{x=\infty}\int_0^1 \log\frac{p(x)}{p(tx)}\,dt, \tag{2}$$

ou bien

$$\lim_{x=\infty}\int_1^{\infty} \log\frac{p(tx)}{p(x)}\frac{dt}{t^2}, \tag{3}$$

auquel cas la valeur de ces limites est l'indice de $p(x)$.

La relation qui existe entre l'intégrale de Frullani et les fonctions à comportement régulier ressort de l'identité

$$\int_{x'}^{x''}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt=\int_{ax'}^{bx'}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{ax''}^{bx''}\frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Il en résulte, en effet, que l'intégrale de Frullani sera convergeante pour tout a et b lorsque

$$\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

converge lorsque $x\to+0$ et vers ∞. Puisque ces deux cas se ramènent par une simple transformation l'un à l'autre, il suffit d'envisager le cas où $x\to\infty$. En posant alors $a=1$, $b=\lambda$ et

$$\log p(x)=\int_1^x\frac{f(t)}{t}\,dt,$$

on a immédiatement que l'intégrale

$$\int_x^{\lambda x}\frac{f(t)}{t}\,dt=\log\frac{p(\lambda x)}{p(x)}$$

converge pout $\lambda > 0$ lorsque $x \to \infty$ si et seulement si $p(x)$ est à comportement régulier. Dans ce cas

$$\lim_{x=\infty} \int_{x}^{\lambda x} \frac{f(t)}{t}\, dt = \alpha \log \lambda,$$

où α est l'indice de $p(x)$. En appliquant alors l'une des deux conditions (2) et (3), on obtient

$$\alpha = \lim_{x=\infty} \int_0^1 \log \frac{p(x)}{p(tx)}\, dt = \lim_{x=\infty} \int_0^1 t \frac{\partial}{\partial t} \{\log p(tx)\}\, dt =$$

$$= \lim_{x=\infty} \int_0^1 f(tx)\, dt = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt,$$

ou bien, d'une manière semblable,

$$\alpha = \lim_{x=\infty} x \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{t^2}\, dt.$$

Ainsi, on voit que $p(x)$ sera à comportement régulier lorsque $f(x)$ est sommable C, d'où le résultat de Iyengar. Quant à la forme de la constante α, la première est donnée par Agnew et Ostrowski et la seconde par Iyengar.

НАВОДИ

[1] Agnew, R. P. — Limits of integrals. *Duke Math. J.*, **9** (1942), 10–19.

[2] ———— Mean values and Frullani integrals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 237–241.

[3] ———— Frullani Integrals and Variants of the Egorof Theorem. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe. Sci.* **VI** (1954), 12–16.

[4] Cauchy, A. — *J. École Polytech.* (Paris), **12** (1823). *Oeuvres compl.* (2), **I**, 335–229.

[5] ———— *Exercices de Mathémtiques* (1827). *Oeuvres compl.* (2), **VII**, 157.

[6] ———— *Exercices d'Analyse*, **2** (1841). *Oeuvres compl.* (2), **XII**, 416–417.

[7] Delange, H. — Sur deux questions posées par M. Karamata. *Publ. Inst. math. Acad. Serb. Sci.* **VII** (1954), 69–80.

[8] ———— Sur un théorème de Karamata. *Bull. Sci. Math.* (2) **79** (1955), 9–12.

[9] Frullani, G. — Sopre gli integrali Definiti. *Memorie della* Societa Italiana delle Scienze, **20** (1928) 448–467.

[10] Hardy, G. H. — A generalization of Frullani's integral. *Messenger* (2), **34**, 11–18.

[11] I y e n g a r, K. S. K. — On Frullani Integrals. *J. Indian Math. Soc.* (2), **4** (1940), 145—150; прештампано у *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **37** (1941), 9—13.

[12] K a r a m a t a, J. — Sur un mode de croissance regulière des fonctions. *Mathematica* (Cluj), **IV** (1930), 38—53.

[13] ———— Sur un mode de croissance regulière. *Bull. Soc. math. France*, **LXI** (1933), 1—8.

[14] K o r e v a a r, J., A r d e n n e - E h r e n f e s t, T. van and B r u i j n, N. C. de — A note on slowly convergent oscillating functions. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **XXIII** (1949), 77—86.

[15] L e r c h, M. — Sur une extension de la formule de Frullani. *Verhandl. Prager Akad.*, math.-phys. Klasse, $\mathbf{I}_2$ (1891), 123—131.

[16] O s t r o w s k i, A. M. — On some generalizations of the Cauchy-Frullani integral. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **XXXV** (1949), 612—616.

[17] R a c i n e, C. — On Frullani Integrals. *J. Indian Math. Soc.* (2), **11** (1947), 95—97.