Зборник радова С. А. Н. L — Математички институт С. А. Н. књ. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique № 5, 1956

ЂОРЂЕ МУШИЦКИ

ПРИМЕНА PFAFF-ОВЕ МЕТОДЕ У ТЕОРИСКОЈ ФИЗИЦИ

Увод
I Генерализација Pfaff-ове методе и Pfaff-овог принципа
II Примена Pfaff-ове методе у теориској физици

У В О Д

У теориској физици при формулисању физичких закона у диференцијалном облику појављују се линеарне диференцијалне форме. Оне се у општем случају могу изразити у облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i \tag{0.1}$$

где су $X_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$ функције од независно променљивих x_1, $x_2, \ldots, x_n$. С математичке стране први их је систематски проучавао J. Pfaff [1]. Он је увео и системе диференцијалних једначина

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) dx_j = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{0.2}$$

придружених овим формама и по њему су линеарне диференцијалне форме доцније назване Pfaff-ове форме или Pfaff-ови изрази, а одговарајуће диференцијалне једначине Pfaff-ове једначине. На основу веза између њих дао је једну методу за решавање диференцијалних једначина, која се заснива на редукцији придруженог Pfaff-овог израза на погоднији облик. У томе се састоји тзв. Pfaff-ов проблем, на коме су доцније радили многи истакнути математичари, као Frobenius, Darboux, Cartan, Lipschitz, Goursat, Donder, Weber [2].

С друге стране, при испитивању општих физичких законитости врло важну улогу играју општи принципи механике, од којих се неки могу применити и на друге области теориске физике [3], [4], [5]. Прво су се развили општи диференцијални, а нешто доцније и општи интегрални принципи. Од свих прин-

ципа посебан значај има Hamilton-ов принцип, према коме дејство или акција на стварним путањама има стационарну вредност, тј.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \,, \tag{0.3}$$

где је L разлика кинетичке и потенцијалне енергије, тзв. Lagrange-ева функција. Његов значај је пре свега у томе што се он може примењивати у разним гранама теориске физике: у термодинамици [6], [7], електромагнетизму [8], [9], [10], теорији релативности [11], [12] и квантној механици [13], [14]. На тај начин он претставља један од најопштијих закона теориске физике.

Везу између општих закона механике и Pfaff-ових израза установио је први E. Whittaker [15]. Он је показао да Hamilton-ове канонске једначине претстављају Pfaff-ове једначине придружене Pfaff-овом изразу

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt \,. \tag{0.4}$$

На тај начин је показао повезаност диференцијалних једначина кретања са извесним Pfaff-овим изразима. На основу те везе и на основу инваријантности Pfaff-ових једначина он је дао једну методу решавања проблема механике помоћу Pfaff-ових израза. Овом методом проблем канонских трансформација и проблем интеграције Hamilton-ових једначина сведени су на проблем трансформација одговарајућег Pfaff-овог израза, чиме се проблем знатно упрошћава.

Проучавајући дубље улогу Pfaff-ових израза у механици, А. Билимовић [16], [17] је развио примену Pfaff-ове методе Он је показао да се Pfaff-ове једначине (0.2) могу написати у погоднијем облику

$$dX_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{0.5}$$

који омогућава да се непосредно добију Pfaff-ове једначине за сваку независно променљиву x_i. Pfaff-овим једначинама у овом облику дао је дубље тумачење, повезујући их с једне стране са извесним тзв. Pfaff-овим тензором, а с друге стране са чистим прираштајима одговарајућег Pfaff-овог израза [18].

Он је даље показао да се Pfaff-ов израз (0.4), који даје Hamilton-ове једначине, може довести у везу са дејством у Hamilton-овом смислу, показујући да се овај Pfaff-ов израз може

добити из елемента дејства додавањем и одузимањем израза $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i$. Тако трансформисан елемент дејства

$$\Phi = L dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) dt \tag{0.6}$$

који се може написати у облику

$$\Phi = L dt = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H dt \tag{0.7}$$

идентичан је са Pfaff-овим изразом (0.4), а одговарајуће Pfaff-ове једначине су Lagrange-еве и Hamilton-ове једначине. Формалној операцији додавања и одузимања наведеног израза Билимовић [19] је дао дубљи смисао, повезујући је са Hilbert-овим интегралом независности у варијационом рачуну.

На основу оваквог процеса добијања диференцијалних једначина кретања из овако трансформисаног елемента дејства као Pfaff-овог израза, Билимовић је формулисао један општи принцип, који је назвао Pfaff-ов општи принцип механике [16]. Доказавши да су Pfaff-ове једначине еквивалентне услову да је варијација одговарајућег Pfaff-овог израза једнака нули, тј.

$$\delta \Phi = 0 \tag{0.8}$$

повезао је Pfaff-ов принцип са d'Alembert-Lagrange-евим и Hamilton-овим принципом. Ову Pfaff-ову методу применио је потом на низ проблема из теориске механике [20], небеске механике [21], [22], [23] и геометриске оптике [24].

Т. Анђелић је употребио ову методу у механици чврстих тела [25], механици флуида [26] и општој механици континуума [27] и показао је да се одговарајуће диференцијалне једначине кретања могу добити применом Pfaff-овог принципа. При томе се у механици континуума мора поћи од елемента дејства јединице масе и тада се диференцијалне једначине кретања континуума могу добити из погодно трансформисаног елемента дејства. На тај начин је проширио Pfaff-ову методу на остале гране механике показујући да је Pfaff-ов принцип заиста општи принцип целокупне механике.

У овом раду показаћемо да се Pfaff-ова метода може генерализати и примењивати и у теоријској физици. У том циљу извршићемо генерализацију Pfaff-ових израза, Pfaff-ових једначина и самог Pfaff-овог принципа и применићемо потом генерализан Pfaff-ов прицип на разне области теориске физике, полазећи доследно од величина аналогних кинетичкој и потенцијалној енергији. На тај начин показаћемо да се генерализан Pfaff-ов принцип заиста може сматрати као један општи принцип теориске физике, који обједињује разне њене гране у једну јединствену целину.

I. ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА PFAFF-ОВЕ МЕТОДЕ И PFAFF-ОВОГ ПРИНЦИПА

1. ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА PFAFF-ОВИХ ИЗРАЗА И PFAFF-ОВИХ ЈЕДНАЧИНА

ГЕНЕРАЛИСАНИ PFAFF-ОВИ ИЗРАЗИ. У досадашњим применама Pfaff-ове методе постојала је само једна независно променљива — време t. Међутим, у многим проблемима теориске физике јавља се више независно променљивих, већином време t и просторне координате x, y, z. Стога се мора извршити гонерализација Pfaff-ове методе и у том циљу генералисаћемо Pfaff-ове изразе, Pfaff-ове једначине и сам Pfaff-ов принцип. При томе треба имати у виду да време и просторне координате немају исту улогу у теориској физици, стога ћемо разликовати две врсте независно променљивих. Независно променљиве сличне времену називаћемо просто независно променљивима, а независно променљиве сличне просторним координатама називаћемо параметрима.

Претпоставимо да има m независно променљивих $t_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ и k параметара ξ_s $(s = 1,2, \ldots, k)$. Нека су x_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ функције од ових променљивих t_j и ξ_s

$$x_i = x_i (t_j, \xi_s) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

и обележимо са x_{is} парцијални извод функције x_i по ξ_s

$$x_{is} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s} \tag{1.2}$$

Посматрајмо сад извесну функцију φ од променљивих x_i, ξ_s и x_{is}

$$\varphi = \varphi (x_i, \xi_s, x_{is}). \tag{1.3}$$

С обзиром на везе (1.1) функција φ је у крајњој линији функција само од t_j и ξ_s, што ћемо назначити звездицом:

$$\varphi = \varphi^* (t_j, \xi_s). \tag{1.4}$$

Дефинишимо сад варијациони извод функције φ по променљивој x_i обрасцем

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{is}} \right). \tag{1.5}$$

Зависност функције φ од променљивих x_i, ξ_s и x_{is} омогућава да се експлицитно изведу назначене операције, а одавде видимо да сам симбол $\frac{\delta \varphi}{\delta x_i}$ имплицитно садржи у себи зависност функције φ од променљивих ξ_s и t_j.

Из саме дефиниције варијационог извода следују ове две важне особине:

$$\frac{\delta (\varphi + \psi)}{\delta x_i} = \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} + \frac{\delta \psi}{\delta x_i} \tag{1.6}$$

и

$$\frac{\delta(\varphi\psi)}{\delta x_l} = \frac{\ddot{o}\varphi}{\delta x_l}\psi + \psi\frac{\delta\psi}{\delta x_i} - \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_s}\frac{\partial\psi}{\partial x_{is}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{is}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_s}\right). \quad (1.7)$$

Одавде видимо да се варијациони извод производа двеју функција у општем случају не покорава обичном правилу за извод производа.

Дефинишимо сад варијациони диференцијал на следећи начин. Ставимо по дефиницији

$$\delta t_j = dt_j \quad (1.8)$$

и

$$\delta x_l = \sum_{j=1}^{m}\frac{\delta x_i}{\delta t_j}\delta t_j. \quad (1.9)$$

Варијациони диференцијал функције φ тада дефинишемо обрасцем

$$\delta\varphi = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta\varphi}{\delta x_i}\delta x_i. \quad (1.10)$$

Овај израз има толико чланова колико има променљивих x_i, независно од броја параметара ξ_s.

Напоменимо да је варијациони извод примарни појам, а варијациони диференцијал секундарни, те је варијациони извод битно различит појам од количника двају варијационих диференцијала. Пошто у нашем излагању нећемо нигде употребљавати количнике варијационих диференцијала, нећемо правити разлике у ознакама.

Према обрасцима (1.9) и (1.10) имамо, изменивши ред сабирања

$$\delta\varphi = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta\varphi}{\delta x_i}\frac{\delta x_i}{\delta t_j}\right)\delta t_j .$$

Ставимо сад по дефиницији

$$\frac{\delta^*\varphi}{\delta t_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta\varphi}{\delta x_i}\frac{\delta x_i}{\delta t_j} \quad (1.11)$$

па добијамо

$$\delta\varphi = \sum_{j=1}^{m}\frac{\delta^*\varphi}{\delta t_j}\delta t_j. \quad (1.12)$$

Образац (1.11) одговора правилу за посредно диференцирање функције, а образац (1.12) правилу за тотално диференцирање. При томе се последњи израз може саставити непосредно према обрасцу (1.4).

Посматрамо сад извесне функције $X_l\,(l = 1, 2, \ldots, n)$ од променљивих x_i, ξ_s и x_{is}:

$$X_l = X_l(x_i, \xi_s, x_{is}) = X_l^*(t_j, \xi_s) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \quad (1.13)$$

и помоћу њих формирајмо линеарну диференцијалну форму

$$\Phi = \sum_{l=1}^{n} X_l\,\delta x_l . \quad (1.14)$$

Овај израз звaћемо генералисани Pfaff-ов израз. У случају да нема параметара ξ_s, тј. да је $k = 0$, варијациони изводи своде се на обичне парцијалне изводе, варијациони диференцијали на обичне тоталне диференцијале, а генералисани Pfaff-ов израз на обичан Pfaff-ов израз.

ГЕНЕРАЛИСАНЕ PFAFF-ОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ. — Формирајмо сад варијациони извод функције Ф по променљивој x_i. Према дефиницији варијационог извода (1.5) имамо, изменивши ред сабирања

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{is}}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_{is}}\right)\right\}\delta x_j ,$$

тј.

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta X_j}{\delta x_i}\delta x_j . \tag{1.15}$$

С друге стране, према дефиницији варијационог диференцијала (1.10) имамо

$$\delta X_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta X_i}{\delta x_j}\delta x_j .$$

Одузимањем ових једначина добијамо

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} - \delta X_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\delta X_j}{\delta x_i} - \frac{\delta X_i}{\delta x_j}\right)\delta x_j . \tag{1.16}$$

Помножимо ове једначине са δx_i и саберимо добијене једначине за све вредности индекса i, па добијамо

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} - \delta X_i\right)\delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\delta X_j}{\delta x_i} - \frac{\delta X_i}{\delta x_j}\right)\delta x_j \delta x_i .$$

Ако у другом члану двоструке суме пермутујемо индексе i и j и изменимо ред сабирања, добијамо израз једнак првом члану, те је горњи израз идентички једнак нули:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} - \delta X_i\right)\delta x_i \equiv 0. \tag{1.17}$$

Због међусобне независности променљивих x_i одавде следује да сви изрази у заградама морају бити једнаки нули:

$$\delta X_i = \frac{\delta \Phi}{\delta x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{1.18}$$

Према обрасцу (1.16) ове једначине можемо написати и у облику

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\delta X_j}{\delta x_i} - \frac{\delta X_i}{\delta x_j}\right)\delta x_j = 0. \tag{1.19}$$

Једначине (1.18) или (1.19) зваћемо генерализане Pfaff-ове једначине. У случају да нема параметара ξ_s, тј. да је $k=0$, генерализане Pfaff-ове једначине своде се на обичне Pfaff-ове једначине.

ОСОБИНЕ ГЕНЕРАЛИСАНИХ PFAFF-ОВИХ ЈЕДНАЧИНА. — Генерализане Pfaff-ове једначине имају сличне особине као и обичне Pfaff-ове једначине.

а) Два Pfaff-ова израза сматраћемо еквивалентним ако доводе до еквивалетних Pfaff-ових једначина, при чему ћемо еквивалентност обележавати знаком $\approx$. Ако сад посматрамо Pfaff-ове изразе Φ и $k\Phi$, где је k константа, у Pfaff-овим једначинама које одговарају Pfaff-овом изразу $k\Phi$ скраћује се k, те су оба система Pfaff-ових једначина еквивалентна:

$$\Phi \approx k\Phi . \tag{1.20}$$

Генерализани Pfaff-ови изрази који се разликују константним множитељем еквивалентни су.

b) Ако посматрамо Pfaff-ове изразе Φ и $\Phi+\delta F$, где је F ма каква функција од истих променљивих овај други Pfaff-ов израз има облик

$$\Phi+\delta F=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+\frac{\delta F}{\delta x_i}\right)\delta x_i .$$

Одговарајуће Pfaff-ове једначине су

$$\delta\left(X_i+\frac{\delta F}{\delta x_i}\right)=\frac{\delta}{\delta x_i}(\Phi+\delta F). \tag{1.21}$$

Пошто је

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\frac{\delta F}{\delta x_j}=\frac{\delta}{\delta x_j}\frac{\delta F}{\delta x_i}$$

имамо

$$\delta\frac{\delta F}{\delta x_i}=\frac{\delta}{\delta x_i}(\delta F),$$

те су оба система Pfaff-ових једначина еквивалентна:

$$\Phi\approx\Phi+\delta F. \tag{1.22}$$

Генерализани Pfaff-ови изрази који се разликују за варијациони диференцијал било какве функције еквивалентни су.

c) У Pfaff-овом изразу

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}X_i\,\delta x_i,$$

чије су Pfaff-ове једначнне

$$\delta X_i=\frac{\delta\Phi}{\delta x_i}\quad(i=1,2,\ldots,n), \tag{1.23}$$

извршимо смену променљивих

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.24}$$

тада Pfaff-ов израз добија облик

$$\Phi^* = \sum_{j=1}^{n} Y_j \delta y_j$$

чије су одговарајуће Pfaff-ове једначине

$$\delta Y_j = \frac{\delta \Phi^*}{\delta y_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.25}$$

Према начину формирања Pfaff-ових једначина из одговарајућег Pfaff-овог израза очевидно је да је систем Pfaff-ових једначина (1.25) еквивалентан систему Pfaff-ових једначина (1.23), што се може и непосредно доказати.

Системи генералисаних Pfaff-ових једначина за полазни и за трансформисани генералисани Pfaff-ов израз еквивалентни су.

Ова особина је битна у Pfaff-овој методи и према њој није потребно вршити трансформацију Pfaff-ових једначина, већ само одговарајућег Pfaff-овог израза.

2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ФИЗИЧКИХ ПОЈАВА КАО PFAFF-ОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

ЕЛЕМЕНТ ДЕЈСТВА КАО PFAFF-ОВ ИЗРАЗ. — У случају да се физичке појаве могу изразити помоћу поља, независно променљиве су просторне координате x, y, z и време t, те елемент дејства има облик

$$dW = (T - U)\, dx\, dy\, dz\, dt, \tag{2.1}$$

где је T кинетичка, а U потенцијална енергија јединице запремине.

Посматрајмо сад елемент дејства јединице запремине као Pfaff-ов израз

$$\Phi = \frac{dW}{dt} = (T - U)\, dt, \tag{2.2}$$

Ако уведемо Lagrange-еву функцију

$$L = T - U \tag{2.3}$$

и узмемо у обзир да према обрасцу (1.8) можемо ставити $\delta t = dt$, горњи израз можемо написати у облику

$$\Phi = L\, \delta t. \tag{2.4}$$

Нека се физичко поље може описати помоћу извесних величина q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ које су функције времена и положаја

$$q_i = q_i(t, x, y, z) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Ако парцијалне изводе функције q_i обележимо са

$$q_{it} = \frac{\partial q_i}{\partial t}, \qquad q_{ix} = \frac{\partial q_i}{\partial x}, \tag{2.6}$$
$$q_{iy} = \frac{\partial q_i}{\partial y}, \qquad q_{iz} = \frac{\partial q_i}{\partial z}.$$

Lagrange-ева функција зависи експлицитно од свих наведених величина, тј.

$$L = L(t, x, y, z;\ q_i;\ q_{it}, q_{ix}, q_{iy}, q_{iz}). \tag{2.7}$$

Међутим, због зависности (2.5) L у крајњој линији зависи само од времена и просторних координата:

$$L = L^*(t, x, y, z). \tag{2.8}$$

Овде улогу независно променљивих t_j игра време t, а улогу параметара ξ_s просторне координате x, y, z. Поређењем образаца (1.3) и (2.7) видимо да улогу променљивих x_i играју q_i, q_{it} $(i=1, 2, \ldots, n)$ и t.

Трансформишимо сад елемент дејства (2.4) додавањем и одузимањем израза

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_{it}} \delta q_i .$$

Пошто је q_i функција од времена и просторних координата, а просторне координате сматрамо као параметре, према дефиницији варијационог диференцијала (1.10) имамо

$$\delta q_i = \frac{\delta q_i}{\delta t} \delta t = q_{it} \delta t, \tag{2.9}$$

па се трансформисан елемент дејства као Pfaff-ов израз може написати у облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_{it}} \delta q_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_{it}} q_{it} - L \right) \delta t. \tag{2.10}$$

Независно променљиве овог Pfaff-овог израза су q_i, q_{it} $(i=1, 2, \ldots, n)$ и t.

EULER-LAGRANGE–EВЕ ЈЕДНАЧИНЕ. — Формирајмо сад Pfaff-ове једначине (1.18) које одговарају Pfaff-овом изразу (2.10). За променљиве q_i оне гласе

$$\delta \frac{\delta L}{\delta q_{it}} = \frac{\delta \Phi}{\delta q_i}. \tag{2.11}$$

Пошто је $\frac{\delta L}{\delta q_{it}}$ у крајњој линији функција само од времена и просторних координата, на основу обрасца (1.12) ове се једначине могу написати у облику

$$\frac{\delta^*}{\delta t}\left(\frac{\delta L}{\delta q_{it}}\right)\delta t - \frac{\delta L}{\delta q_i}\delta t,$$

а одавде добијамо

$$\frac{\delta^*}{\delta t}\left(\frac{\delta L}{\delta q_{it}}\right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0. \tag{2.12}$$

То су Euler-Lagrange-еве једначине, а у развијеном облику оне гласе

$$\frac{\partial^*}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{it}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{ix}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{iy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{iz}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{2.13}$$

Имајући у виду да су у Pfaff-овом изразу (2.10) коефицијенти уз δq_{it} једнаки нули, Pfaff-ове једначине за променљиве q_i имају облик

$$\delta 0 \equiv 0 = \frac{\delta \Phi}{\delta q_{it}},$$

а то су идентичности.

Pfaff-ова једначина за променљиву t гласи

$$-\delta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta L}{\delta q_{it}}q_{it} - L\right) = \frac{\delta \Phi}{\delta t}.$$

и у развијеном облику

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\delta^*}{\delta t}\left(\frac{\delta L}{\delta q_{it}}\right) - \frac{\delta L}{\delta q_i}\right\}\delta q_i = 0,$$

а то је на основу Euler-Lagrange-евих једначина идентичност.

HAMILTON-OBE ЈЕДНАЧИНЕ. — Уведимо сад генералисане импулсе, дефинисане обрасцима

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta q_{it}} = \frac{\partial L}{\partial q_{it}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.14}$$

Помоћу ових једначина можемо величине q_{it} заменити величинама p_i. Тада се трансформисани елемент дејства (2.10) може написати у облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t, \tag{2.15}$$

где смо увели Hamilton-ову функцију

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{it} - L. \tag{2.16}$$

Независно промењиве овог Pfaff-овог израза су q_i, p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ и t.

Pfaff-ове једначине за промењиве q_i гласе

$$\delta p_i = \frac{\delta \Phi}{\delta q_i}. \tag{2.17}$$

Одавде добијамо

$$\frac{\delta p_i}{\delta t} \delta t = - \frac{\delta H}{\delta q_i} \delta t,$$

а отуда

$$\frac{\delta p_i}{\delta t} = - \frac{\delta H}{\delta q_i}. \tag{2.18}$$

Пошто су коефицијенти уз δp_i једнаки нули, Pfaff-ове једначине за промењиве p_i имају облик

$$\delta 0 \equiv 0 = \frac{\delta \Phi}{\delta p_i}. \tag{2.19}$$

Одавде добијамо

$$\frac{\delta q_i}{\delta t} \delta t - \frac{\delta H}{\delta p_i} \delta t = 0,$$

а отуда

$$\frac{\delta q_i}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta p_i}. \tag{2.20}$$

Једначине (2.18) и (2.20) су Hamilton ове једначине, а у развијеном облику оне гласе

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{ix}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{iy}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial q_{iz}}\right) \tag{2.21}$$

и

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{2.22}$$

Pfaff-ова једначина за променљиву t гласи

$$-\delta H = \frac{\delta \Phi}{\delta t},$$

а њен развијени облик

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta H}{\delta q_i}\frac{\delta q_i}{\delta t} + \frac{\delta q_i}{\delta p_i}\frac{\delta p_i}{\delta t}\right)\delta t = 0$$

на основу Hamilton-ових једначина даје идентичност.

3. ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА PFAFF-ОВОГ ПРИНЦИПА

ФОРМУЛАЦИЈА ОПШТЕГ PFAFF-ОВОГ ПРИНЦИПА. — Пошто смо видели да се диференцијалне једначине физичких појава могу добити као генералисане Pfaff-ове једначине трансформисаног елемента дејства јединице запремине, овај начин добијања диференцијалних једначина физичких појава омогућава формулацију оваквог општег принципа теориске физике:

Физичке појаве врше се према генералисаним Pfaff-овим једначинама, ако за генералисан Pfaff-ов израз узмемо трансформисан елемент дејства јединице запремине.

Овај општи принцип зваћемо Pfaff-ов принцип теориске физике и он се може примењивати у свим оним гранама теориске физике где постоје величине аналогне кинетичкој и потенцијалној енергији.

ВЕЗА PFAFF-ОВОГ ПРИНЦИПА СА HAMILTON-ОВИМ ПРИНЦИПОМ. — Уведимо пре свега појам генералисане варијације. Ако су $\delta\varphi$ и $\delta'\varphi$ два могућа варијациона диференцијала било какве величине φ, њихову разлику дефинисаћемо као генералисану варијацију и означићемо је симболом $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \delta'\varphi - \delta\varphi. \tag{3.1}$$

Према самој дефиницији види се да генералисана варијација стоји у таквом односу према варијационом диференцијалу као обична варијација према обичном диференцијалу. Стога за генералисане варијације важе слична правила као и за обичне варијације.

Потражимо сад генералисану варијацију ма каквог генералисаног Pfaff-овог израза (1.14). Пошто су величине x_i међусобно независне, имамо

$$\Delta\Phi = \sum_{i=1}^{n}\Delta X_i\,\delta x_i + \sum_{i=1}^{n} X_i\,\Delta\delta x_i. \tag{3.2}$$

Овде према правилима варирања имамо

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\delta X_i}{\delta x_j}\Delta x_j,$$

а због независности операција варирања и варијационог диференцирања је

$$\Delta \delta x_i = \delta \Delta x_i$$

па добијамо

$$\Delta \Phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta X_i}{\delta x_j} \Delta x_j \delta x_i + \sum_{i=1}^{n} X_i \delta \Delta x_i. \tag{3.3}$$

Ако у првом члану пермутујемо индексе i и j и изменимо ред сабирања и ставимо

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta X_j}{\delta x_i} \delta x_j = \frac{\delta \Phi}{\delta x_i}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \delta \Delta x_i = \delta \sum_{i=1}^{n} X_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \delta X_i \Delta x_i,$$

претходни израз може се написати у облику

$$\Delta \Phi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} - \delta X_i \right) \Delta x_i + \delta \sum_{i=1}^{n} X_i \Delta x_i. \tag{3.4}$$

Овај израз претставља такође један генералисан Pfaff-ов израз. На основу особине да су генералисани Pfaff-ови изрази који се разликују за варијациони диференцијал било какве функције еквивалентни, ако изоставимо други члан добијамо еквивалентан Pfaff-ов израз

$$\Delta \Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} - \delta X_i \right) \Delta x_i .$$

Овај израз на основу генералисаних Pfaff-ових једначина (1.18) једнак је нули, те имамо

$$\Delta \Phi \approx 0. \tag{3.5}$$

Важи и обрнут став: из услова (3.5), због независности варијација Δx_i, следују генералисане Pfaff-ове једначине.

Према томе, генералисане Pfaff-ове једначине еквивалентне су услову $\Delta \Phi \approx 0$.

Уведимо сад дејство у Hamilton-овом смислу

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V} L \, dV \, dt \tag{3.6}$$

и израчунајмо његову генералисану варијацију. Ако узмемо у обзир да се ред варирања и интегрирања може изменити и да се

варирање не односи на независно променљиве, ΔW се може написати у облику

$$\Delta W = \int_{t^2}^{t_1} \int_{V} \Delta (L\, dt)\, d\, V.$$

Узимајући према Pfaff-овом принципу елемент дејства јединице запремине као Pfaff-ов израз

$$\Phi = L\, \delta t = L\, dt$$

добијамо

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V} \Delta \Phi\, d\, V. \tag{3.7}$$

Ако је задовољен Pfaff-ов принцип, из њега следује $\Delta \Phi \approx 0$, а тада се из последњег обрасца добија Hamilton-ов принцип

$$\Delta W = 0. \tag{3.8}$$

Важи и обрнут став: из Hamilton-овог принципа, због произвољности граница интеграције t_1 и t_2, следује $\Delta \Phi = 0$, а отуда и сам Pfaff-ов принцип.

Повезаност ова два принципа види се и из тога што оба принципа доводе до истих Euler-Lagrange-ових једначина.

II. ПРИМЕНА PFAFF-ОВЕ МЕТОДЕ У ТЕОРИСКОЈ ФИЗИЦИ

4. ПРИМЕНА PFAFF-ОВЕ МЕТОДЕ НА ЕЛАСТИЧНЕ ТАЛАСЕ

ЈЕДНАЧИНА ТРЕПЕРЕЊА ЖИЦЕ. — Најпростији случај еластичних таласа имамо при треперењу жице. Посматрајмо трансверзалне осцилације жице и за правац X осе узмимо правац жице у мировању. Елонгација делића, коју ћемо означити са ψ, зависи од координате x и времена t:

$$\psi = \psi (x, t)\,. \tag{4.1}$$

Ако уведемо ознаке

$$\psi_t = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \qquad \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \psi_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{4.2}$$

кинетичка енергија елемента жице dx је

$$d\, T' = \frac{1}{2} \rho\, q\, dx \cdot \psi_t{}^2,$$

где је ρ густина, а q попречни пресек жице. Кинетичка енергија јединице запремине тада износи

$$T = \frac{d\,T'}{d\,V} = \frac{1}{2}\rho\,\psi_t{}^2\,. \tag{4.3}$$

Сила која дејствује на делиће жице при малим елонгацијама је

$$F = -q\,P\,\psi_x\,,$$

где је P напон, а укупна сила на елемент жице dx износи

$$d\,F = -q\,P\,dx\,\psi_{xx}\,, \tag{4.4}$$

Потенцијална енергија овог елемента жице тада има вредност

$$d\,U' = -\int_0^{\psi} d\,F\cdot d\,\psi = \int_0^{\psi} q\,P\,dx\,\psi_{xx}\cdot\psi_x\,dx\,,$$

тј.

$$d\,U' = \frac{1}{2}P\,q\,dx\cdot\psi_x{}^2\,,$$

а потенцијална енергија јединице запремине је

$$U = \frac{dU'}{dV} = \frac{1}{2}P\,\psi_x{}^2. \tag{4.5}$$

Елемент дејства јединице запремине, сматран као Pfaff-ов израз, тада има вредност

$$\Phi' = L\,\delta t = \frac{1}{2}(\rho\psi_t{}^2 - P\,\psi_x{}^2)\,\delta t\,. \tag{4.6}$$

Сматрајући да је у посматраном елементу жице густина константа, деобом горњег израза са $^1/_2\rho$ добијамо еквивалентан Pfaff-ов израз, који можемо написати у облику

$$\Phi = (\psi_t{}^2 - v^2\psi_x{}^2)\,\delta t \equiv L_1\,\delta t, \tag{4.7}$$

где је

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}\,. \tag{4.8}$$

Трансформишимо овај израз додавањем и одузимањем израза

$$\frac{\delta L_1}{\delta\psi_t}\,\delta\psi = 2\,\psi_t\,\delta\psi$$

чиме добијамо, имајући у виду да је $\delta\psi = \psi_t\,\delta t$,

$$\Phi = 2\,\psi_t\,\delta\psi - (\psi_t{}^2 + v^2\psi_x{}^2)\,\delta t. \tag{4.9}$$

Pfaff-ова једначина за променљиву ψ гласи

$$\delta(2\psi_t) = \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\,. \tag{4.10}$$

Пошто је

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} = \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_x}\right) = 2v^2\psi_{xx}\delta t\,,$$

претходна једначина добија облик

$$2\psi_{tt}\delta t = 2v^2\psi_{xx}\delta t\,,$$

а одавде добијамо, пишући једначину у уобичајном облику,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{4.11}$$

То је једначина трансверзалних таласа који настају треперењем жице и који се простиру кроз жицу брзином $v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$.

ЈЕДНАЧИНА ЕЛАСТИЧНИХ ТАЛАСА. — Посматрајмо сад општији случај еластичних таласа. Претпоставимо да су деформације врло мале и да важи Hooke-ов закон, тако да је сила пропорционална градијенту елонгације

$$\vec{F} = -q\eta\,\mathrm{grad}\,\psi\,, \tag{4.12}$$

где фактор сразмерности η зависи од природе средине и врсте таласа.

Тада кинетичка и потенцијална енергија јединице запремине на основу образаца (4.3) и (4.5) имају вредност

$$T = \frac{1}{2}\rho\psi_t^2 \qquad U = \frac{1}{2}\eta(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)\,. \tag{4.13}$$

Тада је елемент дејства јединице запремине

$$\Phi' = \frac{1}{2}\{\rho\psi_t^2 - \eta(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)\}\delta t$$

и може се на сличан начин као и раније трансформисати у еквивалентан Pfaff-ов израз

$$\Phi = 2\psi_t\,\delta\psi - \{\psi_t^2 + v^2(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)\}\delta t\,, \tag{4.14}$$

где је

$$v = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}}\,. \tag{4.15}$$

Pfaff-ова једначина за променљиву ψ има исти облик као и раније

$$\delta(2\psi_t) = \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\,,$$

а у развијеном облику она гласи

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{4.16}$$

То је једначина еластичних таласа, који се простиру брзином $v=\sqrt{\frac{\eta}{\rho}}$.

5. ПРИМЕНА PFAFF-ОВЕ МЕТОДЕ У ТЕРМОДИНАМИЦИ

ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ТЕРМОДИНАМИКЕ. — Посматрајмо механичко-термодинамичке промене неке средине у стању идеалног флуида, као нпр. промене извесне количине идеалног гаса. Уочимо неки врло мали елемент запремнне ΔV са елементом масе $\Delta m=\rho\Delta V$, где је ρ густина. Пошто је посматрани елемент запремине врло мали, можемо сматрати да се механичко-термодинамичке величине споро мењају у његовој унутрашњости.

Уведимо сад специфичну запремину, коју означимо са ϑ

$$\vartheta=\frac{\Delta V}{\Delta m}=\frac{1}{\rho} \tag{5.1}$$

и претпоставимо да између притиска P, специфичне запремине ϑ и апсолутне температуре T постоји веза

$$f(P,\ \vartheta,\ T)=0. \tag{5.2}$$

Ова једначина претставља једначину стања средине и на основу ње притисак можемо сматрати као функцију од специфичне запремине и температуре.

Пошто је положај средине одређен просторним координатама x, y, z, а термодинамичко стање притиском P и температуром T, ове величине можемо сматрати генералисаним координатама средине. Место температуре можемо увести једну нову величину. Имајући у виду да је температура средине у тесној вези са брзинама кретања молекула, према Helmholtz-у можемо температуру сматрати као временски извод једне променљиве a:

$$T=\frac{da}{dt}. \tag{5.3}$$

На основу горе реченог генералисаним координатама можемо сматрати и величине x, y, z, ϑ и a.

Формирајмо сад елемент дејства јединице маса и сматрајмо га као Pfaff-ов израз

$$\Phi=L\,dt=(T-U)\,dt, \tag{5.4}$$

где се T и U односе на јединицу масе. Кинетичка енергија састоји

се из механичке кинетичке енергије $1/2\ v^2$ и тзв. слободне енергије — F:

$$T = \frac{1}{2} v^2 - F \tag{5.5}$$

при чему је слободна енергија дефинисана обрасцем

$$F = E - T S,$$

где је E унутрашња енергија, а S ентропија. При томе се све ове величине односе на јединицу масе.

Потенцијална енергија састоји се из еквивалентног рада против запреминских и површинских сила и из топлотне енергије. Потенцијална енергија која потиче од рада против запреминских сила је

$$U_1 = -\int \vec{F}.\, d\vec{r}\,, \tag{5.6}$$

где је $\vec{F}$ сила на јединицу масе.

Потенцијална енергија која потиче од рада против сила притиска при померању за $\vec{dr}$ је

$$\frac{1}{\Delta m}\left(\int_{\Delta s} P\, d\vec{S}\right)\cdot \vec{dr} = \frac{1}{\rho \Delta V}\left(\int_{\Delta V} \operatorname{grad} P\, dV\right)\cdot \vec{dr}\,,$$

где је ΔS површина која опкољава посматрани елемент запремине ΔV. Узимајући да се grad P у унутрашњости уоченог елемента запремине може сматрати константним, укупну потенцијалну енергију ове врсте можемо написати у облику

$$U_2 = \int \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P \cdot \vec{dr}\,. \tag{5.7}$$

Пошто је промена специфичне запремине при померању за $\vec{dr}$

$$d\vartheta = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{dr}}{\Delta m}$$

горњи израз можемо написати у облику

$$U_2 = \int P\, d\vartheta. \tag{5.8}$$

Потенцијална енергији која је еквивалентна топлотној енергији има вредност

$$U_3 = -\int T\, dS, \tag{5.9}$$

а пошто је према обрасцу (5.3)

$$T\,dS = \dot{a}\,dS = \dot{S}\,da,$$

претходни израз можемо написати и у облику

$$U_3 = -\int \dot{S}\,da. \tag{5.10}$$

Тада је укупна потенцијална енергија

$$U = U_1 + U_2 + U_3. \tag{5.11}$$

Напоменимо да је други члан U_2 механичко-термодинамичке природе, јер померање средине под утицајем силе притиска изазива промену запремине, а то према једначини стања (5.2) изазива и промену температуре.

Трансформишимо сад елемент дејства јединице масе (5.4) додавањем и одузимањем израза

$$\operatorname{grad}_{\nu} T \cdot \vec{dr} + \frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\,da,$$

Ако уведемо генералисане импулсе

$$\vec{p} = \operatorname{grad}_{\nu} T, \qquad p_a = \frac{\partial T}{\partial \dot{a}}, \qquad p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \equiv 0\,. \tag{5.12}$$

трансформисан елемент дејства можемо написати у облику

$$\Phi = \vec{p} \cdot \vec{dr} + p_a\,da - H\,dt \tag{5.13}$$

где је

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} + p_a \dot{a} - T + U\,. \tag{5.14}$$

Pfaff-ове једначине за променљиве $\vec{r}$ и $\vec{p}$ гласе

$$\vec{dp} = \operatorname{grad}_{r} \Phi, \quad d\,0 \equiv 0 = \operatorname{grad}_{p} \Phi \tag{5.15}$$

а одавде добијамо

$$\frac{\vec{dp}}{dt} = -\operatorname{grad}_{r} H, \quad \frac{\vec{dr}}{dt} = \operatorname{grad}_{p} H. \tag{5.16}$$

Имајући у виду да се све горње величине односе на јединицу масе и да T не зависи од $\vec{r}$, а

$$\operatorname{grad} U = -\vec{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P,$$

прва једначина у развијеном облику гласи

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P, \tag{5.17}$$

а то је диференцијална једначина кретања идеалног флуида. Друга једначина даје само дефиницију импулса $\vec{p}$.

Pfaff-ове једначине за промењљиве a и p_a гласе

$$dp_a = \frac{\partial \Phi}{\partial a}, \quad d0 \equiv 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_a}, \tag{5.18}$$

а одавде добијамо

$$\frac{dp_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial a}, \qquad \frac{da}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a}. \tag{5.19}$$

Пошто T не зависи од a, док U не зависи од p_a, а

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -\dot{S},$$

узимајући за почетну вредност ентропије нулу, из горњих једначина добијамо

$$p_a = \frac{\partial T}{\partial T} = S, \qquad \frac{\partial T}{\partial p_a} = 0. \tag{5.20}$$

Pfaff-ове једначине за промењљиве ϑ и p_ϑ гласе

$$d0 \equiv 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \qquad d0 \equiv 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\vartheta} \tag{5.21}$$

а отуда

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = 0. \tag{5.22}$$

Имајући у виду да U не зависи од p_ϑ, а

$$\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial T}{\partial \vartheta} + P$$

добијамо

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = P, \qquad \frac{\partial T}{\partial p_\vartheta} = 0. \tag{5.23}$$

Пошто кинетичка енергија не зависи од $\vec{r}$, p_a и p_ϑ, можемо је сматрати функцијом од $\vec{v}$, T и ϑ, те имамо

$$dT = \operatorname{grad}_{\vec{v}} T \cdot d\vec{v} + \frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial T}{\partial T} dT,$$

а на основу образаца (5.20) и (5.23) добијамо

$$dT = \vec{p} \cdot d\vec{v} + P d\vartheta + S d T. \tag{5.24}$$

Овај образац претставља генерализацију диференцијала механичке кинетичке енергије. Напишимо га у облику

$$d(T - TS) = \vec{p} \cdot d\vec{v} + P d\vartheta - T dS,$$

а пошто је

$$T - TS = \frac{1}{2} v^2 - E,$$

добијамо

$$dE = T dS - P d\vartheta. \tag{5.25}$$

Овај образац изражава први и други принцип термодинамике, а једначине (5.20) и (5.23) су, дакле, еквивалентне принципима термодинамике.

6. ПРИМЕНА PFAFF-ОВЕ МЕТОДЕ У ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМУ

MAXWELL-ОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЗА ВАКУУМ. — Посматајмо електромагнетно поље у вакууму и означимо са $\vec{E}$ јачину електричног, а са $\vec{H}$ јачину магнетног поља. Да бисмо формирали елемент дејства морамо наћи величине аналогне кинетичкој и потенцијалној енергији. Пошто енергија електричног поља потиче услед самих наелектрисања и зависи само од њиховог положаја, а енергија магнетног поља потиче услед кретања наелектрисања и зависи и од њихове брзине, електрична енергија одговара потенцијалној, а магнетна енергија кинетичкој енергији.

Кинетичка односно магнетна енергија јединице запремине је

$$T = \frac{1}{8\pi} H^2, \tag{6.1}$$

а потенцијална, односно електрична енергија јединице запремине

$$U = \frac{1}{8\pi} E^2. \tag{6.2}$$

Формирајмо сад елемент дејства јединице запремине као Pfaff-ов израз

$$\Phi = L \delta t = \frac{1}{8\pi}(H^2 - E^2)\delta t. \tag{6.3}$$

Изразимо сад $\vec{E}$ и $\vec{H}$ помоћу скаларног и векторског потенцијала

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \tag{6.4}$$

где је c брзина светлости. Из ових образаца непосредно следује

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{6.5}$$

и

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0\,, \tag{6.6}$$

а то су две Maxwell-ове једначине,

Сматрајмо сад компоненте векторског потенцијала A_1, A_2, A_3 и скаларни потенцијал φ као четири непознате функције времена и положаја и трансформишимо елемент дејства јединице запремине (6.3) додавањем и одузимањем израза

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\delta L}{\delta A_{it}}\,\delta A_i + \frac{\delta L}{\delta \varphi_t}\,\delta\varphi\,,$$

где индекси t означавају парцијалне изводе по времену. Ако уведемо генералисане импулсе

$$p_{A_i} = \frac{\delta L}{\delta A_{it}}\,, \qquad p_\varphi = \frac{\delta L}{\delta \varphi_t}\,, \tag{6.7}$$

трансформисан елефент дејства можежо написати у облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} p_{A_i}\,\delta A_i + p_\varphi\,\delta\varphi - H\delta t \tag{6.8}$$

где је

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_{A_i}\,A_{it} + p_\varphi\,\varphi_t - L\,. \tag{6.9}$$

Pfaff-ове једначине за промењљиве A_i и φ тада гласе

$$\delta p_{A_i} = \frac{\delta \Phi}{\delta A_i}\,, \qquad \delta 0 \equiv 0 = \frac{\delta \Phi}{\delta p_{A_i}} \tag{6.10}$$

а одавде добијамо

$$\frac{\delta p_{A_i}}{\delta t} = -\frac{\delta H}{\delta A_i}\,, \qquad \frac{\delta A_i}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta p_{A_i}}\,. \tag{6.11}$$

Напишимо прву једначину за промењљиву A_1 у развијеном облику. Према обрасцима (6.4) је

$$L = \frac{1}{8\pi}\Big\{ (A_{3y} - A_{2z})^2 + (A_{1z} - A_{3x})^2 + (A_{2x} - A_{1y})^2 - \tag{6.12}$$

$$- \left(\varphi_x \vec{i} + \varphi_y \vec{j} + \varphi_z \vec{k} + \frac{1}{c} A_{1t} \vec{i} + \frac{1}{c} A_{2t} \vec{j} + \frac{1}{c} A_{3t} \vec{k}\right)^2 \Big\}\,,$$

где индекси x, y, z означавају парцијалне изводе по тим промен-

љивама, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ јединичне векторе координатног система. Тада имамо

$$p_{A_1} = \frac{\delta L}{\delta A_{1t}} = \frac{1}{4\pi c} E_1$$

и

$$\frac{\delta L}{\delta A_1} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y}(A_{2x} - A_{1y}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z}(A_{1z} - A_{3x}),$$

па прва једначина (6.11) добија облик, с обзиром на други образац (6.4)

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t}. \tag{6.13}$$

Цикличном пермутацијом добијамо и друге две једначине (5.11) за промењиве A_2 и A_3, а ове три једначине можемо написати и у векторском облику

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{6.14}$$

То је трећа Maxwell-ова једначина. Друга једначина (6.11) даје само дефиницију генералисаног импулса p_{A_1}.

Pfaff-ове једначине за промењиве φ и p_φ гласе

$$\delta p_\varphi = \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi}, \qquad \delta 0 \equiv 0 = \frac{\delta \Phi}{\delta p_\varphi}, \tag{6.15}$$

а одавде добијамо

$$\frac{\delta p_\varphi}{\delta t} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi}, \qquad \frac{\delta \varphi}{\delta t} = \frac{\delta \varphi}{\delta p_\varphi}. \tag{6.16}$$

Према обрасцу (6.12) имамо

$$p_\varphi = \frac{\delta L}{\delta \varphi_t} = 0$$

и

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}\right),$$

па прва једначина (6.16) добија векторски облик

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0. \tag{6.17}$$

То је четврта Maxwell-ова једначина. Друга једначина (6.16) даје само дефиницију генералисаног импулса p_φ.

ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА ЕЛЕКТРОНА. – Посматрајмо кретање електрона у електромагнетном пољу у вакууму и проучимо интеракцију посматраног електромагнетног поља и поља самог електрона. У том циљу потражимо онај део укупног механичко-електромагнетног елемента дејства који потиче од кретања електрона и посматране интеракције оба електромагнетна поља.

Означимо са e наелекрисање електрона, са m_0 његову масу у мировању, са v његову брзину, а са c брзину светлости. Нека $\vec{E}$ и $\vec{H}$ претстављају јачине спољњег електричног магнетног поља, а $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ јачине електричног и магнетног поља самог електрона.

Формирајмо сад релативистички елеменат дејства. Кинетичка енергија потиче од кретања електрона и резултујућег магнетног поља

$$T = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{8\pi}\int (\vec{H} + \vec{H}')^2 \, dV \qquad (6.18)$$

а потенцијална енергија потиче од резултујућег електричног поља

$$U = \frac{1}{8\pi}\int (\vec{E} + \vec{E}')^2 \, dV. \qquad (6.19)$$

Тада Lagrange-ова функција има вредност

$$L' = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{8\pi}\int (\vec{H} + \vec{H}')^2 \, dV - \frac{1}{8\pi}\int (\vec{E} + \vec{E}')^2 \, dV\,, \qquad (6.20)$$

а онај њен део који потиче од кретања електрона и интеракције оба електромагнетна поља износи

$$L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{4\pi}\int \vec{H} \cdot \vec{H}' \, dV - \frac{1}{4\pi}\int \vec{E} \cdot \vec{E}' \, dV\,. \qquad (6.21)$$

Сматрајмо сад елемент дејства као Pfaff-ов израз и уведимо скаларни и векторски потенцијал обрасцима (6.4), чиме добијамо

$$\Phi' = L\,dt = \left(- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{4\pi}\int \vec{H}' \cdot \operatorname{rot} \vec{A} \, dV + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\pi}\int E' \operatorname{grad} \varphi \, dV + \frac{1}{4\pi c}\int \vec{E}' \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \, dV \right) dt\,. \qquad (6.22)$$

Под претпоставком да електромагнетно поље има изворе само на коначном растојању имамо

$$\int \vec{H}' \operatorname{rot} \vec{A} \, dV = \int \operatorname{div} (\vec{A} \times \vec{H}') \, dV + \int \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} \, dV = \int \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H}' \, dV$$

и

$$\int \vec{E}' \operatorname{grad} \varphi \, dV = \int \operatorname{div} (\varphi \vec{E}') \, dV - \int \varphi \operatorname{div} \vec{E}' \, dV = - \int \varphi \operatorname{div} \vec{E}' \, dV\,,$$

јер су први интеграли на основу Gauss-ове теореме и учињене претпоставке једнаки нули. Уведимо потом Maxwell-ове једначине за електромагнетно поље самог електрона

$$\operatorname{div}\vec{E'} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot}\vec{H'} = \frac{4\pi}{c}\rho\vec{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E'}}{\partial t}$$

чиме добијамо

$$\Phi' = \Big(- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{c}\int \vec{A}\cdot\rho\vec{v}\,dV + \tag{6.23}$$
$$+ \frac{1}{4\pi c}\int \vec{A}\frac{\partial\vec{E'}}{\partial t}\,dV - \int \varphi\rho\,dV + \frac{1}{4\pi c}\int \vec{E'}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,dV\Big)\,dt.$$

Ако групишемо трећи и пети члан и изменимо ред диференцирања по времену и интегрирања по простору и ако имамо у виду да је ван електрона $\rho = 0$ и да се у унутрашњости електрона φ и A могу сматрати константним, елемент дејства добија облик

$$\Phi' = \Big(- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\Big)\,dt + d\Big(\frac{1}{4\pi c}\int \vec{A}\cdot\vec{E'}\,dV. \tag{6.24}$$

Ако изоставимо последњи члан као тотални диференцијал, добићемо еквивалентан Pfaff-ов израз

$$\Phi = \Big(- m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} - e\varphi\Big)\,dt \equiv L_1\,dt. \tag{6.25}$$

Трансформишимо сад овај израз додавањем и одузимањем израза

$$\operatorname{grad}_{\vec{v}} L_1 \cdot \vec{dr}$$

и уведимо генералисан импулс

$$\vec{P} = \operatorname{grad}_{\vec{v}} L_1 = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A}. \tag{6.26}$$

Тада се трансформисан Pfaff-ов израз може написати у облику

$$\Phi = \vec{P}\cdot\vec{dr} - H\,dt \tag{6.27}$$

где је

$$H = \vec{P}\cdot\vec{v} - L_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{6.28}$$

Pfaff-ова једначина за променљиву $\vec{r}$ гласи

$$d\vec{P} = \operatorname{grad}_{\vec{r}} \Phi. \tag{6.29}$$

Ако са $\vec{p}$ означимо механични део импулса (6.26), имамо

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\left\{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{A}\right\}$$

а

$$\operatorname{grad}_{\vec{r}} \Phi = \frac{e}{c}\left\{\vec{v}\times \operatorname{rot}\vec{A} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{A}\right\} dt - e\operatorname{grad}\varphi\, dt,$$

па једначина (6.29) добија облик

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{A}$$

а на основу образаца (6.4) коначно добијамо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}. \tag{6.30}$$

То је једначина кретања електрона у електромагнетном пољу, а израз на десној страни једначине претставља тзв. Lorentz-ову силу.

7. ПРИМЕНА PFAFF-ОВЕ МЕТОДЕ У КВАНТНОЈ МЕХАНИЦИ

SCHRÖDINGER-OBA JEДНАЧИНА. — Посматрајмо кретање једне честице одређеног импулса по правој линији, коју ћемо узети за x-осу. Према Heisenberg-овој релацији неодређености њен положој на x-оси је потпуно неодређен, те може бити ма где између $-\infty$ и $+\infty$. Таласи материје придружени честици одређују тада вероватноћу њеног налажења на неком одређеном месту и то тако да је квадрат модула таласне функције мерило ове вероватноће.

Да бисмо извели једначину таласа материје за стационарна стања, морамо формирати елемент дејства за таласе материје у интервалу $(x, x+dx)$. У том циљу упоредимо таласе материје са обичним еластичним таласима. Кинетичка и потенцијална енергија таласа у том интервалу према обрасцима (4.13) имају вредности

$$dT = \frac{1}{2}\rho\,\psi_t^2\, q\, dx, \quad dU = \frac{1}{2}\eta\,\psi_x^2\, q\, dx\,. \tag{7.1}$$

При томе брзина простирања ових таласа према обрасцу (4.8) износи

$$v = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}}. \tag{7.2}$$

Претпоставимо да се таласно стање може претставити функцијом облика

$$\psi = u(x) \sin \omega t. \tag{7.3}$$

где $u(x)$ може бити ма каква функција од x. На основу овог обрасца и претпоставке о стационарном стању можемо узети средње временске вредности, чиме ћемо проблем свести на проблем са једном независно променљивом — координатом x. Пошто је

$$\bar{\psi}^2 = \frac{1}{2} u^2, \quad \bar{\psi}_x{}^2 = \frac{1}{2} u_x{}^2, \quad \bar{\psi}_t{}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 u^2,$$

а према обрасцу (8.2)

$$\frac{1}{2} \rho \bar{\psi}_t{}^2 = \frac{\rho \pi^2 \nu^2 u^2}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \eta u^2}{\lambda^2}$$

где је λ таласна дужина, изразе (7.1) можемо написати у облику

$$dT = \frac{\pi^2 \eta q u^2}{\lambda^2} dx, \quad dU = \frac{\eta q u_x{}^2}{4} dx. \tag{7.4}$$

Применимо сад ове обрасце на таласе материје, што ћемо учинити помоћу de Broglie-еве релације

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{7.5}$$

где је p импулс честице, а λ таласна дужина придружених таласа материје. Тада добијамо вредност за кинетичку и потенцијалну енергију таласа материје у интервалу $(x, x + dx)$

$$dT = \frac{\pi^2 \eta q u^2 p^2}{h^2} dx, \quad dU = \frac{\eta q u_x{}^2}{4} dx. \tag{7.6}$$

Формирајмо сад одговарајући елемент дејства таласа материје као Pfaff-ов израз

$$\Phi' = \eta q \left(\frac{\pi^2 u^2 p^2}{h^2} - \frac{u_x{}^2}{4} \right) dx\, dt. \tag{7.7}$$

Стављајући

$$p = \sqrt{2 m (E - U)}$$

где је m маса, E укупна, а U потецијална енергија честице, добијамо

$$\Phi' = - \frac{2 \pi^2 m \eta \rho\, dt}{h^2} \left\{ \frac{h^2}{8 \pi^2 m} u_x{}^2 - (E - U) u^2 \right\} dx.$$

Имајући у виду да горњи израз не зависи од времена, деобом горњег израза са константним фактором испред заграде добијамо еквивалентан Pfaff-ов израз

$$\Phi = \left\{ \frac{h^2}{8 \pi^2 m} u_x{}^2 - (E - U) u^2 \right\} dx \equiv L_1 dx. \tag{7.8}$$

Овим трансформацијама добили смо Pfaff-ов израз који не зависи ни од средине ни од природе таласа, чиме смо се ослободили појмова који код таласа материје немају никаквог смисла.

Трансформишимо сад израз (7.8) додавањем и одузимањем израза

$$\frac{\partial L_1}{\partial u_x} du = \frac{h^2}{4\pi^2 m} u_x \, du$$

чиме добијамо

$$\Phi = \frac{h^2}{4\pi^2 m} u_x \, du - \left\{ \frac{h^2}{4\pi^2 m} u_x^2 + (E - U) u^2 \right\} dx . \qquad (7.9)$$

Pfaff-ова једначина за променљиву u тада гласи

$$d\left(\frac{h^2}{4\pi^2 m} u_x\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}. \qquad (7.10)$$

У развијеном облику ова једначина има облик

$$\frac{h^2}{4\pi^2 m} u_{xx} \, dx = -2 (E - U) u \, dx$$

а одавде добијамо

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) u = 0. \qquad (7.11)$$

То је Schrödinger-ова једначина за једну димензију.

Ако се правац кретања честице не поклапа ни са једном координатном осом, узмимо нов координатни систем $0 x' y' z'$ тако да се правац x'-осе поклапа са правцем кретања честице. Ако обележимо са $\vec{r}$ вектор положаја ма које тачке $M(x, y, z)$, са $\vec{n}$ јединични вектор x'-осе, а са α, β, γ његове косинусе правца, имамо

$$x' = \vec{r} \cdot \vec{n} = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

а отуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{d^2 u}{dx'^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \beta^2 \frac{d^2 u}{dx'^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \gamma^2 \frac{d^2 u}{dx'^2},$$

те је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dx'^2}. \qquad (7.12)$$

Према једначини (7.11) у координатном систему $Ox' y' z'$ имамо

$$\frac{\partial^2 u}{dx'^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) u = 0,$$

а према претходном обрасцу добијамо коначно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\, u = 0. \tag{7.13}$$

То је општа Schrödinger-ова једначина.

Покажимо још у овом случају еквивалентност Pfaff-овог принципа и принципа минимума енергије. Просечна вредност Hamilton-овог оператора у случају реалне таласне функције је

$$\overline{H} = E = \int_{-\infty}^{+\infty} u\, H\, u\, dx$$

где је H Hamilton-ов оператор

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2}{dx^2} + U.$$

Стављајући

$$u u_{xx} = \frac{d}{dx}(u\, u_x) - u_x^2$$

и имајући у виду да таласна функција у бесконачности мора бити једнака нули, добијамо

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{h^2}{8\pi^2 m} u_x^2 + U u^2 \right\} dx. \tag{7.14}$$

У стационарном стању према принципу минимума енергије овај интеграл има минималну вредност

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{h^2}{8\pi^2 m} u_x^2 + U u^2 \right\} dx = 0.$$

чему треба додати као допузуслов услов нормирања таласне функције

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\, dx = 1.$$

Помоћу Lagrange-еве методе мултипликатора, ако произвољан мултипликатор обележимо са E, ова два услова можемо скупити у један услов

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{h^2}{8\pi^2 m} u_x^2 + U u^2 - E u^2 \right\} dx = 0. \tag{7.15}$$

Одавде видимо да је Pfaff-ов израз (7.8) једнак елементу интеграла (7.15), а пошто из оба наведена обрасца следује да је $\delta \Phi = 0$, видимо да Pfaff-ов принцип у овом случају изражава чињеницу да енергија у стационарном стању достиже минимум.

KLEIN-GORDON-OBA ЈЕДНАЧИНА. — Покажимо сад како се може добити и релативистичка једначина таласа материје. У том циљу посматрајмо на релативистички начин кретање једне честице одређеног импулса по правој линији. Претпоставимо да је стање ма какво, нестационарно, али се ограничимо на случај да се честица налази ван дејства сила.

Да бисмо добили релативистичку једначину таласа материје, морамо формирати такав елемент дејства јединице запремине за таласе материје чија је Lagrange-ева функција независна од избора координатног система. Упоредимо, као и раније, таласе материје са обичним еластичним таласима. Пошто су деформације ових таласа врло мале, кинетичка и потенцијална енергија таласа дате су својим класичним вредностима као нерелативистичком апроксимацијом. За јединицу запремине тада имамо

$$T = \frac{1}{2} \rho \psi_t^2, \qquad U = \frac{1}{2} \eta \psi_x^2 , \tag{7.16}$$

а одговарајући елемент дејства таласа материје сматран као Pfaff-ов израз има вредност

$$\Phi' = \frac{1}{2} (\rho \psi_t^2 - \eta \psi_x^2) \, \delta t. \tag{7.17}$$

Овај израз на основу обрасца (7.2) можемо написати у облику

$$\Phi' = -\frac{1}{2} \eta \left(\psi_x^2 - \frac{1}{v^2} \psi_t^2 \right) \delta t$$

а деобом са $-\frac{1}{2}\eta$ добијамо еквивалентан Pfaff-ов израз

$$\Phi'' = \left(\psi_x^2 - \frac{1}{v^2} \psi_t^2 \right) \delta t. \tag{7.18}$$

Трансформишимо сад овај израз на следећи начин. Ако у релативистичкој релацији између енергије и импулса

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 \, c^2$$

ставимо

$$E = h \nu, \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

добијамо релативистичку релацију између фреквенције и таласне дужине таласа материје

$$\frac{\nu^2}{c^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{m_0^2 c^2}{h^2}. \tag{7.19}$$

Помоћу овог обрасца и обрасца $v = \nu\lambda$, елиминацијом таласне дужине добијамо

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{\varkappa^2}{\omega^2} \tag{7.20}$$

где је

$$\varkappa = \frac{2\pi c m_0}{h}. \tag{7.21}$$

Обрасцем (7.20) изражена је зависност брзине таласа материје v од масе честице у мировању m_0. За фотоне је $\varkappa = 0$, те је $v = c$, а за остале честице је $v > c$.

Тада добијамо

$$\Phi'' = \left(\psi_x{}^2 - \frac{1}{c^2}\psi_t{}^2 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\psi_t{}^2\right)\delta t$$

а пошто је на основу обрасца (7.3)

$$\psi_t{}^2\,\delta t = \delta(\psi\,\psi_t) + \omega^2\psi^2\,\delta t$$

горњи Pfaff-ов израз може се написатн у облику

$$\Phi'' = \left(\psi_x{}^2 - \frac{1}{c^2}\psi_t{}^2 + \varkappa^2\psi^2\right)\delta t + \delta\left(\frac{\varkappa^2}{\omega^2}\psi\,\psi_t\right). \tag{7.22}$$

Ако изоставимо последњи члан као варијациони диференцијал, добићемо еквивалентан Pfaff-ов израз

$$\Phi = \left(\psi_x{}^2 - \frac{1}{c^2}\psi_t{}^2 + \varkappa^2\psi^2\right)\delta t \equiv L_1\,\delta t. \tag{7.23}$$

Овај Pfaff-ов израз независан је како од средине и природе таласа тако и од избора координатног система, јер је израз у загради инваријантан према Lorentz-овим трансформацијама.

Трансформишимо сад овај израз додавањем и одузимањем израза

$$\frac{\delta L_1}{\delta\psi_t}\delta\psi = -\frac{2}{c^2}\psi_t\,\delta\psi$$

чиме добијамо

$$\Phi = -\frac{2}{c^2}\psi_t\,\delta\psi + \left(\psi_t{}^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t{}^2 + \varkappa^2\psi^2\right)\delta t. \tag{7.24}$$

Pfaff-ова једначина за променљиву ψ гласи

$$\delta\left(-\frac{2}{c^2}\psi_t\right)=\frac{\delta\Phi}{\delta\psi}. \tag{7.25}$$

У развијеном облику ова једначина има облик

$$-\frac{2}{c^2}\psi_{tt}\,\delta t = 2\varkappa^2\psi\,\delta t - 2\psi_{xx}\,\delta t$$

а одавде добијамо

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\varkappa^2\psi=0. \tag{7.26}$$

То је Klein-Gordon-ова једначина за једну димензију.

Ако се правац кретања честице не поклапа ни са једном координатном осом, узмимо, као и раније, нов координатни систем $Ox'y'z'$ тако да се правац x'-осе поклапа са правцем кретања честице. У координатном систему $Ox'y'z'$ према једначини (7.26) имамо

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\varkappa^2\psi=0\,.$$

а према обрасцу (7.12) коначно добијамо

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\varkappa^2\psi=0. \tag{7.27}$$

То је општа Klein-Gordon-ова једначина. За фотоне ($\varkappa=0$) она се своди на познату једначину електромагнетних таласа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pfaff J. — Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, necnon aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcumque variabiles, complete integrandi. *Abhandl. der Akad. Wiss. Berlin* (1814—15), 76—136.

[2] Goursat E. — Leçons sur le problème de Pfaff, Paris 1922.

]3] Билимовић А. — Рационална механика, Београд 1951, књига II. стр. 241—275.

[4] Goldstein H. — Classical Mechanics, Cambridge 1953, p. 14—18, 30—47, 225—237, 364—370.

[5] Morse P. and Feshbach H. — Methods of Theoretical Physics, New York—Toronto—London 1953, part I, p. 275—347.

[6] Helmholtz H. — *Ges. Abh.* 3 (1895), 225.

[7] Encyclopädie der Math. Wiss. t. V_2, H. 4, 695.

[8] Morse P. and Feshbach H. — Methods of Theoretical Physics, New York—Toronto—London 1953, part I, p. 326—332.

[9] Ландау и Лифиц — Теорија поља, Москва 1948 (српски превод са руског), стр. 38—43, 63—66, 71—53.

[10] Супек И. — Теоријска физика и структура материје, Загреб 1952, књига II стр. 314, 376,

[11] Encyclopädie der Math Wiss., t. VI_2, H. 2., S. 161.

[12] Јанковић З. — О варијационом принципу специјалне теорије релативности, *Гласник мат. физ. и астр.* **5** (1950), 12—20.

[13] Morse P. and Feshbach H. — Methods of Theoretical Physics, New York—Toronfo—London 1953. part I. p. 314—218, 335—337.

[14] Супек И. — Теоријска физика и структура материје, Загреб 1952, књига II, стр. 374—375.

[15] Whittaker — A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, fourth edition, Cambridge 1952, p. 296—297, 307—311. (Прво издање изашло је 1904 г.).

[16] Билимовић А. — Пфафов општи принцип механике, *Глас САН* **95**, Београд 1946, стр. 119—152.

[17] Билимовић А. — Рационална механика, Београд 1951, књига II, стр. 196—240.

[18] Bilimovitch A. — Sur l'accroissement pur de la forme différentielle et son application. *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.*, tome I, Belgrade 1947, p. 49—57.

[19] Билимовић А. — Хилбертов интеграл независности и Пфафове једначине варијационог рачуна. *Глас САН* **95**, Београд 1946, стр. 167—180.

[20] Билимовић А. — Примена Пфафове методе на теорију подешених каноничних променљивих. *Глас САН* **96**, Београд 1948 стр. 67—81.

[21] Bilimovitch A. — Über die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. *Astronomische Nachrichten*, B. 273, H. 4, Berlin 1943.

[22] Билимовић А. — Пфафов израз и векторске диференцијалне једначине планетских поремећаја, *Глас САН* **96**, Београд 1948, стр. 83—115.

[23] Билимовић А. — Примена Пфафове методе и векторских елемената на проблем трију тела. *Глас САН* **96**, Београд 1948, стр. 139—148.

[24] Билимовић А. — Пфафова метода у геометриској оптици. *Глас САН* **95**, Београд 1946, стр. 181—191,

[25] Анђелић Т. — Примена Пфафове методе у динамици чврстог тела. *Глас САН* **96**, Београд 1948, стр. 201—216.

[26] Angelitch T. — Sur l'application de la méthode de Pfaff dans la dynamique des fluides, *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.*, tome II, Belgrade 1948, p. 211—222.

[27] Angelitch T. — Equations fondamentales d'élasticité par la méthode de Pfaff. *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.*, tome III, Belgrade 1950, p. 191—195.

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE PFAFF EN PHYSIQUE THÉORIQUE

Par

ĐORĐE MUŠICKI (Beograd)

INTRODUCTION. La méthode de Pfaff, basée sur la liaison entre les formes de Pfaff et les équations de Pfaff correspondantes, a été appliquée, pour la première fois en Mécanique par E. Whittaker [15]. A. Bilimović [3, 16—24] a démontré que l'on peut déduire les équations differentielles du mouvement des systèmes holonomes et nonholonomes comme les équations de Pfaff, si l'on prend pour

la forme de Pfaff l'élément d'action spécialement transformé. Partant de là il a formulé un principe général de Mécanique, nommé le principe de Pfaff, puis il a donné une intérpretation plus profonde de cette méthode et l'a appliqué à plusieurs problèmes de Mécanique. T. Anđelić [25—27] a étendu cette méthode aussi aux autres domaines de Mécanique, en démontrant que le principe de Pfaff est un principe général de toute la Mécanique.

Ici nous démontrons que la méthode de Pfaff peut être généralisée et appliquée aussi dans la Physique théorique. Dans ce but nous avons généralisé cette méthode dans la cas de plusieurs variables indépendantes, en généralisant les formes de Pfaff, les équations de Pfaff, ainsi que le principe de Pfaff lui-même. Puis nous avons appliqué cette méthode dans les divers domaines de la Physique théorique: dans l'Elasticité, la Thermodynamique, l'Electrodynamique et la Mécanique quantique, en partant strictement des consepts analogues à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle.

LA GÉNÉRALISATION DE LA MÈTHODE DE PFAFF ET DU PRINCIPE DE PFAFF. — Considérons deux groupes de variables: m variables indépedantes t_j $(j=1,2,\ldots,m)$ et k paramètres ξ_s $(s=1,2,\ldots,k)$, et soient données les fonctions

$$x_i = x_i(t_j, \xi_s) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{1}$$

Prenons maintenant une fonction quelconque de la forme

$$\varphi = \varphi(x_i, \xi_s, x_{is}) \qquad \left(x_{is} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s}\right), \tag{2}$$

et définissons leur dérivée variationelle par rapport à x_i par la formule

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{is}}\right), \tag{3}$$

et leur différentielle variationelle par les formules

$$\delta t_j = dt_j, \quad \delta x_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta x_i}{\delta t_j} \delta t_j, \tag{4}$$

$$\delta \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \delta x_i. \tag{5}$$

En posant

$$\frac{\delta^* \varphi}{\delta t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \varphi}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta t_j}, \tag{6}$$

nous pouvons écrire la formule précédente aussi dans la forme

$$\delta \varphi = \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta^* \varphi}{\delta t_j} \delta t_j. \tag{7}$$

Si nous introduisons les fonctions X_i $(i=1,2\ldots n)$ dépedant des variables t_j et ξ_s, la forme différentielle linéaire

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} X_i\, \delta x_i \tag{8}$$

représente *la forme de Pfaff généralisée.*

A l'aide des formules précédentes on obtient

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} - \delta X_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\delta X_j}{\delta x_i} - \frac{\delta X_i}{\delta x_j} \right) \delta x_j. \tag{9}$$

et de là l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} - \delta X_i \right) \delta x_i \equiv 0. \tag{10}$$

Comme les variables x_i sont indépendantes, nous obtenons

$$\delta X_i = \frac{\delta \Phi}{\delta x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots . n), \tag{11}$$

et ces équations représentent *les équations de Pfaff généralisées.* Elles ont des propriétés similaires à celles des équations ordinaires de Pfaff.

Remarquons que dans le cas $k = 0$ naus obtenons les formes et les équations ordinaires de Pfaff.

Observons maintenant les phénomènes physiques qui peuvent être décrits par un champ physique, déterminé par les variables q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Prenons l'élément d'action rapporté à l'unité de volume et considérons le comme la forme de Pfaff généralisée

$$\Phi = L\, \delta t, \quad (L = T - U), \tag{12}$$

où L est la fonction de Lagrange, c'est-à-dire la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Transformons la à la forme

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_{it}}\, \delta q_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta q_{it}}\, q_{it} - L \right) \delta t, \tag{13}$$

où l'index t désigne la dérivée partielle par rapport au temps. Ici le temps représente la variable t_j, les coordonnées les variables ξ_s et q_i, q_{it} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et t les variables x_i.

Alors les équations de Pfaff correspondant aux variables q_i sont

$$\delta \left(\frac{\delta L}{\delta q_{it}} \right) = \frac{\delta L}{\delta q_i}, \tag{14}$$

et ces équations, dans la forme développée, représentent les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\delta^*}{\delta t}\left(\frac{\delta L}{\delta q_{it}}\right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} = 0. \tag{15}$$

Les autres équations de Pfaff ne donnent que des identités.

Si nous introduisons les impulsions généralisées, définies par la formule

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta q_{it}}, \tag{16}$$

nous pouvons écrire la forme de Pfaff (13) de la manière suivante

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H \delta t, \tag{17}$$

où H est la fonction de Hamilton.

Les équations de Pfaff correspondant aux variables q_i et p_i sont

$$\delta p_i = \frac{\delta \Phi}{\delta q_i}, \quad \delta 0 \equiv 0 = \frac{\delta \Phi}{\delta p_i}, \tag{18}$$

et ces équations représentens les équations de Hamilton

$$\frac{\delta p_i}{\delta t} = -\frac{\delta H}{\delta q_i}, \quad \frac{\delta q_i}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta p_i}. \tag{19}$$

Par conséquent, nous pouvons formuler *le principe de Pfaff généralisé* de la maniére suivante:

Les phénomènes physiques se font d'après les équations de Pfaff générelisiées, si l'on prend pour la forme de Pfaff généralisée l'élément d'action rapporté à l'unité de volume et spécialement transformé.

Ce principe général peut être appliqué dans tous les domaines de la Physique théorique où existent des concepts analogues à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle.

En introduisant la variation généralisée, definie comme la différence entre deux différentielles variationelles possibles, que nous désignons par le symbole Δ, nous obtenons pour une forme de Pfaff quelconque

$$\Delta \Phi = 0 . \tag{20}$$

La variation généralisée d'action a la valeur suivante

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V} \Delta \Phi \cdot d\,\mathrm{V}, \tag{21}$$

et en vertu de la propriété précédente on conçoit que le principe de Pfaff est équivalent au principe de Hamilton.

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE PFAFF DANS LES DIVERS DOMAINES DE LA PHYSIQUE THÉORIQUE. Si nous étudions les oscil lations transversales d'une corde, l'élément d'action rapporté à l'unité de volume, considéré comme la forme de Pfaff, est

$$\Phi = d\,W = \frac{1}{2}\,(\rho\,\psi_t{}^2 - P\,\psi_x{}^2)\,\delta\,t, \tag{22}$$

où $\psi\ (x, t)$ est l'élongation, ρ la densité, P la tension, et les indices x et t désignent les dérivées partielles par rapport à x et t. L'élément d'action transformé a la valeur suivante

$$\Phi = 2\,\psi_t\,\delta\,\psi - (\psi_t{}^2 + v^2\,\psi_x{}^2)\,\delta\,t, \quad \left(v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}\right) \tag{23}$$

et l'équation de Pfaff correspondant à la variable ψ représente l'équation des ondes transversales dans la corde

$$\psi_{xx} - \frac{1}{v^2}\,\psi_{tt} = 0. \tag{24}$$

En généralisant ce cas, nous obtenons l'équation générale des ondes élastiques

$$\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\,\psi_{tt} = 0. \tag{25}$$

Observons maintenant les changements mécano-thermodynamiques d'un système dans l'état du fluide idéal. Si nous considérons la température d'après Helmholtz comme la dérivée d'une nouvelle variable a par rapport au temps

$$T = \frac{da}{dt}, \tag{26}$$

l'élément d'action rapporté à l'unité de masse est

$$\Phi = \left(\frac{1}{2}\,\vec{v}^2 - F + \int \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int P d\,\vartheta + \int \dot{S} da\right) dt, \tag{27}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse, F. l'énergie libre, $\vec{F}$ la force rapportée à l'unité de masse, P la pression, ϑ le volume d'unité de masse et S l'entropie. L'élément d'action transformé peut être écrit sous la forme

$$\Phi = \vec{p}\cdot d\vec{r} + p_a\,da - H\,dt, \tag{28}$$

où $\vec{p}$ et p_a sont les impulsions pour $\vec{r}$ et a et H la fonction de Hamilton, et les équations de Pfaff correspondant aux variables $\vec{r}$, a et ϑ sont

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ P, \tag{29}$$

$$\frac{\partial T}{\partial T}=S, \qquad \frac{\partial T}{\partial \vartheta}=P. \tag{30}$$

La première équation représente l'équation différentielle du mouvement du système et les deux autres équations ensemble sont équivalentes au premier et au second principe de la Thermodynamique.

Si nous considérons le champ électromagnétique dans le vide, l'élément d'action rapporté à l'unité de volume est

$$\Phi=\frac{1}{8\pi}\left(\vec{H}^2-\vec{E}^2\right)\delta t, \tag{31}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique et $\vec{H}$ le champ magnétique. En introduisant le potentiel vectoriel $\vec{A}$ et le potentiel scalaire φ, nous obtenons

$$\Phi=\sum_{i=1}^{3}\delta p_{A_i}\,\delta_{A_i}+p_\varphi\delta\varphi-H\delta t, \tag{32}$$

où p_{A_i} et p_φ sont les impulsions pour A_i et φ, et les équations de Pfaff correspondant aux variables A_i et φ, ensemble avec les formules qui définissent le potentiel vectoriel et le potentiel scalaire, donnent les équations de Maxwell

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}=\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},$$
$$\mathrm{div}\,\vec{H}=0, \quad \mathrm{div}\,\vec{E}=0. \tag{33}$$

Si l'électron se meut dans un champ électromagnétique, l'élément d'action qui provient de l'interaction mutuelle a la valeur

$$\Phi=\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{1}{4\pi}\int\vec{H}\cdot\vec{H}'\,dV-\frac{1}{4\pi}\int\vec{E}\cdot\vec{E}'\,dV\right)dt, \tag{34}$$

où C est la vitesse de la lumière, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ les champs extérieurs et $\vec{E}'$ et $\vec{H}'$ les champs de l'électron lui-même. En introduisant de nouveau le potentiel vectoriel et le potentiel scalaire, nous obtenons

$$\Phi=-\vec{P}\cdot d\vec{r}-H\,dt, \tag{35}$$

où $\vec{P}$ est l'impulsion mécano-électromagnétigue, et l'équation de Pfaff correspondant à la variable $\vec{r}$ représente l'équation différentielle du mouvement d'électron

$$\frac{dp}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}. \tag{36}$$

Appliquons enfin la méthode de Pfaff aussi dans la Mécanique quantique. Considérons le mouvement d'une particule avec une impulsion définie le long d'une ligne droite, que nous prendrons pour l'axe des x. Comparons les ondes de la matière assosiée avec les ondes élastiques de très petites déformations, en établissant la correspondance entre elles par la relation de de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{37}$$

où p est l'impulsion de la particule, λ la longueur des ondes de la matière associée et h la constante de Planck.

En traitant ce mouvement de la manière nonrelativiste dans le cas où l'état de la particule est stationnaire, nous pouvons prendre les valeurs moyennes par rapport au temps. L'élément d'action des ondes de la matière alors a la valeur suivante

$$\Phi = K\left(\frac{\pi^2 p^2 u^2}{h^2} - \frac{u_x^2}{4}\right)dx\,dt, \tag{38}$$

où $u(x)$ est la partie de la fonction d'onde dépendant de la position et K une constante.

L'élément d'action transformé est

$$\Phi = \frac{h^2}{4\pi^2 m}u_x\,du - \left\{\frac{h^2}{8\pi^2 m}u_x^2 + (E-V)u^2\right\}dx, \tag{39}$$

où E est l'énergie totale et V l'énergie potentielle de la particule, et l'équation de Pfaff correspondant à la variable u représente l'équation de Schrödinger

$$u_{xx} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)u = 0. \tag{40}$$

Dans ce cas le principe de Pfaff est équivalent au principe du minimum d'énergie.

En le traitant de la manière relativiste dans le cas où la particule se meut au dehors du champ des forces, l'élément d'action rapporté à l'unité de volume a la valeur suivante

$$\Phi = K\left(\psi_x{}^2 - \frac{1}{c^2}\psi_t{}^2 + \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\psi_t{}^2\right)\delta t, \quad \left(\varkappa = \frac{2\pi cm_0}{h}\right), \tag{41}$$

où $\psi(x, t)$ est la fonction d'onde et K et ω des constantes. L'élément d'action transformé est

$$\Phi = -\frac{2}{c^2}\psi_t\,\delta\psi + \left(\psi_x{}^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t{}^2 + \varkappa^2\psi^2\right)\delta t, \tag{42}$$

et l'équation de Pfaff correspodant à la variable ψ représente l'équation de Klein-Gordon

$$\psi_{xx} - \frac{1}{c^2}\psi_{tt} - \varkappa^2\psi = 0. \tag{43}$$

En prenant un système de coordonnées quelconque, nous obtenons les équations générales de Schrödinger et de Klein-Gordon.