Зборник радова С. А. Н. L — Математички институт С. А. Н. књ. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique № 5, 1956

МИЛЕВА ПРВАНОВИЋ

ПАРАГЕОДЕЗИСКИ ПРОСТОРИ И ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ КРИВЕ ПОТПРОСТОРА РИМАНОВА ПРОСТОРА

Увод
I Парагеодезиски простори смештени у потпростору Риманова простора
II Парагеодезиске криве потпростора Риманова простора
III Парагеодезиске особине кривих добивене посматрањем из околна простора
IV Генерализација парагеодезиских кривих

У В О Д

I

Геодезиска линија Риманова простора V_n може се окарактерисати као:

1) најкраћа линија (тј. екстремала интреграла Lagrange-еве диференцијалне једначине) између две уочене тачке простора;

2) „најправија" линија простора, тј. крива дуж које се вектор тангенте помера паралелно у смислу Levi-Civita;

3) крива простора V_n чији је вектор прве кривине, у односу на околни простор V_m у коме је V_n смештен, у свакој тачки, нормалан на V_n.

У Финслерову простору, који се заснива на општој дефиницији дужинског елемента, геодезиска линија је екстремала интеграла Lagrange-еве диференцијалне једначине у односу на тако генералисану метрику. Крива такве врсте је генерализација геодезиске линије Риманова простора, јер уопштава прву од наведених њених особина.

Аутопаралелна линија афина простора је такође једна генерализација геодезиске линије Риманова простора, јер уопштава другу од наведених особина. Наиме, аутопаралелна линија афина простора је она крива тог простора дуж које се вектор тангенте паралелно помера, при чему се паралелизам Levi-Civita односи на конексију тог простора.

У трећој глави се изводи веза између вектора прве кривине, у односу на околни простор, криве која припада потпростору и њеног вектора парагеодезиске кривине. За криве простора V_n, који је смештен у потпростору V_m Риманова простора V_l изводи се релација између вектора парагеодезиске кривине криве, кад се она посматра као крива потпростора V_m простора V_l и вектора парагеодезиске кривине криве кад се она посматра као крива потпростора V_n околна простора V_l. На основу те везе, генералишу се неки познати појмови и теореме, као например, нормална кривина простора, Euler-ова формула, Meusnier-ова теорема, итд.

У четвртој глави генералишу се појмови и теореме изведене у другој и трећој глави, у правцу у коме је Bianchi, појмом здруженог вектора, генералисао вектор прве кривине криве.

У току излагања користе се ознаке L. P. Eisenhart-a: Riemannian Geometry [4] и C. E. Weatherburn-a: Riemannian Geometry and the Tensor Calculus [22], а приликом излагању у афином простору ознаке L. P. Eisenhart-a: Non-Riemanniean Geometry [3]. За нове појмове уводе се и нове ознаке, што се наглашава на одговарајућем месту.

Испитивања у другој, трећој и четвртој глави чине предмет моје докторске дисертације која је, под насловом „Парагеодезиске криве и парагеодезиска кривина кривих потпростора Риманова простора", одбрањена 10-VI-1955 г. на Природно-математичком факултету Свеучилишта у Загребу. Та испитивања се овде износе у нешто збијенијој форми, али су истовремено осветљена, акомодирана и допуњена претходним резултатима овог рада.

Глава I

ПАРАГЕОДЕЗИСКИ ПРОСТОРИ СМЕШТЕНИ У ПОТПРОСТОРУ РИМАНОВА ПРОСТОРА

1. *ПРЕТХОДНЕ РЕЛАЦИЈЕ.* — Нека је Риманов простор V_m са координатама y^μ ($\mu=1,2,\ldots,m$) и првом основном формом $a_{\mu\nu}\,dy^\mu\,dy^\nu$ смештен у Риманов простор V_l са координатима z^α ($\alpha=1,2,\ldots,l$) и првом основном формом $c_{\alpha\beta}\,dz^\alpha\,dz^\beta$. Уколико друкчије не буде наглашено, грчки индекси $\mu, \nu, \varkappa, \pi, \rho$ узимају вредности од 1 до m; грчки индекси $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ узимају вредности од 1 до l, а латински индекси p, q и r вредности од $m+1$ до l. Ако су метрике оба простора позитивно дефинитне (што ћемо увек претпостављати у току излагања), метрички тензори ова два простора задовољавају релације

$$a_{\mu\nu}=c_{\alpha\beta}\,z^\alpha{}_{,\mu}\,z^\beta{}_{,\nu}\,, \tag{1.1}$$

при чему запета испред индекса означава коваријантно диференцирање у односу на метрику потпростора V_m.

Нека су $N_r{}^\alpha{}_{|}$ контраваријантне компоненте система од $l-m$ јединичних, узајамно ортогоналних, вектора нормалних на V_m. Оне задовољавају релације

Разлика је само у томе што, уместо Christoffel-ових симбола друге врсте који фигуришу у изразу за вектор геодезиске кривине криве, овде имамо коефицијенте једне конексије, која је дефинисана у односу на дату праволиниску конгруенцију.

Крива површине, чији је вектор релативне кривине, у свакој тачки, нула вектор, има особину да је њена главна нормала она права дате праволиниске конгруенције простора која пролази кроз уочену тачку површине. Такве криве зваћемо *парагеодезиским кривама* површине у односу на праволиниску конгруенцију простора.

У специјалном случају, кад је праволиниска конгруенција управна на површини, вектор релативне кривине је вектор геодезиске кривине криве, а парагеодезиска крива је геодезиска линија површине. Према томе, парагеодезиска крива је генерализација геодезиске линије површине у том смислу што њена главна нормала припада произвољној праволиниској конгруенцији простора, уместо конгруенцији која је нормална на уочену површину.

II

У овом раду наставља се са генерализацијама особина Риманова простора које се добивају посматрањем овог као потпростора неког другог Риманова простора. Та уопштавања се врше у оном смислу у коме су то радили C. E. Springer и R. S. Mishra, задржавајући се, специјално, на генерализацији оних величина које је, за криве на површини тродимензиона Еуклидског простора, увео V. G. Grove [6].

У првој глави се дефинишу и испитују парагеодезиски простори који су смештени у потпростору V_m околна Риманова простора V_l. Ови простори су генерализација тотално геодезиских простора Риманова простора у том смислу што вектор нормалне кривине, за произвољан правац, није више нормалан на потпростору V_m, већ је тангентан на криву конгруенције која припада околном простору V_l. Такође се изводе разне релације које су задовољене за парагеодезиске просторе а које су генерализација аналогних једначина које важе за тотално геодезиске просторе.

Следеће три главе посвећене су детаљном испитивању једног специјалног случаја парагеодезиског простора: случаја кад је тај простор једнодимензиони, тј. кад се своди на криву потпростора V_m околна простора V_l. Таква крива се дефинише као парагеодезиска крива потпростора V_m околна простора V_l.

У другој глави се, после дискутовања особина парагеодезиских кривих које следе из, у првој глави, изведених особина парагеодезиских простора, показује да су парагеодезиске криве аутопаралелне линије афина простора који је везан одређеном конексијом. Затим се дефинише вектор парагеодезиске кривине и парагеодезиска кривина произвољне криве потпростора датог Риманова простора и изводи низ релација између ових величина с једне стране и прве кривине, векторе прве кривине у односу на околни простор, унион кривине и вектора унион кривине, с друге стране.

Но, ако се V_n посматра као потпростор околна простора V_l, онда су

$$\overline{\omega}_{x|ij}=c_{\alpha\beta}\, z^{\alpha}{}_{,ij}\, N_{x|}{}^{\beta}+[\gamma\,\delta,\beta]_c\, z^{\gamma}{}_{,i}\, z^{\delta}{}_{,j}\, N_{x|}{}^{\beta} \tag{1.10}$$

компоненте његова тензора друге основне форме у односу на V_l, а

$$\overline{H}_{ij}{}^{\alpha}=\sum_x \overline{\omega}_{x|ij}\, N_{x|}{}^{\alpha}=\frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial x^i\,\partial x^j}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\,\gamma\end{matrix}\right\}_c z^{\beta}{}_{,i}\, z^{\gamma}{}_{,j}-\left\{\begin{matrix}l\\ ij\end{matrix}\right\}_g z^{\alpha}{}_{,l} \tag{1.11}$$

јесу компоненте његова тензора прве кривине у односу на V_l.

Ако је V_n тотално геодезиски потпростор у односу на V_m, онда је $\omega_{a|ij}=0$ за свако a ([4], стр. 184). Из (1.9) следи да је тада тензор $h_{ij}{}^{\mu}$ прве кривине простора V_n у односу на V_m једнак нули.

Ако је V_n тотално геодезиски пртпростор околна простора V_l, онда је $\overline{\omega}_{x|ij}=0$ за свако x. Из (1.11) следи да је тада тензор $\overline{H}_{ij}{}^{\alpha}$ прве кривине простора V_n у односу на простор V_l једнак нули.

Обележимо тачком и запетом (;) испред индекса генералисани коваријантни извод ([22], § 69). Тада, генералисаним коваријантним диференцирањем релације

$$\dot{z}^{\alpha}{}_{,i}=z^{\alpha}{}_{,\mu}\, y^{\mu}{}_{,i} \tag{1.12}$$

у односу на x^j, добивамо

$$z^{\alpha}{}_{;ij}=(z^{\alpha}{}_{,\mu})_{;j}\, y^{\mu}{}_{,i}+z^{\alpha}{}_{,\mu}\, y^{\mu}{}_{;ij}. \tag{1.13}$$

Како је

$$(z^{\alpha}{}_{,\mu})_{;j}=\frac{\partial z^{\alpha}{}_{,\mu}}{\partial x^j}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} z^{\beta}{}_{,\mu}\, z^{\gamma}{}_{,j}-\left\{\begin{matrix}\pi\\ \mu\nu\end{matrix}\right\} z^{\alpha}{}_{,\pi}\, y^{\nu}{}_{,j},$$

то, с обзиром на (1.12) и чињеницу да су y-они функције x-ова, имамо

$$(z^{\alpha}{}_{,\mu})_{;j}=\frac{\partial z^{\alpha}{}_{,\mu}}{\partial y^{\nu}}\, y^{\nu}{}_{,j}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} z^{\beta}{}_{,\mu}\, z^{\gamma}{}_{,\nu}\, y^{\nu}{}_{,j}-\left\{\begin{matrix}\pi\\ \mu\nu\end{matrix}\right\} z^{\alpha}{}_{,\pi}\, y^{\nu}{}_{,j},$$

тј.

$$(z^{\alpha}{}_{,\mu})_{;j}=\left(\frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial y^{\mu}\,\partial y^{\nu}}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} z^{\beta}{}_{,\mu}\, z^{\gamma}{}_{,\nu}-\left\{\begin{matrix}\pi\\ \mu\,\nu\end{matrix}\right\} z^{\alpha}{}_{,\pi}\right) y^{\nu}{}_{,j}.$$

Међутим,

$$z^{\alpha}{}_{;\mu\nu}=\frac{\partial^2 z^{\alpha}}{\partial y^{\mu}\,\partial y^{\nu}}+\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} z^{\beta}{}_{,\mu}\, z^{\gamma}{}_{,\nu}-\left\{\begin{matrix}\pi\\ \mu\nu\end{matrix}\right\} z^{\alpha}{}_{,\pi},$$

па отуда следи да је

$$(z^{\alpha}{}_{,\mu})_{;j}=z^{\alpha}{}_{;\mu\nu}\, y^{\nu}{}_{,j}.$$

Према томе, једначине (1.13) се могу написати у облику

$$z^{\alpha}{}_{;ij}=y^{\mu}{}_{;ij}\, z^{\alpha}{}_{,\mu}+z^{\alpha}{}_{;\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}. \tag{1.14}$$

(1.2) $$c_{\alpha\beta}\, N_{r\,|}{}^{\alpha}\, z^{\beta}{}_{,\mu} = 0$$

(1.3) $$c_{\alpha\beta}\, N_{r\,|}{}^{\alpha}\, N_{p\,|}{}^{\beta} = \delta_r^p\,,$$

где су δ_r^p Kronecker-ови симболи, који имају вредности

$$\delta_r^p = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad p \neq r\,, \\ 1 & \text{за} \quad p = r\,. \end{cases}$$

Посматрајмо сад Риманов простор V_n који је смештен у потпростору V_m Риманова простора V_l. Нека су x^i $(i=1, 2, \ldots, n)$ координате простора V_n и нека је његова прва основна форма $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ позитивно дефинитна. Тада је

(1.4) $$g_{ij} = a_{\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}$$

(1.5) $$g_{ij} = c_{\alpha\beta}\, z^{\alpha}{}_{,i}\, z^{\beta}{}_{,j}\,.$$

При томе индекси i, j, k, l варирају од 1 до n; индекси a, b, c, d варирају од $n+1$ до m, а индекси x, y, z од $n+1$ до l.

У потпростору V_m постоји систем од $m-n$ јединичних, узајамно ортогоналних, вектора $n_{a\,|}{}^{\mu}$, који су нормални на V_n и који, стога, задовољавају једначине

(1.6) $$a_{\mu\nu}\, n_{a\,|}{}^{\mu}\, n_{b\,|}{}^{\nu} = \delta_a^b$$

(1.7) $$a_{\mu\nu}\, n_{a\,|}{}^{\mu}\, y^{\nu}{}_{,i} = 0\,.$$

У околном простору V_l, вектори $n_{a\,|}{}^{\mu}$ имају компонентне

(1.8) $$N_{a\,|}{}^{\alpha} = n_{a\,|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu}\,.$$

Дакле, у простору V_l постоји систем од $l-n$ јединичних, узајамно ортогоналних, вектора $N_{x\,|}{}^{\alpha}$, који су нормални на V_n.

Функције $\omega_{a|ij}$, такве да је ([4], јед. (47.5))

$$\omega_{a|ij} = a_{\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,ij}\, n_{a\,|}{}^{\nu} + [\pi\varkappa,\, \nu]_a\, y^{\pi}{}_{,i}\, y^{\varkappa}{}_{,j}\, n_{a|}{}^{\nu},$$

где су $[\pi\varkappa, \nu]_a$ Christoffel-ови симболи прве врсте у односу на основни тензор $a_{\mu\nu}$, јесу компонентне тензора друге основне форме простора V_n у односу на простор V_m. Компоненте $h_{ij}{}^{\mu}$ тензора прве кривине простора V_n у односу на V_m одређене су релацијама ([17], стр. 276; [7])

(1.9) $$h_{ij}{}^{\mu} = \sum_a \omega_{a|ij}\, n_{a\,|}{}^{\mu} = \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^i\, \partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\pi \end{matrix} \right\}_a y^{\nu}{}_{,i}\, y^{\pi}{}_{,j} - \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}_g y^{\mu}{}_{,l}\,,$$

при чему су $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\pi \end{matrix} \right\}_a$ и $\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}_g$ Christoffel-ови симболи друге врсте у односу, респективно, на метричке тензоре $a_{\mu\nu}$ и g_{ij}.

Кад је V_n тотално геодезиски потпростор простора V_m, $\omega_{a|ij}=0$ за свако a, па релација (1.18) добива облик

$$(1.18') \qquad \sum_{\lambda} \overline{\omega}_{x|ij}\, e^i\, e^j\, N_{x|}{}^{\alpha} = \sum_{p} \Omega_{p|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, e^i\, e^j\, N_{p|}{}^{\alpha}.$$

Отуда следи:

Ако је V_n тотално геодезиски простор у односу на потпростор V_m, његов вектор нормалне кривине у односу на околни простор V_l, у правцу ма ког вектора e^i, нормалан је на простору V_m.

Генералисани коваријантни извод јединичног вектора $n_{a|}{}^{\mu}$ нормале простора V_n, дат је изразом ([22], стр. 170, јед. 30)

$$(1.19) \qquad n_{a|}{}^{\mu}{}_{;l} = -\omega_{a|ik}\, g^{kj}\, y^{\mu}{}_{,j} + \sum_{b} \mu_{ba|l}\, n_{b|}{}^{\mu},$$

при чему су функције

$$\mu_{ba|l} = a_{\varkappa\nu}\, n_{a|}{}^{\varkappa}{}_{;l}\, n_{b|}{}^{\nu}$$

антисиметричне по a и b, тј.

$$\mu_{ba|l} + \mu_{ab|l} = 0.$$

Из (1.19) добивамо

$$\sum_{a} n_{a|}{}^{\mu}{}_{;i}\, e^i = -\sum_{a} \omega_{a|ik}\, g^{kj}\, y^{\mu}{}_{,j}\, e^i + \sum_{a}\sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|}{}^{\mu}\, e^i.$$

Према томе, за тотално геодезиски простор V_n, имамо:

$$(1.20) \qquad \sum_{a} n_{a|}{}^{\mu}{}_{;i}\, e^i = \sum_{a}\sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|}{}^{\mu}\, e^i.$$

Ако је тотално геодезиски простор V_n хиперповршина простора V_m, онда је $a=1$, а $\mu_{ba|i}=0$, па се једначине (1.20) своде на

$$n^{\mu}{}_{;i}\, e^i = 0,$$

тј. ([4], стр. 183; [22], стр. 139):

Нормале, у V_m, тотално геодезиске хиперповршине V_{m-1} јесу паралелне у околном простору V_m за сваки правац хиперповршине.

Тотално геодезиски простор окарактерисан је и следећом особином ([4], стр. 183):

Ако је V_n тотално геодезиски потпростор простора V_m, онда је свака геодезиска линија потпростора V_n геодезиска линија и околна простора V_m.

Посматрамо систем од $l-m$ конгруенција кривих у V_l, које су такве да кроз сваку тачку потпростора V_m пролази по једна крива сваке конгруенције. Нека су $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ контраваријантне компоненте јединичног вектора тангенте на криву конгруенције $\lambda_{r|}$ при чему

Но,

$$z^{\alpha}{}_{;ij} = \sum_{x} \overline{\omega}_{x|ij} N_{\lambda|}{}^{\alpha}$$

јесте тензор $\overline{H}_{ij}{}^{\alpha}$ прве кривине простора V_n у односу на простор V_l;

$$y^{\mu}{}_{;ij} = \sum_{a} \omega_{a|ij} n_{a|}{}^{\mu}$$

јесте тензор $h_{ij}{}^{\mu}$ прве кривине простора V_n у односу на простор V_m, а

$$z^{\alpha}{}_{;\mu\nu} = \sum_{p} \Omega_{p|\mu\nu} N_{p|}{}^{\alpha}$$

јесте тензор прве кривине простора V_m у односу на околни простор V_l. Дакле, релација (1.14) може се написати у облику [7]

$$\overline{H}_{ij}{}^{\alpha} = h_{ij}{}^{\mu} z^{\alpha}{}_{,\mu} + H_{\mu\nu}{}^{\alpha} y^{\mu}{}_{,i} y^{\nu}{}_{,j}, \tag{1.15}$$

или, што је исто, у облику

$$\sum_{x} \overline{\omega}_{x|ij} N_{x|}{}^{\alpha} = \sum_{a} \omega_{a|ij} n_{a|}{}^{\mu} z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p} \Omega_{p|\mu\nu} y^{\mu}{}_{,i} y^{\nu}{}_{,j} N_{p|}{}^{\alpha}. \tag{1.15'}$$

Из једнакости (1.15'), с обзиром да су $N_{x|}{}^{\alpha}$ компоненте система од $l-n$ независних вектора, следи

$$\overline{\omega}_{\alpha|ij} = \omega_{\alpha|ij} \tag{1.16}$$

$$\overline{\omega}_{p|ij} = \Omega_{p|\mu\nu} y^{\mu}{}_{,i} y^{\nu}{}_{,j} \tag{1.17}$$

Релација (1.15), односно (1.15'), успоставља везу између тензора прве кривине, у односу на околни простор V_l, и тензора прве кривине, у односу на потпростор V_m, простора V_n. Она показује да се тензор прве кривине простора V_n у односу на V_l може посматрати као збир два тензора, од којих је један нормалан а други тангентан на простору V_m. Овај последњи је, у ствари, тензор прве кривине простора V_n у односу на простор V_m, али посматран из околна простора V_l.

Ако су e^i компоненте јединичног вектора простора V_n, онда је

$$\sum_{x} \overline{\omega}_{x|ij} e^i e^j N_{x|}{}^{\alpha}$$

вектор нормалне кривине простора V_n, у правцу вектора e^i, а у односу на простор V_l. Из (1.15') следи да су вектор нормалне кривине простора V_n у односу на V_l и вектор нормалне кривине простора V_n у односу на V_m, везани релацијом

$$\sum_{x} \overline{\omega}_{x|ij} e^i e^j N_{x|}{}^{\alpha} = \tag{1.18}$$

$$= \sum_{a} \omega_{a|ij} e^i e^j n_{a|}{}^{\mu} z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p} \Omega_{p|\mu\nu} y^{\mu}{}_{,i} y^{\nu}{}_{,j} e^i e^j N_{p|}{}^{\alpha}.$$

кривине у односу на простор V_l, у правцу ма ког вектора e^i, колинеаран са вектором тангенте оне криве конгруенције $\lambda_{r|}$, која пролази куоз уочену тачку, јесте, по дефиницији, парагеодезиски простор у односу на конгруеоцију $\lambda_{r|}$, потпростора V_m Риманова простора V_l.

Из ове дефиниције следи да, ако је V_n парагеодезиски потпростор простора V_m, његов вектор нормалне кривнне у односу на V_l, задовољава услов

$$s_{r|} \sum_x \overline{\omega}_{x|ij}\, e^i\, e^j\, N_{x_1}{}^\alpha = \lambda_{r|}{}^\alpha \tag{2.1}$$

за свако e^i, при чему је $s_{r|}$ параметар који треба одредити. С обзиром на (1.18) и (1.21), услов (2.1) може се изразити у облику

$$s_{r|}\left(\sum_a \omega_{a|ij}\, e^i\, e^j\, n_{a|}{}^\mu\, z^\alpha{}_{,\mu} + \sum_p \Omega_{p|\mu\nu}\, y^\mu{}_{,i}\, y^\nu{}_{,j}\, e^i\, e^j\, N_{p|}{}^\alpha\right) = \tag{2.2}$$

$$= T_{r_1}{}^\mu\, z^\alpha{}_{,\mu} + \sum_p L_{pr|}\, N_{p|}{}^\alpha.$$

Ако (2.2) помножимо са $c_{\alpha\beta}\, z^\beta{}_{,\nu}$ и сумирамо по α, имамо

$$s_{r|} \sum_a \omega_{a|ij}\, e^i\, e^j\, n_{a|}{}^\mu\, a_{\mu\nu} = T_{r|}{}^\mu\, a_{\mu\nu}\,, \tag{2.3}$$

тј.

$$s_{r|} \sum_a \omega_{a|ij}\, e^i\, e^j\, n_{a|}{}^\mu = T_{r|}{}^\mu. \tag{2.4}$$

Множењем релације (2.2) са $c_{\alpha\beta}\, N_{q|}{}^\beta$ и сумирањем по α, добивамо

$$s_{r|}\, \Omega_{q|\varkappa\nu}\, y^\varkappa{}_{,i}\, y^\nu{}_{,j}\, e^i\, e^j = L_{qr|}\,, \tag{2.5}$$

што можемо написати у облику

$$\frac{1}{s_{r|}} = \frac{\Omega_{q|\varkappa_\nu}\, y^\varkappa{}_{,i}\, y^\nu{}_{,j}\, e^i\, e^j}{L_{qr|}}. \tag{2.6}$$

Релација (2.6) показује да у тачкама парагеодезиског простора V_n однос

$$\frac{\Omega_{q|\varkappa\nu}\, y^\varkappa{}_{,i}\, y^\nu{}_{,l}}{L_{qr|}} = \frac{\Omega_{p|\varkappa\nu}\, y^\varkappa{}_{,i}\, y^\nu{}_{,j}}{L_{pr|}} \tag{2.7}$$

не зависи од избора нормале $N_{p|}{}^\alpha$ простора V_m.

После замењивања параметра $s_{r|}$ из (2.5) у (2.4), имамо

$$\left(L_{qr|} \sum_a \omega_{a|ij}\, n_{a|}{}^\mu - \Omega_{q|\varkappa\nu}\, y^\varkappa{}_{,i}\, y^\nu{}_{,j}\, T_{i|}{}^\mu\right) e^i\, e^j = 0.$$

индекс r фиксира конгруенцију у систему од $l-m$ конгруенција које пролазе кроз уочену тачку потпростора V_m. Вектор са компонентама $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$, у општем случају, није нормалан на потпростору V_m, па се, стога, може изразити у облику

$$\lambda_{r|}{}^{\alpha} = T_{r|}{}^{\mu} z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p} L_{pr|}\, N_{p|}{}^{\alpha}. \tag{1.21}$$

где су $T_{r|}{}^{\mu}$ контраваријантне компоненте вектора потпростора V_m. Вектор $T_{r|}{}^{\mu}$ такође, у општем случају, није нормалан на потпростору V_n простора V_m, што значи да се може написати

$$T_{r|}{}^{\mu} = t_{r|}{}^{i}\, y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{a} l_{ar|}\, n_{a|}{}^{\mu}, \tag{1.22}$$

при чему су $t_{r|}{}^{i}$ контраваријантне компоненте вектора који припада простору V_n. Према томе се, у свакој тачки потпростора V_n, вектор $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ конгруенције може изразити у облику

$$\lambda_{r|}{}^{\alpha} = t_{r|}{}^{i}\, z^{\alpha}{}_{,i} + \sum_{a} l_{ar|}\, n_{a|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p} L_{pr|}\, N_{p|}{}^{\alpha},$$

или, с обзиром на (1.8), у облику

$$\lambda_{r|}{}^{\alpha} = t_{r|}{}^{i}\, z^{\alpha}{}_{,i} + \sum_{x} \mathcal{L}_{xr|}\, N_{x|}{}^{\alpha} \tag{1.23}$$

тако да је

$$\mathcal{L}_{ar|} = l_{ar|},\ \mathcal{L}_{pr|} = L_{pr|}. \tag{1.24}$$

С обзиром да су $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ компоненте јединичног вектора, из (1.21) следи да је интензитет вектора $T_{r|}{}^{\mu}$ дат изразом

$$a_{\mu\nu}\, T_{r|}{}^{\mu}\, T_{r|}{}^{\nu} = 1 - \sum_{p} L^{2}{}_{pr|}. \tag{1.25}$$

Ако са $\Theta_{pr|}$ обележимо угао који граде вектори $\lambda_{p|}{}^{\alpha}$ и $N_{r|}{}^{\alpha}$, опет из (1.21) налазимо да параметри $L_{pr|}$ задовољавају релације

$$L_{pr|} = \cos \Theta_{pr|}.$$

Исто тако, из (1.23) налазимо да је

$$g_{ij}\, t_{r|}{}^{i}\, t_{r|}{}^{j} = 1 - \sum_{x} \mathcal{L}^{2}{}_{xr|}$$

интензитет вектора $t_{r|}{}^{i}$, а параметри $\mathcal{L}_{xr|}$ задовољавају релације

$$\cos \varphi_{xr|} = \mathcal{L}_{xr|},$$

при чему смо са $\varphi_{xr|}$ обележили угао који образују вектори $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ и $N_{x|}{}^{\alpha}$.

2. *ПАРАГЕОДЕЗИСКИ ПРОСТОРИ. — Потпростор V_n простора V_m, који има особину да је, у свакој тачки, његов вектор нормалне*

тј.: *Ако је V_m тотално геодезиски потпростор околна простора V_l, парагеодезиски потпростор простора V_m је тотално гоодезиски у односу на V_m.*

Ако је V_m простор са неодређеним линијама кривине, онда је ([4], стр. 179)

$$\Omega_{q|\mu\nu}=\frac{\Omega_{q|}}{m}a_{\mu\nu}.$$

У том случају једначине (2.10) добивају облик

$$\omega_{a|ij}=\frac{\Omega_{q|}}{m}\frac{l_{ar|}}{L_{qr|}}g_{ij},$$

па ако ставимо

$$\frac{\Omega_{q|}}{m}\frac{l_{ar|}}{L_{qr|}}=\frac{\omega_{a|}}{n},$$

имамо

$$\omega_{a|ij}=\frac{\omega_{a|}}{n}g_{ij},$$

што значи да је и потпростор V_n простор са неодређеним линијама кривине. Дакле:

Ако је V_m простор са неодређеним линијама кривине, онда је и његов парагеодезиски потпростор — простор са неодређеним линијама кривине.

3. *КОВАРИЈАНТНИ ИЗВОД ЈЕДИНИЧНОГ ВЕКТОРА НОРМАЛЕ ПАРАГЕОДЕЗИСКОГ ПРОСТОРА.* — Генералисани коваријантни извод коваријантног вектора $n_{a|\nu}$ јединичне нормале простора V_n, у односу на V_m, дат је изразом

$$n_{a|\nu;i}=\frac{\partial n_{a|\nu}}{\partial x^i}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}n_{a|\varkappa}y^{\mu}{}_{,i},$$

што можемо написати и у облику

$$n_{a|\nu;i}+\frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}}T_{r|}{}^{\varkappa}n_{a|\varkappa}y^{\mu}{}_{,i}=\frac{\partial n_{a|\nu}}{\partial x^i}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}n_{a|\varkappa}y^{\mu}{}_{,i}+\frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}}T_{r|}{}^{\varkappa}n_{a|\varkappa}y^{\mu}{}_{,i}.$$

Како је, с обзиром на (1.22),

$$T_{r|}{}^{\varkappa}n_{a|\varkappa}=a_{\varkappa\pi}T_{r|}{}^{\varkappa}n_{a|}{}^{\pi}=a_{\varkappa\pi}\left(t_{r|}{}^{i}y^{\varkappa}{}_{,i}+\sum_{b}l_{br|}n_{b|}{}^{\varkappa}\right)n_{a|}{}^{\pi}=l_{ar|},$$

то претходну релацију можемо изразити и овако:

$$(3.1)\quad \frac{\partial n_{a|\nu}}{\partial x^i}-\left(\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}-\frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}}T_{r|}{}^{\varkappa}\right)n_{a|}{}^{\varkappa}y^{\mu}{}_{,i}=n_{a|\nu;i}+\frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}}l_{ar|}y^{\mu}{}_{,i}.$$

Како, према дефиницији, ова релација мора бити задовољена за произвољни јединични вектор e^i. простора V_n, то мора бити

$$L_{qr|}\sum_a \omega_{a|ij}\, n_{a|}{}^{\mu}-\Omega_{q|\varkappa\nu}\, y^{\varkappa}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, T_{r|}{}^{\mu}=0. \tag{2.8}$$

Ово су парцијалне диференцијалне једначине парагеодезиског простора V_n потпростора V_m Риманова простора V_l у односу на конгруенцију кривих $\lambda_{r|}$.

Из дефиниције следи да, ако је V_n парагеодезиски простор у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$, вектор $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ је нормалан на простору V_n, тј. $t_{r|}{}^{i}=0$. Према томе, у тачкама парагеодезиског простора V_n, вектор $T_{r|}{}^{\mu}$ се изражава у облику

$$T_{r|}{}^{\mu}=\sum_a l_{ar|}\, n_{a|}{}^{\mu}.$$

Отуда следи да се једначине (2.8) парагеодезиског простора V_n могу написати у облику

$$\sum_a (L_{ar|}\,\omega_{a|ij}-\Omega_{q|\varkappa\nu}\, y^{\varkappa}{}_{,j}\, y^{\nu}{}_{,i}\, l_{ar|})\, n_{a|}{}^{\mu}=0. \tag{2.9}$$

То значи: ако је V_n парагеодезиски потпростор простора V_m у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$, онда је у свакој тачки простора V_n задовољен услов

$$L_{qr|}\,\omega_{a|ij}-\Omega_{q|\varkappa\nu}\, y^{\varkappa}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, l_{ar|}=0 \quad \text{за свако } a. \tag{2.10}$$

Кад је конгруенција $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ нормална на простору V_m, тј. кад је $T_{r|}{}^{\mu}=0$, једначине (2.8) се своде на

$$\omega_{a|ij}=0 \qquad \text{за свако } a. \tag{2.11}$$

Међутим, то је ([4], стр. 184) потребан и довољан услов да V_n буде тотално геодезиски потпростор просторо V_m. Дакле:

Парагеодезиски простор је једна генерализација тоталног геодезаског простора.

Из свега што је изложено у овом параграфу следи да парагеодезиски простор генералише следећу особину тоталног геодезиског простора: тензор прве кривине таквог простора, у односу на околни простор V_l, нормалан је на потпростору V_m. Заиста, вектор нормалне кривине, у односу на V_l, парагеодезиског простора, није нормалан на V_m, него је тангентан на криву дате конгруенције $\lambda_{r|}$, која пролази кроз уочену тачку простора V_m.

Ако је V_m тотално геодезиски потпростор простора V_l, онда је $\Omega_{q|\mu\nu}=0$ за свако q, па се једначине (2.8) своде на

$$\omega_{a|ij}=0 \qquad \text{за свако } a,$$

$$n_{a|\nu:i} = -\omega_{a|ik}\, g^{jk}\, y^{\mu}{}_{,j}\, a_{\mu\nu} + \frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}}\, l_{ar|}\, y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|\nu}.$$

После множења ове релације са $a^{\nu\pi}$ и сумирања по ν, имамо

$$a^{\nu\pi}\, n_{a|\nu:i} = -\omega_{a|ik}\, g^{jk}\, y^{\mu}{}_{,j}\, a_{\mu\nu}\, a^{\nu\pi} + \frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}}\, l_{ar|}\, y^{\mu}{}_{,i}\, a^{\nu\pi} +$$

$$+ a^{\nu\pi} \sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|\nu},$$

тј.

$$a^{\nu\pi}\, n_{a|\nu:i} = -\omega_{a|ik}\, g^{jk}\, y^{\mu}{}_{,j}\, \delta^{\pi}_{\mu} + \frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}}\, l_{ar|}\, y^{\mu}{}_{,i}\, g^{jk}\, y^{\nu}{}_{,k}\, y^{\pi}{}_{,j} +$$

$$+ a^{\nu\pi} \sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|\nu},$$

или

$$a^{\nu\pi}\, n_{a|\nu:i} = -\left(\omega_{a|ik} - \frac{\Omega_{q|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{qr|}}\, l_{ar|}\right) g^{jk}\, y^{\pi}{}_{,j} + a^{\nu\pi} \sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|\nu}.$$

Најзад, множењем са $a_{\varepsilon\pi}$, и сумирањем по π, добивамо

$$n_{a|\varepsilon:i} = -\left(\omega_{a|ik} - \frac{\Omega_{q|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{qr|}}\, l_{ar|}\right) g^{jk}\, y^{\pi}{}_{,j}\, a_{\varepsilon\pi} + \sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|\varepsilon}.$$

Ако су e^i контраваријантне компоненте јединичног вектора простора V_n, онда коваријантни извод вектора $n_{a|\varepsilon}$ у односу на конексију $\Gamma^{\pi}_{\mu\nu}$, а у правцу вектора e^i, има облик

$$n_{a|\varepsilon:i}\, e^i = -\left(\omega_{a|ik} - \frac{\Omega_{q|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{qr|}}\, l_{ar|}\right) e^i\, g^{jk}\, y^{\pi}{}_{,j}\, a_{\varepsilon\pi} + \sum_{b} \mu_{ba|i}\, e^i\, n_{b|\varepsilon}.$$

Отуда следи да је

$$\sum_{a} n_{a|\varepsilon:i}\, e^i = -\sum_{a}\left(\omega_{a|ik} - \frac{\Omega_{q|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{qr|}}\, l_{ar|}\right) e^i\, g^{jk}\, y^{\pi}{}_{,j}\, a_{\varepsilon\pi} +$$

$$+ \sum_{a}\sum_{b} \mu_{ba|i}\, e^i\, n_{i|\varepsilon}.$$

Ако је V_n парагеодезиски простор, из претходне једначине, а с обзиром на (2.10), добивамо

$$\sum_{a} n_{a|\varepsilon:i}\, e^i = \sum_{a}\sum_{b} \mu_{ba|i}\, e^i\, n_{b|\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Релација (3.6) је генерализација аналогне релације (1.20) која важи за тотално геодезиске просторе.

Ставимо

$$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \varkappa \\ \mu\nu \end{Bmatrix} - \frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}} T_{r|}{}^{\varkappa}. \tag{3.2}$$

Формуле за трансформацију Christoffel-ових симбола друге врсте гласе ([4], јед. 7.14)

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ \sigma\tau \end{Bmatrix}' \frac{\partial y^{\varepsilon}}{\partial y'^{\rho}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial y'^{\sigma}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial y'^{\tau}} + \frac{\partial^2 y^{\varepsilon}}{\partial y'^{\sigma} \partial y'^{\tau}},$$

при чему су $\begin{Bmatrix} \rho \\ \sigma\tau \end{Bmatrix}$ Christoffel-ови симболи друге врсте у координатном систему y'. Како су $\Omega_{q|\mu\nu}$ и $T_{r|}{}^{\varepsilon}$ компоненте тензора, односно вектора, а $L_{qr|}$ су скалари, то се величине $\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}$ трансформишу овако

$$\Gamma'^{\rho}_{\sigma\tau} \frac{\partial y^{\varepsilon}}{\partial y'^{\rho}} = \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial y'^{\sigma}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial y'^{\tau}} + \frac{\partial^2 y^{\varepsilon}}{\partial y'^{\sigma} \partial y'^{\tau}}, \tag{3.3}$$

где су $\Gamma'^{\rho}_{\sigma\tau}$ величине облика (3.2) у односу на координатни систем y'^{ρ}.

Из једначина трансформација (3.3) следи да су величине $\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}$ коефицијенти конексије неког афиног простора, а из једначина (3.2) да су то коефицијенти симетричне конексије. Из (3.2) такође следи да ова конексија зависи како од конгруенције $\lambda_{r|}$ кривих, тако и од избора нормале $N_{q|}{}^{\alpha}$ на потпростор V_m.

Ако генералисани коваријантни извод у односу на конексију $\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}$ означимо са две тачке (:) испред индекса, релација (3.1) се изражава у облику

$$n_{a|\nu:i} = n_{a|\nu;i} + \frac{\Omega_{q|\mu\nu}}{L_{qr|}} l_{ar|}\, y^{\mu}{}_{,i}. \tag{3.4}$$

Међутим, за генералисани коваријантни извод контраваријантне компоненте $n_{a|}{}^{\mu}$ јединичног вектора нормале, имамо (§ 1)

$$n_{a|}{}^{\mu}{}_{;i} = -\omega_{a|ik}\, g^{kj}\, y^{\mu}{}_{,j} + \sum_{b} \mu_{ba|}\, n_{b|}{}^{\mu},$$

па како је

$$n_{a|\nu;i} = (a_{\mu\nu}\, n_{a|}{}^{\mu})_{;i} = a_{\mu\nu}\, n_{a'}{}^{\mu}{}_{;i},$$

то је:

$$n_{a|\nu;i} = -\omega_{a|ik}\, g^{jk}\, y^{\mu}{}_{,j}\, a_{\mu\nu} + \sum_{b} \mu_{ba|i}\, n_{b|\nu}.$$

Замењивањем величине $n_{a|\nu;i}$ из ове једначине у (3.4), добивамо

Ако је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_n, тј. ако је $t_{r|}{}^{l}=0$, онда је, с обзиром на (1.22), $T_{r|}{}^{\mu}=\sum_{a} l_{ar|}\, n_{a|}{}^{\mu}$. У том се случају једначине (4.1) своде на

$$y^{\mu}{}_{,ij}+\left(\begin{Bmatrix}\mu\\ \nu\varepsilon\end{Bmatrix}-\frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}}{L_{qr|}}\,T_{r|}{}^{\mu}\right)y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}=$$

$$=\sum_{a}\left(\omega_{a|ij}-\frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr|}}\,l_{ar|}\right)n_{a|}{}^{\mu},$$

тј. на

$$y^{\mu}{}_{,ij}=-\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}+\sum_{a}\psi_{a|ij}\,n_{a|}{}^{\mu}, \tag{4.4}$$

при чему је $\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\nu}$ конексија (3.2), а

$$\psi_{a|ij}=\omega_{a|ij}-\frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr|}}\,l_{ar|}. \tag{4.5}$$

Коваријантним диференцирањем релације (4.4) по x^k, добивамо

$$y^{\mu}{}_{,ijk}=-\frac{\partial}{\partial y^{\pi}}\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\pi}{}_{,k}\,y^{\nu}{}_{,j}-\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\,y^{\rho}{}_{;ik}y^{\nu}{}_{,j}-\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\rho}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\rho}{}_{;jk}+$$

$$+\sum_{a}\psi_{a|ij,k}\,n_{a|}{}^{\mu}+\sum_{a}\psi_{a|ij}\,n_{a|}{}^{\mu}{}_{,k},$$

одакле, с обзиром на (4.4) и на ([4], јед. (47.9))

$$n_{a|}{}^{\mu}{}_{,k}=-\omega_{a|ik}\,g^{ij}\,y^{\mu}{}_{,j}-\begin{Bmatrix}\mu\\ \pi\nu\end{Bmatrix}y^{\pi}{}_{,k}\,n_{a|}{}^{\nu}+\sum_{b}\mu_{ba|k}\,n_{b|}{}^{\mu},$$

следи

$$y^{\mu}{}_{,ijk}=-\frac{\partial}{\partial y^{\pi}}\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}\,y^{\pi}{}_{,k}-\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\left(-\Gamma^{\rho}_{\varepsilon\pi}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\pi}{}_{,k}+\sum_{a}\psi_{a|ik}\,n_{a|}{}^{\rho}\right)y^{\nu}{}_{,j}$$

$$-\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\rho}\left(-\Gamma^{\rho}_{\nu\pi}\,y^{\nu}{}_{,j}\,y^{\pi}{}_{,k}+\sum_{a}\psi_{a|jk}\,n_{a|}{}^{\rho}\right)y^{\varepsilon}{}_{,i}+\sum_{a}\psi_{a|ij,k}\,n_{a|}{}^{\mu}+$$

$$+\sum_{a}\psi_{a|ij}\left(-\omega_{a|ik}\,g^{lt}\,y^{\mu}{}_{,t}-\begin{Bmatrix}\mu\\ \pi\nu\end{Bmatrix}y^{\pi}{}_{,k}\,n_{a|}{}^{\nu}+\sum_{b}\mu_{ba|k}\,n_{b|}{}^{\mu}\right),$$

тј.

$$y^{\mu}{}_{,ijk}=-\frac{\partial}{\partial y^{\pi}}\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}\,y^{\pi}{}_{,k}+\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\,\Gamma^{\rho}_{\varepsilon\pi}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}\,y^{\pi}{}_{,k}-\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\sum_{a}\psi_{a|ik}\,n_{a|}{}^{\rho}y^{\nu}{}_{,j}$$

$$+\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\nu\pi}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}\,y^{\pi}{}_{,k}-\Gamma^{\mu}_{\varepsilon\rho}\sum_{a}\psi_{a|jk}\,n_{a|}{}^{\rho}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}+\sum_{a}\psi_{a|ij,k}\,n_{a|}{}^{\mu}-$$

$$-\sum_{a}\psi_{a|ij}\,\omega_{a|ik}\,g^{lt}\,y^{\mu}{}_{,t}-\begin{Bmatrix}\mu\\ \pi\nu\end{Bmatrix}\sum_{a}\psi_{a|ij}\,y^{\pi}{}_{,k}\,n_{a|}{}^{\nu}+\sum_{a}\sum_{b}\psi_{a|ij}\,\mu_{ba|k}\,n_{a|}{}^{\mu}.$$

Из (3.6) следи да у тачкама парагеодезиског простора V_n, израз $\sum_a n_{a|\varepsilon:l}\, e^l$ не зависи од нормале $N_q{}^{\alpha}$ на потпростор V_m, а такође ни од конгруенције $\lambda_{r|}$.

Ако је парагеодезиски простор V_n хиперповршина околна простора V_m, онда је $a=b=1$, и $\mu_{ba|l}=0$, па се једнакост (3.6) своди на

$$n_{\varepsilon:l}\, e^l = 0, \tag{3.7}$$

тј.: *Нормале, у V_m парагеодезиске хиперповршине V_{m-1} паралелне су, у односу на конексију $\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}$, у околном простору V_m за све правце хиперповршине.*

Ово тврђење је генерализација теореме која се односи на паралелизам нормала тотално геодезиских хиперповршина (§1).√

4. *GAUSS-OBE И CODAZZI-JEBE ЈЕДНАЧИНЕ ПАРАГЕОДЕЗИСКОГ ПРОСТОРА.* – С обзиром на значење генералисаног коваријантног извода, једначине ([29], стр. 163 јед. 5,)

$$y^{\mu}{}_{;ij} = \sum_a \omega_{a|ij}\, n_{a|}{}^{\mu}$$

могу се изразити и овако:

$$\frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^i\, \partial x^j} - \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} y^{\mu}{}_{,h} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \varepsilon\nu \end{Bmatrix} y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j} = \sum_a \omega_{a|ij}\, n_{a|}{}^{\mu}.$$

Ове, пак, једначине можемо написати у облику

$$\frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^i\, \partial x^j} - \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} y^{\mu}{}_{,h} + \left(\begin{Bmatrix} \mu \\ \varepsilon\nu \end{Bmatrix} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}}{L_{qr|}}\, T_{r|}{}^{\mu} \right) y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j} = \sum \omega_{a|ij}\, n_{a|}{}^{\mu} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr|}}\, T_{r|}{}^{\mu}. \tag{4.1}$$

Лева страна ове релације је генералисани коваријантни извод $y-a$, при чему се диференцирање у простору V_m врши у односу на конексију (3.2), тј.

$$y^{\mu}{}_{:ij} = \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^i\, \partial x^j} - \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} y^{\mu}{}_{,h} + \left(\begin{Bmatrix} \mu \\ \varepsilon\nu \end{Bmatrix} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}}{L_{qr|}}\, T_{r|}{}^{\mu} \right) y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j} \tag{4.2}$$

На основу (4.1) и (4.2) имамо

$$y^{\mu}{}_{:ij} = \sum_a \omega_{a|ij}\, n_{a|}{}^{\mu} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr|}}\, T_{r|}{}^{\mu},$$

одакле следи да је, за парагеодезиски простор V_n, задовољен услов

$$y^{\mu}{}_{:ij} = 0. \tag{4.3}$$

при чему је R_{hijk} Риманов тензор простора V_n, то се (4.6) може написати у облику

$$y^{\mu}{}_{,t}\, g^{th} R_{hijk} = B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, y^{\pi}{}_{,k} + \sum_a (\psi_{a|ij,k} - \psi_{a|ik,j})\, n_{a|}{}^{\mu} +$$

$$+ \sum_a (\psi_{a|ik}\, \omega_{a|lj} - \psi_{a|ij}\, \omega_{a|lk})\, g^{lt}\, y^{\mu}{}_{,t} + \tag{47}$$

$$+ \sum_a \sum_b (\psi_{a|ij}\, \mu_{ba|k} - \psi_{a|ik}\, \mu_{ba|j})\, n_{a|}{}^{\mu} +$$

$$+ \sum_a \sum_b \left(\psi_{a|ik} \frac{\Omega_{q|\pi\nu}}{L_{qr|}}\, y^{\nu}{}_{,j}\, n_{a|}{}^{\pi} - \psi_{a|ij} \frac{\Omega_{q|\pi\nu}}{L_{qr|}}\, y^{\pi}{}_{,k}\, n_{a|}{}^{\nu} \right) l_{br|}\, n_{b|}{}^{\mu}$$

Множењем релације (4.7) са $a_{\mu\rho}\, n_{c|}{}^{\rho}$ и сумирањем по μ, добивамо

$$a_{\mu\rho}\, B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, y^{\pi}{}_{,k}\, n_{c|}{}^{\rho} + \psi_{c|ij,k} - \psi_{c|ik,j} +$$

$$+ \sum_a (\psi_{a|ij}\, \mu_{ca|k} - \psi_{a|ik}\, \mu_{ca|j}) +$$

$$+ \sum_a (\psi_{a|ik}\, y^{\nu}{}_{,j}\, n_{a|}{}^{\pi} - \psi_{a|ij}\, y^{\pi}{}_{,k}\, n_{a|}{}^{\nu}) \frac{\Omega_{q|\pi\nu}}{L_{qr|}}\, l_{ar|} = 0. \tag{48}$$

Ако релацију (4.7) помножимо са $a_{\mu\rho}\, y^{\rho}{}_{,m}$, и сумирамо по μ, имамо

$$g_{mt}\, g^{th} R_{hijk} = a_{\mu\rho}\, B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, y^{\pi}{}_{,k}\, y^{\rho}{}_{,m} +$$

$$+ \sum_a (\psi_{a|ik}\, \omega_{a|lj} - \psi_{a|ij}\, \omega_{a|lk})\, g^{lt}\, g_{tm},$$

тј.

$$R_{mijk} = a_{\mu\rho}\, B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, y^{\pi}{}_{,k}\, y^{\rho}{}_{,m} + \tag{49}$$

$$+ \sum_a (\psi_{a|ik}\, \omega_{a|mj} - \psi_{a|ij}\, \omega_{a|mk}).$$

Лако је видети да су једначине (4.9) и (4.8) трансформисане једначине Gauss-a односно Codazzi-ja ([4], јед. (47.11) и (47.12)) и да се своде на њих кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на простору V_m, тј. кад је поред $t_{r|}{}^{t} = 0$ још и $t_{ar|} = 0$.

Ако је простор V_n парагеодезиски у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$, вектор $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ је нормалан на простору V_n. Стога за тај простор важе једначине (4.8) и (4.9). Но, парагеодезиски простор задовољава услов

$$\psi_{a|ij} = 0 \qquad \text{за свако } a.$$

Стога се, за парагеодезиски простор V_n, једначине (4.8) и (4.9) своде на

$$a_{\mu\rho}\, B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, y^{\pi}{}_{,k}\, n_{c|}{}^{\rho} = 0 \tag{4.10}$$

$$R_{mijk} = a_{\mu\rho}\, B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, y^{\pi}{}_{,k}\, y^{\rho}{}_{,m}. \tag{4.11}$$

Дакле, једначине (4.10) су Codazzi-јеве, а једначине (4.11) Gauss-ове једначине парагеодезиског потпростора V_n Риманова простора V_m.

Како је тензор $\omega_{a|ij}$ друге основне форме симетричан с обзиром на индексе i и j, то из (4.5) следи да су и величине $\psi_{a|ij}$ симетричне у односу на i и j. Стога је

$$y^{\mu}{}_{,ijk} - y^{\mu}{}_{,ikj} = \left(\frac{\partial}{\partial y^{\nu}} \Gamma^{\mu}_{\varepsilon\pi} - \frac{\partial}{\partial y^{\pi}} \Gamma^{\mu}_{\varepsilon\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\varepsilon\pi} - \Gamma^{\mu}_{\rho\pi} \Gamma^{\rho}_{\varepsilon\nu} \right) y^{\varepsilon}{}_{,i} \, y^{\nu}{}_{,j} \, y^{\pi}{}_{,k}$$

$$+ \sum_a (\psi_{a|ij,k} - \psi_{a|ik,j}) \, n_{a|}{}^{\mu} + \sum_a \psi_{a|ik} \, \omega_{a|tj} - \psi_{a|ij} \, \omega_{a|tk}) \, g^{it} \, y^{\mu}{}_{,t}$$

$$+ \sum_a \sum_b (\psi_{a|ij} \, \mu_{ba|k} - \psi_{a|ik} \, \mu_{ba|j}) \, n_{b|}{}^{\mu} +$$

$$+ \sum_a \psi_{a|ik} \left(\left\{ {\mu \atop \nu\pi} \right\} - \Gamma^{\mu}_{\nu\pi} \right) y^{\nu}{}_{,j} \, n_{a|}{}^{\pi} - \sum_a \psi_{a|ij} \left(\left\{ {\mu \atop \nu\pi} \right\} - \Gamma^{\mu}_{\nu\pi} \right) y^{\pi}{}_{,k} \, n_{a|}{}^{\nu}.$$

Ако ставимо

$$B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu} = \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} \Gamma^{\mu}_{\varepsilon\pi} - \frac{\partial}{\partial y^{\pi}} \Gamma^{\mu}_{\varepsilon\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\varepsilon\pi} - \Gamma^{\mu}_{\rho\pi} \Gamma^{\rho}_{\varepsilon\nu}$$

и приметимо да је

$$\left\{ {\mu \atop \nu\pi} \right\} - \Gamma^{\mu}_{\nu\pi} = \frac{\Omega_{q|\nu\pi}}{L_{qr|}} \, T_{r|}{}^{\mu} = \frac{\Omega_{q|\nu\pi}}{L_{qr|}} \sum_a l_{ar|} \, n_{a|}{}^{\mu},$$

јер је, по претпоставци, конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на V_n (тј. јер је $t_{r|}{}^{i} = 0$) то имамо

$$y^{\mu}{}_{,ijk} - y^{\mu}{}_{,ikj} = B^{\mu}{}_{\pi\varepsilon\nu} \, y^{\varepsilon}{}_{,i} \, y^{\nu}{}_{,j} \, y^{\pi}{}_{,k} + \sum_a (\psi_{a|ij,k} - \psi_{a|ik,j}) \, n_{a|}{}^{\mu}$$

$$+ \sum_a (\psi_{a|ik} \, \omega_{a|tj} - \psi_{a|ij} \, \omega_{a|tk}) \, g^{it} \, y^{\mu}{}_{,t} + \tag{4.6}$$

$$+ \sum_a \sum_b (\psi_{a|ij} \, \mu_{ba|k} - \psi_{a|ik} \, \mu_{ba|j}) \, n_{a|}{}^{\mu}$$

$$+ \sum_a \sum_b \frac{\Omega_{q|\pi\nu}}{L_{qr|}} \, l_{br|} \, \psi_{a|ik} \, y^{\nu}{}_{,j} \, n_{b|}{}^{\mu} \, n_{a|}{}^{\pi} - \sum_a \sum_b \frac{\Omega_{q|\pi\nu}}{L_{qr|}} \, l_{br|} \, \psi_{a|ij} \, y^{\pi}{}_{,k} \, n_{b|}{}^{\mu} \, n_{a|}{}^{\nu}.$$

Међутим, како је ([4], јед. (47.10))

$$y^{\mu}{}_{,ijk} - y^{\mu}{}_{,ikj} = y^{\mu}{}_{,t} \, g^{th} \, R_{hijk},$$

Једначине (1.15′), тј. једначине

$$\sum_x \bar{\omega}_{x\,|\,ij}\, N_{x\,|}{}^{\alpha} = \sum_a \omega_{a\,|\,ij}\, n_{a\,|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_p \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\, y^{\nu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{p\,|}{}^{\alpha}, \tag{5.2}$$

које дају везу између тензора прве кривине простора V_n у односу на околни простор V_l и тензора прве кривине простора V_n у односу потпростор V_m могу се написати у облику

$$\sum_x \bar{\omega}_{x\,|\,ij}\, N_{x\,|}{}^{\alpha} = \sum_a \omega_{a\,|\,ij}\, n_{a\,|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p=1}^{r-1} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} + \tag{5.3}$$
$$+ \sum_{p=r+1}^{l} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} + \Omega_{r\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{r\,|}{}^{\alpha},$$

при чему смо из збира издвојили r-ту нормалу.

Сличним поступком се вектор $\lambda_{r\,|}{}^{\alpha}$, помоћу релације (1.21), може изразити у облику

$$\lambda_{q\,|}{}^{\alpha} = T_{q\,|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p=1}^{r-1} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} + \sum_{p-r+1}^{l} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} + L_{rq\,|}\, N_{r\,|}{}^{\alpha},$$

одакле следи

$$N_{r\,|}{}^{\alpha} = \frac{1}{L_{rq\,|}} \left(\lambda_{q\,|}{}^{\alpha} - T_{q\,|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} - \sum_{p=1}^{r-1} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} - \sum_{p=r+1}^{l} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} \right). \tag{5.4}$$

Заменом $N_{r\,|}{}^{\alpha}$ из (5.4) у (5.3) добивамо

$$\sum_x \bar{\omega}_{x\,|\,ij}\, N_{x\,|}{}^{\alpha} = \sum_a \omega_{a\,|\,ij}\, n_{a\,|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p=1}^{r-1} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} +$$
$$+ \sum_{p=r+1}^{l} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} +$$
$$+ \frac{\Omega_{r\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}} \left(\lambda_{q\,|}{}^{\alpha} - T_{q\,|}{}^{\varepsilon}\, z^{\alpha}{}_{,\varepsilon} - \sum_{p=1}^{r-1} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} - \sum_{p=r+1}^{l} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} \right),$$

што се може написати у облику

$$\sum_x \bar{\omega}_{x\,|\,ij}\, N_{x\,|}{}^{\alpha} = \left(\sum_a \omega_{a\,|\,ij}\, n_{a\,|}{}^{\mu} - \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\, T_{q\,|}{}^{\mu} \right) z^{\alpha}{}_{,\mu} + \tag{5.5}$$
$$+ \frac{\Omega_{r\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\, \lambda_{q\,|}{}^{\alpha} + \sum_{p=1}^{r-1} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} +$$
$$+ \sum_{p=r+1}^{l} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} - \frac{\Omega_{r\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}} \sum_{p=1}^{r-1} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha} -$$
$$- \frac{\Omega_{r\,|\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}} \sum_{p=r+1}^{l} L_{pq\,|}\, N_{p\,|}{}^{\alpha}.$$

Приметимо да се, за тотално геодезиски простор V_n Риманова простора V_m, Codazzi-јеве и Gauss-ове једначине изражавају у облику

$$\overline{R}_{\rho\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\, y^{\pi}{}_{,l}\, n_{c\,|}{}^{\rho} = 0$$

$$R_{miik} = \overline{R}_{\rho\pi\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,l}\, y^{\pi}{}_{,k}\, y^{\rho}{}_{,m},$$

где су $\overline{R}_{\rho\pi\varepsilon\nu}$ компоненте Риманова тензора простора V_n у односу на околни простор V_m.

5. *ТЕНЗОР ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ КРИВИНЕ ПРОСТОРА.* — Ако за произвољни простор V_n, који је смештен у потпростору V_m Риманова простова V_l, услов (2.8) није задовољен, у свакој тачки простора V_n можемо посматрати величину

$$M^{\mu}{}_{ij} = \sum_{a} \omega_{a\,|\,ij}\; n_{a\,|}{}^{\mu} - \frac{\Omega_{q\,|\,\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr\,|}}\, T_{r\,|}{}^{\mu}. \tag{5.1}$$

Тензор $M^{\mu}{}_{ij}$, одређен релацијом (5.1), дефинишемо као *тензор парагеодезиске кривине простора V_n у односу на конгруенцију $\lambda_{r\,|}$.*

Како, у општем случају, однос

$$\frac{\Omega_{q\,|\,\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr\,|}}$$

зависи од нормале $N_{q\,|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m, то потпростор V_n има, у свакој тачки, $l-m$ тензора парагеодезиске кривине у односу на конгруенцију $\lambda_{r\,|}$.

Из напред изложеног следи да парагеодезиски простор V_n можемо дефинисати и на следећи начин:

Парагеодезиски простор је онај простор потпростора V_m Риманова простора V_l, чији је тензор парагеодезиске кривине, у свакој тачки, за сваку нормалу $N_{p\,|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m, нула тензор

Јасно је да је тензор парагеодезиске кривине простора V_n једна генерализација његова тензора прве кривине. Наиме, кад је конгруенција $\lambda_{r\,|}{}^{\alpha}$ нормална на простору V_m, тј. кад је $T_{r\,|}{}^{\mu}=0$, десна страна релације (5.1) своди се на

$$\sum_{a} \omega_{a\,|\,ij}\, n_{a\,|}{}^{\mu},$$

а то је тензор $h_{ij}{}^{\mu}$ прве кривине простора V_n у односу на V_m.

Из релације (5.1) одмах се види да је тензор парагеодезиске кривине тотално геодезиског простора V_n дат изразом

$$M_{ij}{}^{\mu} = -\frac{\Omega_{q\,|\,\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr\,|}}\, T_{r\,|}{}^{\mu}.$$

Ако је, пак, посматрани простор V_n тотално геодезиски у односу на простор V_l, из (5.6), на основу (5.1), следи

$$M_{ij}{}^{\mu} z^{\alpha}{}_{,\mu} = - \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr\,|}}\, \lambda_{q\,|}{}^{\alpha}$$

тј. :

Тензор парагеодезиске кривине простора V_n, који је тотално геодезиски у односу на простор V_l, посматран из околна простора V_l има вредност

$$- \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\, \lambda_{q\,|}{}^{\alpha}.$$

Глава II

ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ КРИВЕ ПОТПРОСТОРА РИМАНОВА ПРОСТОРА

6. *ПРЕТХОДНЕ НАПОМЕНЕ.* У претходној глави посматрали смо простор V_n који је смештен у простору V_m Риманова простора V_l. Претпоставимо сад да је $n=1$. Тада се V_n редукује на криву C потпростора V_m Риманова простора V_l; уместо координата x^i простора V_n, сад посматрамо лук s криве C, а Christoffel-ови симболи у односу на метрички тензор g_{ij} једнаки су нули. Стога релација (1.9), која одређује тензор прве кривине простора V_n у односу на V_m, добива облик

$$q^{\mu} = \frac{d^2 y^{\mu}}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \pi\nu \end{matrix} \right\} \frac{dy^{\nu}}{ds}\, \frac{dy^{\pi}}{ds}, \tag{6.1}$$

а то је вектор прве кривине криве $C: y^{\mu} = y^{\mu}(s)$ у односу на потпростор V_m ([4], § 20).

Релација (1.11), која одређује тензор $\bar{H}_{ij}{}^{\alpha}$ прве кривине простора V_n у односу на околни простор V_l, своди се на

$$\eta^{\alpha} = \frac{d^2 z^{\alpha}}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \frac{dz^{\beta}}{ds}\, \frac{dz^{\gamma}}{ds}, \tag{6.2}$$

а то је вектор прве кривине криве C у односу на околни простор V_l.

Из свега изложеног је јасно да је једнакост ([4], јед. (48-4))

$$\eta^{\alpha} = q^{\mu} z^{\alpha}{}_{,\mu} + \sum_{p} \Omega_{p\,|\,\mu\nu} \frac{dy^{\mu}}{ds}\, \frac{dy^{\nu}}{ds} N_{p\,|}{}^{\alpha}, \tag{6.3}$$

Претпоставимо да је задовољен услов (2.7), тј. услов

$$\frac{\Omega_{q\,|\,\mu\nu}\,y^{\mu}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr\,|}} = \frac{\Omega_{p\,|\,\mu\nu}\,y^{\mu}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pr\,|}}.$$

Тада се релација (5.5) своди на

$$\sum_x \bar{\omega}_{x\,|\,ij}\,N_{x\,|}{}^{\alpha} = \left(\sum_a \omega_{a\,|\,ij}\,n_{a\,|}{}^{\mu} - \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\,T_{q\,|}{}^{\mu}\right) z^{\alpha}{}_{,\mu} +$$

$$+ \frac{\Omega_{r\,|\,\mu\nu}\,y^{\mu}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\,\lambda_{q\,|}{}^{\alpha} + \sum_{p=1}^{r-1} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\,y^{\mu}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}\,N_{p\,|}{}^{\alpha} +$$

$$+ \sum_{p=r+1}^{l} \Omega_{p\,|\,\mu\nu}\,y^{\mu}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}\,N_{p\,|}{}^{\alpha} - \sum_{p=1}^{r-1} \frac{\Omega_{p\,|\,\mu\nu}\,y^{\mu}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pq\,|}}\,L_{pq\,|}\,N_{p\,|}{}^{\alpha} -$$

$$- \sum_{p=r+1}^{l} \frac{\Omega_{q\,|\,\mu\nu}\,y^{\mu}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pq\,|}}\,L_{pq\,|}\,N_{p\,|}{}^{\alpha},$$

одакле, после скраћивања, добивамо

$$\sum_x \bar{\omega}_{x\,|\,ij}\,N_{x\,|}{}^{\alpha} = \left(\sum_a \omega_{a\,|\,ij}\,n_{a\,|}{}^{\mu} - \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\,T_{q\,|}{}^{\mu}\right) z^{\alpha}{}_{,\mu} +$$

$$+ \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\,\lambda_{q\,|}{}^{\alpha}, \tag{5.6}$$

Релација (5.6) показује да се, под условом (2.7), тензор прве кривине произвољног простора V_n у односу на околни простор V_l, може изразити помоћу тензора парагеодезиске кривине простора V_n и вектора $\lambda_{q\,|}{}^{\alpha}$ дате конгруенције.

Кад је конгруенција $\lambda_{r\,|}$ нормална на V_m, тј. кад је $T_{r\,|}{}^{\mu} = 0$, из (5.6) се, опет користећи релацију (2.7), добивају једначине (5.2). Отуда следи да релација (5.6) генералише, под условом (2.7), релацију (5.2) у том смислу што се, уместо нормала простора V_m, посматрају тангентни вектори конгруенције $\lambda_{r\,|}$.

Ако је посматрани простор V_m парагеодезиски, онда је (§ 2)

$$\sum_a \omega_{a\,|\,ij}\,n_{a\,|}{}^{\mu} - \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\,T_{q\,|}{}^{\mu} = 0,$$

па из (5.6) следи да се тензор $\bar{H}_{ij}{}^{\alpha} = \sum \bar{\omega}_{x\,|\,ij}\,N_{x\,|}{}^{\alpha}$ прве кривине парагеодезиског простора V_n у односу на простор V_l, изражава у облику

$$\bar{H}_{ij}{}^{\alpha} = \frac{\Omega_{r\,|\,\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}}{L_{rq\,|}}\,\lambda_{q\,|}{}^{\alpha}.$$

$$a_{\mu\pi}\, r^{\mu}\, \frac{dy^{\pi}}{ds} = -\,\frac{\Omega_{p\,|\,\varepsilon\nu}\,\dfrac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\dfrac{dy^{\nu}}{ds}}{L_{pr\,|}}\left(T_{r\,|\,\pi}\,\frac{dy^{\pi}}{ds} - T_{r\,|\,\varepsilon}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\right),$$

тј.

$$a_{\mu\pi}\, r^{\mu}\,\frac{dy^{\pi}}{ds} = 0.$$

Према томе, вектор унион кривине је увек управан на тангентном вектору криве.

Ако је конгруенција $\lambda_{r\,|}$ нормална на потпростору V_m, из (1.21.) следи да је тада $T_{r\,|}{}^{\mu} = 0$. Стога се једначине (6.4) унион кривих своде на једначине $q^{\mu} = 0$, тј. на диференцијалне једначине геодезиских линија потпростора V_m, а једначине (6.5) одређују вектор геодезиске кривине криве C.

7. *ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ КРИВЕ.* У § 2 дефинисали смо парагеодезиски простор V_n који је смештен у потпростору V_m Риманова простора V_l. Ако је $n=1$, такав простор се своди на криву, коју ћему звати *парагеодезиском кривом* потпростора V_m Риманова простора V_l, у односу на конгруенцију кривих $\lambda_{r\,|}$.

Из дефиниције парагеодезиског простора, с обзиром да се, за $n=1$, вектор *нормалне кривине простора* V_n, *у односу на околни простор* V_l, *своди на вектор* прве кривине криве C у односу на V_l, имамо следећу дефиницију парагеодезиских кривих:

Крива потпростора V_m *за коју је, у свакој тачки, вектор прве кривине у односу на околни простор* V_l, *колинеаран са вектором тангенте оне криве конгруенције* $\lambda_{r|}$ *која пролази кроз уочену тачку потпростора, јесте парагеодезиска крива потпростора* V_m *у односу на конгруенцију* $\lambda_{r|}$.

С обзиром на ову дефиницију, у свакој тачки парагеодезиске криве потпростора V_m, задовољен је услов

$$\lambda_{r|}{}^{\alpha} = s_{r|}\,\eta^{\alpha},$$

при чему је $s_{r|}$ параметар који треба одредити.

За $n=1$ диференцијалне једначине (2.8) парагеодезиског простора V_n добивају облик

$$L_{qr|}\, q^{\mu} = \Omega_{q|\varepsilon\nu}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\nu}}{ds}\,T_{r|}{}^{\mu} \tag{7.2}$$

тј. облик

$$q^{\mu} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\,\dfrac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\dfrac{dy^{\nu}}{ds}}{L_{qr|}}\,T_{r|}{}^{\mu} = 0, \tag{7.3}$$

која даје везу између вектора прве кривине криве C у односу на околни простор V_l и вектора прве кривине те криве у односу на потпростор V_m, специјализирана релација (1.15), односно (1.15′) у случају кад је простор V_n једнодимензиони.

Ако је у свакој тачки криве C задовољен услов $q^\mu = 0$, C је геодезиска линија потпростора V_m; ако је, пак, C геодезиска линија околна простора V_l, онда је, у свакој њеној тачки, $\eta^\alpha = 0$.

Крива потпростора V_m, чија оскулаторна геодезиска површина садржи, у свакој тачки, вектор $\lambda_{r|}{}^\alpha$ тангенте на криву конгруенције која пролази кроз ту тачку, зове се *унион крива* потпростора V_m у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$. Диференцијалне једначине ових кривих гласе [13]:

$$L_{pr|}\, q^\mu = \Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} \left(T_{r|}{}^\mu - T_{p|\pi} \frac{dy^\pi}{ds} \frac{dy^\mu}{ds} \right), \tag{6.4}$$

при чему је задовољен услов

$$\frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{pr|}} = \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{qr|}}.$$

За произвољну криву C потпростора V_m, вектор чије су контраваријантне компоненте

$$r^\mu = q^\mu - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{pr|}} \left(T_{r|}{}^\mu - T_{r|}{}^\pi \frac{dy^\pi}{ds} \frac{dy^\mu}{ds} \right) \tag{6.5}$$

јесте *вектор унион кривине* [11] криве C у односу на конгруенцију кривих $\lambda_{r|}$. Интензитет вектора r^μ је *унион кривина* криве C у односу на конгруенцију кривих $\lambda_{r|}$.

Множењем релације (6.5) са $a_{\mu\pi} \frac{dy^\pi}{ds}$ и сумирањем по μ добивамо

$$a_{\mu\pi}\, r^\mu \frac{dy^\pi}{ds} =$$

$$= a_{\mu\pi}\, q^\mu \frac{dy^\pi}{ds} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{pr|}} \left(T_{r|}{}^\mu \frac{dy^\pi}{ds} a_{\mu\pi} - a_{\mu\tau}\, T_{r|\varepsilon} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\pi}{ds} \right)$$

или, с обзиром на

$$a_{\mu\pi}\, q^\mu \frac{dy^\pi}{ds} = 0 \quad \text{и} \quad a_{\mu\pi} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\pi}{ds} = 1,$$

једначине (6.4) унион кривих се редукују на једначине (7.2) парагеодезиских кривих. Стога:

Парагеодезиске криве потпростора V_m су специјални случај унион кривих потпростора V_m.

Како су q^μ контраваријантне компоненте вектора прве криве криве у односу на V_m, једначине (7.3) се могу изразити у облику

$$\frac{d^2y^\mu}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\mu\\ \varepsilon\nu\end{Bmatrix}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\nu}{ds}=\frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\dfrac{dy^\varepsilon}{ds}\dfrac{dy^\nu}{ds}}{L_{qr|}}T_{r|}{}^\mu,$$

одакле следи да су то диференцијалне једначине другог реда. Према томе, а с обзиром на то што систем (7.3) садржи m једначина, интеграција тог система одређује $2m$ константа.

С друге стране, из једначина (7.3) следи да јединични вектор тангенте парагеодезиске криве потпростора V_m задовољава услов

$$a_{\mu\nu}\,T_{r|}{}^\mu\frac{dy^\nu}{ds}=0, \tag{7.5}$$

тј. тангента парагеодезиске криве је управна на вектору $T_{r|}{}^\mu$. Једначина (7.5) даје један услов за $2m$ константа. Дакле, интеграција система (7.3) даје $2m-1$ произвољних константа. Те константе се могу одредити помоћу m координата тачке P на кривој и помоћу m компонената јединичног вектора у правцу криве у тачки P. Но, тај правац није потпуно произвољан, већ је ограничен условом (7.5). Стога кроз тачку потпростора V_m не пролази у сваком правцу парагеодезиска крива, као што је то случај са геодезиским линијама и унион кривама, но важи теорема:

Ако дата конгруенција кривих $\lambda_{r|}$ није нормална на V_m, кроз сваку тачку потпростора V_m, у сваком правцу локално Еуклидског простора E_{m-1} који је нормалан на вектору $T_{r|}{}^\mu$, постоји по једна парагеодезиска крива у односу на дату конгруенцију кривих $\lambda_{r|}$.

Ако је потпростор V_m површина, тј. ако је $m=2$, локално Еуклидски простор у горњој теореми је једнодимензиони, па постоји само један правац кроз уочену тачку потпростора V_2 у коме постоји парагеодезиска крива. Отуда, као последицу претходне теореме, имамо:

Ако дата конгруенција кривих $\lambda_{r|}$ није нормална на V_2, кроз тачку потпростора V_2 Риманова простора V_l постоји само једна парагеодезиска крива у односу на дату конгруенцију кривих $\lambda_{r|}$.

Приметимо да површина тродимензиона Еуклидског простора задовољава услове последње теореме и да, стога, кроз тачку површине тродимензиона Еуклидског простора пролази

при чему се услов (2.7) своди на услов

$$\frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\nu}}{ds}}{L_{qr|}} = \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\nu}}{ds}}{L_{pr|}}. \tag{7.4}$$

Према томе, (7.2), односно (7.3), јесу диференцијалне једначине парагеодезиских кривих потпростора V_m Риманова простора V_l. Оне се могу извести и из услова (7.1), аналогно поступку који је примењен у § 2.

Ако је $l=m+1$ (тј. ако је V_m хиперповршина околна Риманова простора V_l) систем (7.3) садржи m једначина, а то је потребан број једначина које одређују криву хиперповршине V_m.

Ако је $l>m+1$, број m $(l-m)$ једначина (7.3) је већи од m. Али релација (7.4) показује да размера $\frac{1}{L_{qr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\nu}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\nu}}{ds}$ не зависи од избора нормале на потпростор V_m. Према томе, једначине (7.3) су, за исто p и различито q, идентичне, па их, стога, и у случају $l>m+1$ има m.

Кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m, тј. кад је $T_{r|}{}^{\mu}=0$, једначине (7.3) се своде на једначине $q^{\mu}=0$, а то су диференцијалне једначине геодезиских линија потпростора V_m. Према томе, парагеодезиске криве су, у специјалном случају, геодезиске линије; другим речима:

Парагеодезиске криве су једна генерализација геодезиских линија.

Та генерализација се односи на ону особину геодезиских линија према којој је вектор прве кривине геодезиске линије потпростора V_m, у односу на околни простор V_l, нормалан на потпростору V_m. Наиме, за парагеодезиске криве потпростора V_m, тај вектор је, у свакој тачки, тангентан на криву дате конгруенције.

Ако је V_m тотално геодезиски потпростор, тј. ако је $\Omega_{q|\mu\nu}=0$ за свако q, једначине (7.3) се опет своде на једначине $q^{\mu}=0$. Стога, као специјални случај одговарајуће теореме за парагеодезиске просторе, имамо:

Ако је V_m тотално геодезиски потпростор околна простора V_l, парагеодезиска крива потпростора V_m је његова геодезиска линија.

Кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ таква да је вектор $T_{r|}{}^{\mu}$ управан на тангенти криве, тј. кад је

$$T_{r|\mu}\,\frac{dy^{\mu}}{ds}=0,$$

Диференцијалне једначине (6.4) унион кривих потпростора V_m могу се написати у облику

$$\frac{d^2 y^\mu}{d s^2} + \left(\begin{Bmatrix} \mu \\ \varepsilon \nu \end{Bmatrix} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}}{L_{qr|}} T_{r|}{}^{\mu} \right) \frac{d y^\varepsilon}{ds} \frac{d y^\nu}{ds} =$$

$$= - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu} \frac{d y^\varepsilon}{ds} \frac{d y^\nu}{ds}}{L_{qr|}} T_{r|\pi} \frac{dy^\pi}{ds} \frac{dy^\mu}{ds},$$

или, с обзиром на (8.2), у облику

$$\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} = \varphi \frac{dy^\mu}{ds}, \tag{84}$$

где је

$$\varphi = - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{qr|}} T_{r|\pi} \frac{dy^\pi}{ds}.$$

Дакле, унион криве потпростора V_m такође су аутопаралелне линије афиног простора који је везан конексијом (8.2), но сада, лук криве није афини параметар. Параметар $\bar{s}$ дефинисан једначином

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = C \exp\left\{ \int - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{qr|}} T_{r|\pi} \frac{dy^\pi}{ds} ds \right\},$$

где је C константа, јесте афини параметар криве дефинисане једначинама (8.4), па се, стога, те једначине коначно могу изразити овако:

$$\frac{d^2 y^\mu}{d\bar{s}} + \Gamma^\mu_{\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{d\bar{s}} \frac{dy^\nu}{d\bar{s}} = 0. \tag{8.5}$$

Јасно је да ће једначине (8.3) и (8.6) претстављати исту криву онда кад је $\bar{s} = as + b$ (a и b константе), тј. кад је идентички задовољена релација

$$\frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{qr|}} T_{r|\pi} \frac{dy^\pi}{ds} = 0.$$

Међутим, тај услов је, ако искључимо могућност $\Omega_{q|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} = 0$, еквивалентан услову

$$T_{r|\pi} \frac{dy^\pi}{as} = 0,$$

$\Omega_{q|\varepsilon\nu}$ $T_{r|}$.

8. *АФИНЕ И ПРОЈЕКТИВНЕ ОСОБИНЕ ПАРАГЕОДЕЗИСКИХ КРИВИХ.* — Диференцијалне једначине (7.3) парагеодезиских кривих могу се написати у облику

$$q^\mu - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\nu}{ds}}{L_{qr|}} T_{r|}{}^\mu \equiv \frac{d^2y^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\mu\\ \varepsilon\nu\end{Bmatrix}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\nu}{ds} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\nu}{ds}}{L_{qr|}} T_{r|}{}^\mu$$

$$\equiv \frac{d^2y^\mu}{ds^2} + \left(\begin{Bmatrix}\mu\\ \varepsilon\nu\end{Bmatrix} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}}{L_{qr|}} T_r{}^\mu\right)\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\nu}{ds} = 0,$$

или у облику

$$\frac{d^2y^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\varepsilon\nu}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\nu}{ds} = 0, \tag{8.1}$$

при чему су

$$\Gamma^\mu_{\varepsilon\nu} = \begin{Bmatrix}\mu\\ \varkappa\nu\end{Bmatrix} - \frac{\Omega_{q|\varepsilon\nu}}{L_{qr|}} T_r{}^\mu \tag{8.2}$$

коефицијенти симетричне конексије коју смо дефинисали у § 3.

Једначине (8.1) показују да су парагеодезиске криве потпростора V_m Риманова простора V_l аутопаралелне линије простора који је везан симетричном конексијом $\Gamma^\mu_{\varepsilon\nu}$, при чему је s афини параметар аутопаралелне линије. Стога можемо рећи:

Парагеодезиска крива потпростора V_m окарактерисана је особином да се њена тангента паралелно помера дуж криве, при чему је паралелизам дефинисан у односу на симетричну конексију $\Gamma^\mu_{\varepsilon\nu}$.

Једначине (4.3), које важе за парагеодезиски простор V_n, редукују се, за случај парагеодезиских кривих, на облик

$$\left(\frac{dy^\mu}{ds}\right)_{:\nu}\frac{dy^\nu}{ds} = 0 \tag{8.3}$$

где смо, као и у Глави I, са две тачке испред индекса означили генералисано коваријантно диференцирање у односу на конексију (6.2).

Лако је видети да су једначине (8.1) и (8.3) парагеодезиских кривих, као и особине ових кривих које следе из тих једначина, непосредна генерализација одговарајућих једначина, односно особина, геодезиских линија Риманова простора.

q^μ и $T_{r|}{}^\mu$. У току даљег излагања, уколико дукчије не буде наглашено, вектор парагеодезиске кривине (а такође и парагеодезиска кривина) криве односи се на фиксирану нормалу $N_{p|}{}^\alpha$ потпростора V_m.

Из свега изложеног, а на основу резултата § 7, следи:

Парагеодезиска крива, у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$, потпростора V_m може се дефинисати као она крива потпростора V_m, чији је вектор парагеодезиске кривине, у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$, за сваку од $l-m$ нормала потпростора V_m, у свакој тачки, нула вектор.

С обзиром на особину (8.3) парагеодезиских кривих, вектор парагеодезиске кривине произвољне криве C може се изразити у облику

$$w^\mu = \left(\frac{dy^\mu}{ds}\right)_{:\nu} \frac{dy^\nu}{ds}. \tag{9.2}$$

Из ралације (9.1) непосредно се види да се вектор парагеодезиске кривине криве своди на вектор прве кривине криве у односу на потпростор V_m, кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ управна на V_m. Дакле, кад је $T_{r|}{}^\mu = 0$, свих $l-m$ вектора парагеодезиске кривине криве се поклапају, и једнаки су вектору прве кривине у односу на потпростор V_m.

С друге стране, вектор w^μ парагеодезиске кривине криве је специјалан случај тензора M^μ_{ij} парагеодезиске кривине простора. Заиста, кад је простор V_n једнодимензиони, тј. кад је $r=1$, тензор M^μ_{ij}, одређен релацијом (5.1), редукује се на облик (9.1), дакле на вектор парагеодезиске кривине криве. Исто тако се и предња тврђења овог §-а могу добити из одговарајућих тврђења § 5 за $n=1$.

Приметимо да се, у случају кад крива припада површини која је смештена у тродимензиони Еуклидски простор, вектор парагеодезиске кривине своди на вектор релативне кривине, који је дефинисао В. Г. Грове [6].

Из релације (9.1) следи да се вектор $w^\mu_{(g)}$ парагеодезиске кривине геодезиске линије изражава у облику

$$w^\mu_{(g)} = -\frac{T_{r|}{}^\mu}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}, \tag{9.3}$$

а вектор прве кривине (у односу на V_m) парагедезиске криве, у облику

$$q^\mu_{(w)} = \frac{T_{r|}{}^\mu}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}. \tag{9.4}$$

На сличан начин, из (6.5) и (9.1) добивамо да су

$$r^\mu_{(w)} = \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{pr|}} T_{r|\pi} \frac{dy^\pi}{ds} \frac{dy^\mu}{ds} \tag{9.5}$$

контраваријантне компоненте вектора унион кривине парагеодезиске криве, а

$$w^{\mu}_{(u)} = -\frac{\Omega_{p\,|\,\varepsilon\nu}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\nu}}{ds}}{L_{pr\,|}}\,T_{r\,|\,\pi}\,\frac{dy^{\pi}}{ds}\,\frac{dy^{\mu}}{ds} \tag{9.6}$$

контраваријантне компонентне вектора парагеодезиске кривине унион криве.

Формуле (9.5) и (9.6) дају једнакост

$$r^{\mu}_{(w)} + w^{\mu}_{(u)} = 0,$$

што значи *да је збир вектора унион кривине парагеодезиске криве и вектора парагеодезиске кривине оне унион криве која са уоченом парагеодезиском кривом има заједничку тангенту, нула вектор.*

Релације (9.3) и (9.4) показују да су вектор парагеодезиске кривине геодезиске линије и вектор прве кривине парагеодезиске криве колинеарни са вектором $T_{r\,|}{}^{\mu}$, а релације (9.5) и (9.6) показују да су вектор унион кривине парагеодезиске криве и вектор парагеодезиске кривине унион криве колинеарни са тангентом криве.

Ако од једнакости (9.1) одузмемо једнакост (6.5), добивамо

$$w^{\mu} - r^{\mu} = -\frac{T_{r\,|\,\pi}}{L_{pr\,|}}\,\Omega_{p\,|\,\varepsilon\nu}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\nu}}{ds}\,\frac{dy^{\pi}}{ds}\,\frac{dy^{\mu}}{ds},$$

тј., према (9.6)

$$w^{\mu} - r^{\mu} = w^{\mu}_{(u)}.$$

Отуда:

Разлика вектора парагеодезиске кривине криве C и унион кривине криве C је вектор парагеодезиске кривине оне унион криве која са кривом C има заједничку тангенту.

Као последица овог тврђења, следи:

Разлика вектор парагеодезиске кривине криве C и њене унион кривине је увек вектор који је колинеаран са вектором тангенте криве C.

Обележимо са k_w парагеодезиску кривину криве C, тј. интензитет вектора w^{μ}, чије су компононте дате изразом (9.1). Тада је

$$k_w^2 = a_{\mu\nu}\,w^{\mu}\,w^{\nu}$$

или, с обзиром на (9.1),

$$k_w^2 = a_{\mu\nu}\left[q^{\mu} - \frac{T_{r\,|}{}^{\mu}}{L_{pr\,|}}\,\Omega_{p\,|\,\varepsilon\pi}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\pi}}{ds}\right]\left[q^{\nu} - \frac{T_{r\,|}{}^{\nu}}{L_{pr\,|}}\,\Omega_{p\,|\,\varepsilon\pi}\,\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\,\frac{dy^{\pi}}{ds}\right],$$

тј.

$$k_w^2 = a_{\mu\nu}\, q^\mu\, q^\nu - 2\, a_{\mu\nu}\, q^\mu\, T_{r|}{}^\nu \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, \frac{dy^\varepsilon}{ds}\, \frac{dy^\pi}{ds}}{L_{pr|}} + \tag{9.7}$$

$$+ a_{\mu\nu}\, T_{r|}{}^\mu\, T_{r|}{}^\nu \left(\frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, \frac{dy^\varepsilon}{ds}\, \frac{dy^\pi}{ds}}{L_{pr|}} \right)^2 .$$

Ако са $\beta_{r|}$ обележимо угао између вектора q^μ и $T_{r|}{}^\mu$, онда је, с обзиром на (1.25).

$$a_{\mu\nu}\, q^\mu\, T_{r|}{}^\nu = k_g \left(1 - \sum_p L_{pr|}^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos\beta_{r|}\,, \tag{9.8}$$

где је k_g прва кривина криве C у односу на потпростор V_m, тј.

$$k_g^2 = a_{\mu\nu}\, q^\mu\, q^\nu\,. \tag{9.9}$$

Замењујући (9.8), (9.9) и (1.25) у (9.7), добивамо за парагеодезиску кривину криве

$$k_w^2 = k_g^2 - 2\, k_g \left(1 - \sum_p L_{pr|}^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{L_{pr|}}\, \Omega_{p|\varepsilon\pi}\, \frac{dy^\varepsilon}{ds}\, \frac{dy^\pi}{ds} \cos\beta_{r|} + \tag{9.10}$$

$$+ \left(\frac{1}{L_{pr}}\, \Omega_{p|\varepsilon\pi}\, \frac{dy^\varepsilon}{ds}\, \frac{dy^\pi}{ds} \right)^2 \left(1 - \sum_p L_{pr|}^2\right).$$

Ако је крива C парагеодезиска, $k_w = 0$ за сваку нормалу $N_{p|}{}^\alpha$, а $\cos\beta_{r|} = 1$ јер су вектори $T_{r|}{}^\mu$ и q^μ колинеарни. Стога из (9.10) следи да је, за парагеодезиску криву C, задовољен услов

$$k_g - \frac{\left(1 - \sum_p L_{pr|}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{L_{pr|}}\, \Omega_{p|\varepsilon\pi}\, \frac{dy^\varepsilon}{ds}\, \frac{dy^\pi}{ds} = 0.$$

Ова релација се може добити и непосредно из (9.4). С друге стране, услов (2.10), који мора бити задовољен кад је V_n парагеодезиски простор, добива облик претходне релације кад је V_n парагеодезиска крива потростора V_m, у односу на конгруенцији $\lambda_{r|}$.

Упоређујући изразе (9.5) и (9.6), можемо рећи:

Квадрат унион кривине парагеодезиске криве једнак је квадрату парагеодезиске кривине оне унион криве која са уоченом парагеодезиском кривом има заједничку тангенту.

Како је унион кривина k_u произвољне криве C потпростора V_m дата изразом

$$(9.11)\qquad k_u^2 = k_g^2 - 2k_g\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\pi}{ds}\cos\beta_{r|}+$$

$$+\left(\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\pi}{ds}\right)^2\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)\sin^2\alpha_{r|}$$

при чему је $\alpha_{r|}$ угао између вектора $T_{r|}{}^\mu$ и тангентног вектора криве C, тј.

$$(9.12)\qquad a_{\mu\nu}\,T_{r|}{}^\mu\frac{dy^\nu}{ds}=\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{r|},$$

то, с обзиром на (9.10), имамо

$$(9.13)\qquad k_w^2-k_u^2=\left(\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\pi}{ds}\right)^2\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)\cos^2\alpha_{r|}.$$

Из (9.11) следи да за унион кривину геодезиске линије k_{ug} имамо

$$(9.14)\qquad k_{ug}^2=\left(\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\pi}{ds}\right)^2\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)\sin^2\alpha_{r|}.$$

а из (9.10) добавимо да парагеодезиска кривина геодезиске линије k_{wg} има облик

$$(9.15)\qquad k_{wg}^2=\left(\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{\varepsilon\pi}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\pi}{ds}\right)^2\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right).$$

На основу (9.13), (9.14) и (9.15) добивамо

$$k_w^2-k_u^2=k_{wg}^2-k_{ug}^2.$$

Из релација (9.14) и (9.15) такође следи

$$\frac{k_{ug}}{k_{wg}}=\sin\alpha_{r|}.$$

тј., *однос унион кривине и парагеодезиске кривине геодезиске линије не зависи од нормале $N_{p|}{}^\alpha$ простора V_m, и једнак је синусу угла који вектор $T_{r|}{}^\mu$ гради са тангентним вектором геодезиске линије.*

10. *ПРОЈЕКЦИЈА ВЕКТОРА ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ КРИВИНЕ КРИВЕ C НА ВЕКТОРУ ПРВЕ КРИВИНЕ КРИВЕ C, НА ТАНГЕНТИ КРИВЕ C И НА ВЕКТОРУ УНИОН КРИВИНЕ КРИВЕ C.* — 1° Обележимо са ρ угао између вектора w^μ парагеодезиске кривине и вектора q^μ прве кривине (у односу на простор V_m) криве C. Тада је

$$k_g\,k_w\cos\rho=a_{\mu\nu}q^\mu\left[q^\nu-\frac{T_{r|}{}^\nu}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^\varepsilon}{ds}\frac{dy^\pi}{ds}\right],$$

тј.

$$k_w \cos\rho = k_g - \frac{1}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\pi} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\pi}{ds} (1 - \sum_p L^2_{pr|})^{\frac{1}{2}} \cos\beta_{r|} .$$

Претпоставимо сад да је конгруенција $\lambda_{r|}$ таква да се вектор $T_{r|}{}^\mu$ може изразити као линеарна комбинација тангентног вектора γада$_j$ C и вектора прве кривине криве C, тј., да је

$$a_{\mu\nu} T_{r|}{}^\mu T_{r|}{}^\nu = a^2_{r|} + k_g^2 b^2_{r|} .$$

тј.

$$1 - \sum_p L^2_{pr|} = a^2_{r|} + k_g^2 b^2_{r|} .$$

С друге стране, из (10.1) добивамо

$$a_{\mu\nu} q^\mu T_{r|}{}^\nu = a_{\mu\nu} q^\mu \left(a_{r|} \frac{dy^\nu}{ds} + b_{r|} q^\nu \right) = k_g^2 b_{r|} ,$$

тако да, с обзиром на (9.8), имамо

$$(1 - \sum_p L^2_{pr|})^{\frac{1}{2}} \cos\beta_{r|} = k_g b_{r|} ,$$

Даље, из (10.1) следи

$$a_{\mu\nu} T_{r|}{}^\mu \frac{dy^\nu}{ds} = a_{\mu\nu} (a_{r|} \frac{dy^\mu}{ds} + b_{r|} q^\mu) \frac{dy^\nu}{ds} = a_{r|} ,$$

тако да, према (9.12), имамо

$$(1 - \sum_p L^2_{pr|})^{\frac{1}{2}} \cos\alpha_{r|} = a_{r|} .$$

Дакле,

$$(1 - \sum_p L^2_{pr|}) (\cos^2\alpha_{r|} + \cos^2\beta_{r|}) = 1 - \sum_p L^2_{pr|} .$$

па је, према томе,

$$\cos^2\alpha_{r|} + \cos^2\beta_{r|} = 1$$

тј.

(10.2) $$\cos^2\beta_{r|} = \sin^2\alpha_{r|} .$$

Отуда следи да је услов (10.1) потребан да би релација (10.1) била задовољена. Но ми ћемо сад показати да је тај услов и довољан.

У ту сврху посматрајмо систем од m узајано ортогоналних вектора $\frac{dy^\mu}{ds}$, $q^\mu, \xi_{\tau|}{}^\mu$ $(\tau=3,\ldots,m)$, потпростора V_m. Тада имамо

$$a_{\mu\nu}\frac{dy^\mu}{ds}\,\xi_{\tau_1}{}^\nu=0,\quad a_{\mu\nu}\,q^\mu\,\xi_{\tau|}{}^\nu=0,\quad a_{\mu\nu}\,\xi_{\sigma|}{}^\mu\,\xi_{\tau|}{}^\nu=\delta_\tau{}^\sigma\quad(\sigma,\tau=3,\ldots,m).$$

Пошто је $T_{r|}{}^\mu$ вектор потпростора V_m, можемо га изразити у облику

$$T_{\tau_1}{}^\mu=a_{r|}\frac{dy^\mu}{ds}+b_{r|}\,q^\mu+\sum_\tau c_{r\tau|}\,\xi_{\tau_1}{}^\mu. \tag{10.3}$$

Стога је

$$a_{\mu\nu}\,T_{r_1}{}^\mu\,T_{r|}{}^\nu=a_{\mu\nu}\left(a_{r|}\frac{dy^\mu}{ds}+b_{r|}\,q^\mu+\sum_\tau c_{r\tau|}\,\xi_{\tau|}{}^\mu\right)\left(a_{r|}\frac{dy^\nu}{ds}+\right.$$

$$\left.+\,b_{r|}\,q^\nu+\sum_\sigma c_{r\sigma|}\,\xi_{\sigma|}{}^\nu\right),$$

одакле следи

$$1-\sum_p L_{pr|}^2=a_{r|}^2+k_g^2\,b_{r|}^2+\sum_\tau c_{r\tau|}^2.$$

Међутим, из (10.3) добивамо

$$a_{\mu\nu}\,q^\mu\,T_{r|}{}^\nu=a_{\mu\nu}\,q^\mu\left(a_{r|}\frac{dy^\nu}{ds}+b_{r|}\,q^\nu+\sum_\tau c_{r\tau|}\,\xi_{\tau|}{}^\nu\right)=b_{r|}\,k_g^2,$$

што се, с обзиром на (9.8), своди на

$$\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos\beta_{r|}=b_{r|}\,k_g.$$

На сличан начин добивамо

$$a_{\mu\nu}\frac{dy^\mu}{ds}\,T_{r|}{}^\nu=a_{\mu\nu}\left(a_{r|}\frac{dy^\nu}{ds}+b_{r|}\,q^\nu+\sum_\tau c_{r\tau|}\,\xi_{\tau|}{}^\nu\right)=a_{r|}$$

тј.

$$\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{r|}=a_{r|}.$$

Из свега изложеног следи

$$\left(1-\sum_p L_{pr|}^2\right)(\cos^2\alpha_{r|}+\cos^2\beta_{r|})=a_{r|}^2+k_g^2\,b_{r|}^2,$$

тако да је

$$\left(a_{r|}^2+k_g^2\,b_{r|}^2+\sum_\tau c_{\tau r|}^2\right)(\cos^2\alpha_{r|}+\cos^2\beta_{r|})=a_{r|}^2+k_g^2\,b_{r|}^2.$$

Према томе, да би релација (10.2) била задовољена, мора бити $c_{r\tau|}=0$ за свако r. Отуда:

Потребан и довољан услов да релација (10.2) *буде задовољена јесте да се вектор* $T_{r|}{}^{\mu}$ *може изразити као линеарна комбинација тенгентног вектора криве и вектора праве кравине криве, тј., важи релација* (10.1).

Ако је задовољен услов (10.2), пројекција вектора парагеодезиске кривине криве C на њеном вектору прве кривине, изражава се у облику

$$(10.4)\qquad k_w\cos\rho=k_g-\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\frac{dy^{\pi}}{ds}\left(1-\sum_{p}L_{pr|}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\alpha_{r|}.$$

Међутим, десна страна овог израза је, под условом (10.1), тј. (10.2), унион кривина криве C, што следи из (9.11). Отуда теорема:

Пројекција вектора парагеодезиске кривине криве C *на њеном вектору прве кривине је унион кривина криве онда и само онда кад је конгруенција* $\lambda_{r|}$ *таква да се вектор* $T_{r|}{}^{\mu}$ *изражава као линеарна комбинација тангентног вектора криве и вектора њене прве кривине, тј. кад је задовољен услов* (10.1).

Услов (10.1) је увек задовољен кад је простор V_m површина, дакле кад је $m=2$. Стога, као последицу претходне теореме, имамо:

За криву C, *која припада потпростору* V_2, *пројекција вектора парагеодезиске кривине криве на њеном вектору прве кривине је увек једнака унион кривини криве* C.

Одговарајућа теорема за криве на површини тродимензиона Еуклидског простора, коју је извео Grove, непосредна је последица последње теореме.

2° Ако са σ означимо угао који вектор парагеодезиске кривине криве C гради са њеним вектором тангенте, имамо

$$k_w\cos\sigma=a_{\mu\nu}w^{\mu}\frac{dy^{\nu}}{ds}=a_{\mu\nu}\left[q^{\mu}-\frac{T_{r|}{}^{\mu}}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\frac{dy^{\pi}}{ds}\right]\frac{dy^{\nu}}{ds},$$

тј.

$$(10.5)\qquad k_w\cos\sigma=-\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\frac{dy^{\varepsilon}}{ds}\frac{dy^{\pi}}{ds}\left(1-\sum_{p}L_{pr|}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha_{r|}.$$

С обзиром (9.6), израз (10.5) се може написати у облику

$$k_w\cos\sigma=k_{wu},$$

где смо са k_{wu} обележили парагеодезиску криаину оне унион криве која са кривом C има заједничу тангенту. Стога:

Пројекција вектора парагеодезиске кривине криве C на тангенти криве је парагеодезиска кривина оне унион криве која са кривом C, у уоченој тачки, има заједничху тангенту.

3⁰ Обележимо са Ψ угао између вектора w^μ парагеодезиске кривине и вектора r^μ унион кривине криве C, при чему се и један и други вектор односе на исту конгруенцију $\lambda_{r|}$ и исту нормалу $N_{p_1}{}^\alpha$ потпростора V_m. Тада је

$$k_w\, k_u \cos\Psi = a_{\mu\nu}\, w^\mu\, r^\nu =$$

$$= a_{\mu\nu}\left[q^\mu - \frac{T_{r|}{}^\mu}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,\frac{dy^\pi}{ds}\right]\left[q^\nu - \frac{1}{L_{pr_1}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,\frac{dy^\pi}{ds}\left(T_{r|}{}^\nu - T_{r|\rho}\,\frac{dy^\rho}{ds}\,\frac{dy^\nu}{ds}\right)\right]$$

тј.

$$k_w\, k_u \cos\Psi = a_{\mu\nu}\, w^\mu\, w^\nu +$$

$$+\frac{T_{r|\rho}}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,\frac{dy^\pi}{ds}\,\frac{dy^\rho}{ds}\left(a_{\mu\nu}\,q^\mu\,\frac{dy^\nu}{ds} - \frac{1}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,\frac{dy^\pi}{ds}\,a_{\mu\nu}\,T_{r|}{}^\mu\,\frac{dy^\nu}{ds}\right),$$

што се, с обзиром на (9.12), може написати у облику

$$k_w\, k_u \cos\Psi = k_w^2 - \left(\frac{1}{L_{pr|}}\,\Omega_{p\,\varepsilon\pi}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,\frac{dy^\pi}{ds}\right)^2 (1 - \sum_p L_{pr|}^2)\cos^2\alpha_{r|}\,.$$

После замене k_w^2 вредношћу коју даје једнакост (9.10), имамо

$$(10.6)\quad k_w\, k_u \cos\Psi = k_g^2 - 2k_g\,(1-\sum_p L_{pr|}^2)^{\frac{1}{2}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,\frac{dy^\varepsilon}{as}\,\frac{dy^\pi}{ds}\,\frac{\cos\beta_{r|}}{L_{pr|}} +$$

$$+\left(\frac{1}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,\frac{dy^\pi}{ds}\right)^2 (1 - \sum_p L_{pr|}^2)\sin^2\alpha_{r_1}\,.$$

Но, десна страна ове једначине је, према (9.11), квадрат унион кривине криве C, па се премв томе, (10.6) своди на

$$(1\qquad \frac{k_u}{k_w} = \cos\Psi.$$

Отуда теорема:

Однос унион кривине и парагеодезиске кривине криве C једнак је косинусу угла који граде вектор унион кривине и вектор парагеооезиске кривине криве C,

која се може изразити и на следећи начин:

Пројекција вектора парагеодезиске кривине криве C на њеном вектору унион кривине једнака је унион кривини криве C.

Вектор унион кривине криве C је увек ортогоналан на тангенти те криве (§ 6). Ако је конгруенција $\lambda_{r|}$ таква да се вектор $T_{r|}{}^\mu$ изражава у облику (10.1), вектор унион кривине криве C је

колинеаран са вектором прве кривине криве, па је, стога, угао Ψ између вектора парагеодезиске кривине криве C и вектора унион кривине криве једнак углу ρ између вектора парагеодезиске кривине криве и њеног воктора прве кривине (§ 10.1[9]). Према томе, једнакост (10.4) и теореме које из ње следе последице су једнакости (10.6), тј. (10.7), односно, последице теорема које оне изражавају.

III. ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ ОСОБИНЕ КРИВИХ ДОБИВЕНЕ ПОСМАТРАЊЕМ ИЗ ОКОЛНА ПРОСТОРА

11. *РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА ПРВЕ КРИВИНЕ КРИВЕ У ОДНОСУ НА ОКОЛНИ ПРОСТОР И ВЕКТОРА ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ КРИВИНЕ КРИВЕ.* — Ако је простор V_n смештен у потпростору V_m Риманова простора V_l, онда је тензор $H_{ij}{}^{\alpha}$, одређен релацијом (1.11), његов тензор прве кривине у простору V_l, а $M_{ij}{}^{\mu}$, дефинисан једнакошћу (5.1), тензор је парагеодезиске кривине простора V_n. У §5 смо показали да се између тензора $H_{ij}{}^{\alpha}$ и $M_{ij}{}^{\mu}$ може, под условом

$$\frac{\Omega_{q|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{qr|}} = \frac{\Omega_{p|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pr|}}, \tag{1.11}$$

успоставити релација

$$H_{ij}{}^{\alpha} = M_{ij}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} + \frac{\lambda_{q|}{}^{\alpha}}{L_{rq|}}\, \Omega_{q|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}\,. \tag{11.2}$$

Кад је $n=1$, тј. кад је V_n нека крива C, једнакост (11.2) добива облик

$$\eta^{\alpha} = w^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu} + \frac{\lambda_{q|}{}^{\alpha}}{L_{rq|}}\, \Omega_{q\,|\mu\nu}\, \frac{dy^{\mu}}{ds}\, \frac{dy^{\nu}}{ds}\,, \tag{11.3}$$

а услов (11.1) облик

$$\frac{\Omega_{q\,|\mu\nu}\, \dfrac{dy^{\mu}}{ds}\, \dfrac{dy^{\nu}}{ds}}{L_{qr|}} = \frac{\Omega_{p\,|\mu\nu}\, \dfrac{dy^{\mu}}{ds}\, \dfrac{dy^{\nu}}{ds}}{L_{pr|}}\,. \tag{11.4}$$

Покушаћемо да релацију (11.3) изведемо непосредно. У ту сврху посматрајмо криву $C: y^{\mu} = y^{\mu}(s)$, која припада потпростору V_m. Тада су $\dfrac{dy^{\mu}}{ds}$ контраваријантне компоненте јединичног вектора тангенте на криву C у односу на координате y^{μ}, а $\dfrac{dz^{\alpha}}{ds}$ контрава-

ријантне компоненте истог вектора, само у односу на координате z^α, па је

$$\frac{dz^\alpha}{ds} = z^\alpha{}_{,\mu} \frac{dy^\mu}{ds}. \tag{11.5}$$

Унутрашњи извод једнакости (11.5) у односу на конексију $\Gamma^\mu_{\varepsilon\nu}$, (§3) гласи

$$\left(\frac{dz^\alpha}{ds}\right)_{:\nu} \frac{dy^\nu}{ds} = (z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} + z^\alpha{}_{,\mu} \left(\frac{dy^\mu}{ds}\right)_{:\nu} \frac{dy^\nu}{ds}, \tag{11.6}$$

при чему смо, као и у §3, са две тачке обележили генералисано коваријантно диференцирање у односу на конексију $\Gamma^\mu_{\varepsilon\nu}$.

Како су z^α инваријанте с обзиром на трансформацију координата у потпростору V_m, то се израз (11.6) може написати у облику

$$\frac{d^2 z^\alpha}{ds^2} = (z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} + \left(\frac{dy^\mu}{ds}\right)_{:\nu} \frac{dy^\nu}{ds} z^\alpha{}_{,\mu}. \tag{11.7}$$

С друге стране је

$$(z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu} = \frac{\partial}{\partial y^\nu} z^\alpha{}_{,\mu} - \left\{ {\varepsilon \atop \mu\nu} \right\} z^\alpha{}_{,\varepsilon} + \frac{\Omega_{p|\mu\nu}}{L_{pr|}} T_{r|}{}^\varepsilon z^\alpha{}_{,\varepsilon} = z^\alpha{}_{,\mu\nu} + \frac{\Omega_{p|\mu\nu}}{L_{pr|}} T_{r|}{}^\varepsilon z^\alpha{}_{,\varepsilon}$$

Међутим је ([4], јед. (47.4))

$$z^\alpha{}_{,\mu\nu} = - \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} z^\beta{}_{,\mu} z^\gamma{}_{,\nu} + \sum_p \Omega_{p|\mu\nu} N_{p|}{}^\alpha,$$

па је, према томе,

$$(z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu} = - \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} z^\beta{}_{,\mu} z^\gamma{}_{,\nu} + \sum_p \Omega_{p|\mu\nu} N_{p|}{}^\alpha + \frac{\Omega_{p|\mu\nu}}{L_{pr|}} T_{r|}{}^\varepsilon z^\alpha{}_{,\varepsilon}$$

Сменом $(z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu}$ из ове једначине у (11.7) добивамо, с обзиром на (11.5),

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \frac{dz^\beta}{ds} \frac{dz^\gamma}{ds} = \tag{11.8}$$

$$= \sum_p \Omega_{p|\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} N_{p|}{}^\alpha + \frac{T_{r|}{}^\varepsilon}{L_{pr|}} \Omega_{p|\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} z^\alpha{}_{,\varepsilon} + \left(\frac{dy^\mu}{ds}\right)_{:\nu} \frac{dy^\nu}{ds} z^\alpha{}_{,\mu}.$$

Ако претпоставимо да важи услов (11.4), постоји једнакост

$$\sum_p \Omega_{p|\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} N_{p|}{}^\alpha = \frac{1}{L_{pr|}} \Omega_{p|\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} \sum_p L_{pr|} N_{p|}{}^\alpha,$$

па се (11.8) може написати у облику

$$\frac{d^2 z^\alpha}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} \frac{dz^\beta}{ds} \frac{dz^\gamma}{ds} = \frac{1}{L_{pr|}} \Omega_{p|\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} \left(T_{r|}{}^\varepsilon \; z^\alpha{}_{,\varepsilon} + \sum_p L_{pr|} N_{p|}{}^\alpha \right) +$$

$$+ \left(\frac{dy^\mu}{ds} \right)_{:\nu} \frac{\nu dy^\nu}{ds} \; z^\alpha{}_{,\mu}$$

$$\eta^\alpha = w^\mu \; z^\alpha{}_{,\mu} + \frac{1}{L_{pr|}} \Omega_{p|\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} \lambda_{r|}{}^\alpha . \tag{11.3}$$

Релација (11.3) показује да се вектор прве кривине криве у односу на околни простор, под условом (11.4), може раставити на компоненту која је тангентна на потпростору, а која је вектор парагеодезиске кривине криве, и на компоненту у правцу вектора конгруенције.

Последице једнакости (11.3) су:

1° Ако је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m, тј. ако је $T_{r|}{}^\mu = 0$, конексија $\Gamma^\varepsilon_{\mu\gamma}$ се, према (3.2), своди на Christoffel-ове симболе друге врсте у односу на метрички тензор потпростора, а $\lambda_{r|}{}^\alpha$ на $\sum_p L_{pr|} N_p{}^\alpha$, па се, стога, (11.3) своди на облик:

$$\eta^\alpha = \left(\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \pi\nu \end{Bmatrix} \frac{dy^\pi}{as} \frac{dy^\nu}{ds} \right) z^\alpha{}_{,\mu} + \sum_p \Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{es} N_{p|}{}^\alpha .$$

Међутим, то је позната релација (6.3) између вектора првих кривина криве у односу на околни простор и у односу на потпростор коме та крива припада.

Према томе, *једнакост* (11.3), *је, под условом* (11.4), *уопштена релација* (6.3).

2° Кад је околни простор V_l Еуклидски простор, компоненте вектора прве кривине криве C у односу на околни простор се редукују на

$$\eta^\alpha = \frac{d^2 z^\alpha}{ds^2} ,$$

па се релација (11.3) може написати у облику

$$\frac{d^2 z^\alpha}{ds^2} = w^\mu z^\alpha{}_{,\mu} + \frac{1}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} \lambda_{r|}{}^\alpha .$$

Ова је, пак, релација непосредна генерализација једнакости коју је, за криве на површини тродимензиона Еуклидског простора, дао G. Grove [6].

3° Ако је $w^\mu = 0$, релација (11.3) се своди на

$$\eta^\alpha = \frac{1}{L_{pr|}} \Omega_{p|\mu\nu} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dv^\nu}{ds} \lambda_{r|}{}^\alpha ,$$

одакле следи ова, још у § 7 изведена особина парагеодезиске криве:

Вектор прве кривине, у односу на околни простор, парагеодезиске криве потпростора V_m у свакој тачки је колинеаран са вектором тангенте оне криве дате конгруенције $\lambda_{r|}$, која пролази кроз уочену тачку.

12. *ВЕКТОР ПАРАГЕОДЕЗИСКЕ КРИВИНЕ КРИВЕ D ПРОСТОРА V_n КОЈИ ЈЕ СМЕШТЕН У ПОТПРОСТОРУ V_m РИМАНОВА ПРОСТОРА V_l.* Посматрајмо сад произвољну криву $D : x^i = x^i(s)$ простора V_n, који је смештен у потпростору V_m Риманова простора V_l. Вектор η^α прве кривине криве D у околном простору V_l одређен је релацијом (6.2), вектор q^μ њене прве кривине у односу на потпростор V_m дефинисан је релацијом (6.1), а вектор p^i такав да је

$$p^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \tag{12.1}$$

вектор је прве кривине криве D у односу на простор V_n.

Вектори p^i и q^μ су везани релацијом

$$q^\mu = p^i\, y^\mu{}_{,i} + \sum_a \omega_{a|ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} n_{a|}{}^\mu . \tag{12.2}$$

Ако D посматрамо као криву потпростора V_m простора V_l, онда су (§ 9)

$$w^\mu = q^\mu - \frac{T_{r|}{}^\mu}{L_{pr_|}} \Omega_{p|\varepsilon\nu} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} \tag{12.3}$$

компоненте њеног вектора парагеодезиске кривине. Но D можемо посматрати и као криву потпростора V_n простора V_l. У том случају, за компоненте вектора парагеодезиске кривине криве D, у односу на исту конгруенцију $\lambda_{r|}$, имамо

$$v^i = p^i - \frac{t_{r|}{}^i}{L_{xr|}} \overline{\omega}_{x|lk} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} . \tag{12.4}$$

С обзиром на (12.2) и (1.22), једнакост (12.3) можемо написати у облику

$$w^\mu = p^i\, y^\mu{}_{,i} + \sum_a \omega_{a|ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} n_{a|}{}^\mu -$$

$$- \frac{t_{r_|}{}^i\, y^\mu{}_{,l} + \sum_a l_{ar|}\, n_{a|}{}^\mu}{L_{pr_|}} \Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^\varepsilon{}_{,l}\, y^\nu{}_{,k} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^k}{ds} ,$$

тј. у облику

$$w^{\mu} = \left(p^{i} - \frac{t_{r|}{}^{i}}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}\, \frac{dx^{l}}{ds}\, \frac{dx^{k}}{ds} \right) y^{\mu}{}_{,i} +$$

$$+ \sum_{a} \left[\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right] \frac{dx^{l}}{ds}\, \frac{dx^{k}}{ds}\, n_{a|}{}^{\mu},$$

што се, с обзиром на (1.17) и (1.24), своди на

$$(12.5) \qquad \dot{w}^{\mu} = \left(p^{i} - \frac{t_{r|}{}^{i}}{L_{pr|}}\, \overline{\omega}_{p|lk}\, \frac{dx^{l}}{ds}\, \frac{dx^{k}}{ds} \right) y^{\mu}{}_{,i} +$$

$$+ \sum \left[\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right] \frac{dx^{l}}{ds}\, \frac{dx^{k}}{ds}\, n_{a|}{}^{\mu}.$$

Како индекс x узима вредност од $n+1$ до l, а индекс p од $m+1$ до l (§ 1), то се за одређену нормалу $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m, претходна релација, с обзиром на (12.4), може коначно написати у облику

$$(12.6) \qquad w^{\mu} = v^{i}\, y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{a} \left[\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right] \frac{dx^{l}}{ds}\, \frac{dx^{k}}{ds}\, n_{a|}{}^{\mu}.$$

Отуда следи:

Вектор парагеодезиске кривине криве D, кад се D посматра као крива потпростора V_m околна простора V_l, може се раставити на две компоненте: једну која је тангентна на V_n и која је вектор парагеодезиске кривине криве D кад се D посматра као крива потпростора V_n околна простора V_l, и другу која је нормална на потпростору V_m. При томе се оба вектора односе на исту конгруенцију $\lambda_{l|}$ и на исту нормалу $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m.

Наведимо следеће последице једнакости (12.6):

1° Ако је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m, онда је $T_{r|}{}^{\mu} = 0$, па се вектор w^{μ}, према (12.3), своди на вектор q^{μ} прве кривине криве D у односу на V_m. Но ако је $T_{r|}{}^{\mu} = 0$, из (1.22) следи да је такође $t_{l|}{}^{i} = 0$ и $l_{ar|} = 0$. Стога се у овом случају, према (12.4), вектор v^{i} редукује на вектор p^{i} прве кривине криве D у односу на V_m. Према томе:

Ако је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m, релација (12.6) *се своди на релацију* (12.2), *што значи да је* (12.6) *једна генерализација познате релације* (12.2).

2° Ако је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална само на потпростору V_n, тј. ако је само $t_{r|}{}^{i} = 0$, уместо (12.6) имамо

$$w^{\mu} = p^{i}\, y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{a} \left[\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right] \frac{dx^{l}}{ds}\, \frac{dx^{k}}{ds}\, n_{a|}{}^{\mu}.$$

Но, кад је $t_r|^i = 0$, из (5.1), на основу (1.22), следи да за компоненте тензора $M_{ij}{}^{\mu}$ парагеодезиске кривине простора V_n, имамо

$$M_{lk}{}^{\mu} = \sum_a \left[\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right] n_{a|}{}^{\mu},$$

што значи да се (12.7) може изразити у облику

$$w^{\mu} = p^l\, y^{\mu}{}_{,l} + M_{lk}{}^{\mu}\, \frac{dx^l}{ds}\, \frac{dx^k}{ds}.$$

3° Ако је за криву D задовољен услов $w^{\mu} = 0$, из (12.6) следи да тада мора бити и $v^i = 0$, а у правцу криве је

$$\sum_a \left(\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right) \frac{dx^l}{ds}\, \frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{12.8}$$

Отуда следи:

Ако је D парагеодезиска крава кад се она посматра као крива потпростора V_m простора V_l, онда су сви вектори v^i парагеодезиске кривине криве D у односу на простор V_n, а с обзиром на оне нормале потпростора V_n које су нормале и потпростора V_m, једнаки нули, а у правцу криве је задовољен услов (12.8).

4° Ако је $v^i = 0$, релација (12.6) добива облик

$$w^{\mu} = \sum_a \left(\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right) \frac{dx^i}{ds}\, \frac{dx^j}{ds}\, n_{a|}{}^{\mu}, \tag{12.9}$$

тј.: *Вектор парагеодезиске кривине у односу на V_m простора V_l, парагеодезиске криве потпростора V_n простора V_l, нормалан је на простору V_n, и изражава се у облику* (12.9).

Да би за сваку криву D за коју је $v^i = 0$, било и $w^{\mu} = 0$, мора бити

$$\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} = 0 \quad \text{за свако } a.$$

Упоређујући овај услов са једначинама (2.10) видимо да је он задовољен кад је V_n парагеодезиски простор потпростора V_m Риманова простора V_l. Дакле:

Свака парагеодезиска крива парагеодезиског простора V_n, који је смештен у потпростору V_m околна Риманова простора V_l, јесте парагеодезиска и кад се посматра као крива потпростора V_m околна простора V_l.

Ова особина парагеодезиских простора је генерализација добро познате особине тотално геодезиских простора (§ 1 ; [4] стр. 183).

Из (12.6) следи да је за сваку криву парагеодезиског простора

$$w^{\mu} = v^{i}\, y^{\mu}{}_{,i}\,,$$

тј.: *Ако крива D припада парагеодезиском простору* V_n, *онда је њен вектор парагеодезиске кривине у односу на* V_m *простора* V_l *у исти мах вектор парагеодезиске кривине у односу на* V_n *простора* V_l *при чему се овај последњи посматра из простора* V_m.

И ова теорема је генерализација аналогног тврђења које важи за прве кривине кривих тотално геодезиских простора.

5⁰ Користећи (12.6) добивамо да су парагеодезиска кривина k_w криве D у односу на V_m простора V_l и парагеодезиска кривина k_v криве D у односу на V_n простора V_l везане релацијом

$$k_w^2 = k_v^2 + \sum\left[\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right]$$

$$\left[\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\pi}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right]\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^l}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}\,.$$

13. *РЕЛАТИВНА КРИВИНА ПОТПРОСТОРА* V_n. У § 12 смо показали да се вектор парагеодезиске кривине криве D, кад се она посматра као крива потпростора V_m околна простори V_n, може раставити на две компоненте: једну која је тангентна на V_n, и која је вектор перагеодезиске кривине криве D кад се она посматра као крива потпростора V_n околна простора V_l, и другу која је нормална на потпростору V_n. Испитивања која смо спровели у глави II могу се у потпуности применити и на вектор v^i парагеодезиске кривине криве D кад се она посматра у потпростору V_n околна простора V_l, тј. на тангентну компоненту вектора w^{μ}. У овом параграфу посматраћемо ону компоненту вектора w^{μ} која је нормална на потпростору V_n, тј. компоненту

$$\xi^{\mu} = \sum_a \left[\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right]\frac{dx^l}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}\, n_{a|}{}^{\mu}\,. \tag{13.1}$$

Вектор (13.1) назваћемо *вектором релативне кривине потпростора у односу на конгруенцију* $\lambda_{r|}$, или кратко *вектором релативне кривине потпростора* V_n. Као што се види из (13.1), тај вектор не зависи од избора $m-n$ јединичних, узајамно ортогоналних, вектора $n_{a|}{}^{\mu}$ потпростора V_m који су нормални на V_n, али зависи од избора нормале $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m.

Обележимо са $\frac{1}{R_{\lambda|}}$ интензитет вектора ξ^{μ}. Тада је, према (13.1),

$$\frac{1}{R^2{}_{\lambda|}} = \sum_a \left(\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right)$$

$$\left(\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, y^{\varepsilon}{}_{,l}\, y^{\pi}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right)\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}\,\frac{dx^l}{ds} \tag{13.2}$$

И ова величина не зависи од $m-n$ нормала $n_{a|}{}^{\mu}$ потпростора V_n, али зависи, осим од конгруенције $\lambda_{r|}$, и од избора нормале $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m. За одређену нормалу $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m, параметри $l_{ar|}$ и $L_{pr|}$ су, у тачки P потпростора V_n, константе, па $\frac{1}{R_{\lambda|}}$ зависи само од правца којим се, у V_n, приближавамо тачки P, и, према томе, једнака је за све криве потпростора V_n које у P имају заједничку тангенту.

Величину $\frac{1}{R_{\lambda|}}$ звaћемо *релативна кривина потпростора V_n у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$* за дати правац, а $R_{\lambda|}$ *полупречник релативне кривине потпростора V_n у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$ за дати правац.*

Из релације (2.10) видимо да је релативна кривина (па, према томе, и вектор релативне кривине) парагеодезиског простора V_n, у свакој тачки и за сваки правац, једнак нули.

Лако се може показати да се вектор релативне кривине, релативна кривина и полупречник релативне кривине потпростора V_n своде, респективно, на вектор нормалне кривине, нормалну кривину и полупречник нормалне кривине потпростора V_n, кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m. Заиста, тада је, $T_{r|}{}^{\mu}=0$, па имамо: за ζ^{μ}

$$\sum_a \omega_{a|ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}n_{a,}{}^{\mu},$$

а за $\frac{1}{R^2{}_{\lambda|}}$

$$\sum_a \omega_{a|ij}\ \omega_{a|lk}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}.$$

Но, први израз је вектор нормалне кривине, а други израз је квадрат нормалне кривине потпростора V_n ([4], стр. 165).

Како је тензор

$$\Psi_{a|ij}=\omega_{a|ij}-\frac{l_{ar|}}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\nu}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\nu}{}_{,j}$$

симетричан у односу на индексе i и j, то можемо одредити главне правце потпростора V_n у односу на тензор $\Psi_{a|ij}$, тј. правце $c_{k|}{}^{i}$ тако да је

$$(R_{\lambda k|}\,\Psi_{a|ij}-g_{ij})\,c_{k|}{}^{i}=0, \tag{13.3}$$

где су $R_{\lambda k|}$ корени детерминантне једначине

$$|\,R_{\lambda k|}\,\Psi_{a|ij}-g_{ij}\,|=0. \tag{13.4}$$

Главне правце у односу на тензор $\Psi_{a|ij}$ назваћемо *главним правцима релативне кривине потпростора V_n у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$*. Полупречник релативне кривине за главни правац релативне кривине је *главни полупречник релативне кривине.*

Главни правци у односу ма на који симетрични коваријантни тензор другог реда узајамно су ортогонални, па су, стога, и главни правци релативне кривине узајамно ортогонални. Како у свакој тачки потпростора V_n, за одређену нормалу $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m, имамо $m-n$ тензора $\Psi_{a|ij}$, то, ако су сви корени једначине (13.3) прости (што ћемо стално претпостављати у овом параграфу) једначине (13.3) одређују $m-n$ система од по n ортогоналних вектора, који су главни правци релативне кривине потпростора V_n.

Задржаћемо се сад на случају кад је V_n хиперповршина потпростора V_m. Тада је $a=1$, па у свакој тачки хиперповршине V_{m-1}, за одређену нормалу $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m, имамо само један систем од n узајамно ортогоналних вектора — главних праваца релативне кривине потпростора V_n. С друге стране, релативна кривина хиперповршине V_{m-1} потпростора V_m изражава се у облику

$$\frac{1}{R_\lambda} = \left(\omega_{a|ij} - \frac{l_{ar|}}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\nu}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\nu}{}_{,j} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}.$$

С обзиром на особине главних праваца који су одређени симетричним коваријантним тензором другог реда ([4], стр. 113) следи *да релативна кривина хиперповршине има екстремне вредности за главне правце релативне кривине хиперповршине V_{m-1} потпростора V_m.*

Контраваријантне компоненте $c_{k|}{}^{i}$ n узајамно ортогоналних јединичних вектора главних праваца хиперповршине V_{m-1} задовољавају релације

$$g_{ij}\, c_{h|}{}^{i}\, c_{k|}{}^{j} = \delta_k^h. \tag{13.5}$$

Нека су c^i контраваријантне компоненте произвољног јединичног векторског поља у V_{m-1}. Тада је

$$g_{ij}\, c^i\, c^j = 1.$$

Како се векторско поље c^i може раставити на компоненте у правцима вектора $c_{k|}{}^{i}$, то је

$$c^i = \cos\gamma_1\, c_{1|}{}^{i} + \cos\gamma_2\, c_{2|}{}^{i} + \ldots + \cos\gamma_n\, c_{n|}{}^{i}, \tag{13.6}$$

при чему су $\gamma_{s|}$ углови између вектора c^i и $c_{s|}{}^{i}$, тј.

$$\cos\gamma_{s|} = g_{ij}\, c^i\, c_{s|}{}^{j}.$$

У правцу c^i релативна кривина хиперповршине V_{m-1} има вредност

$$\frac{1}{R_\lambda} = \Psi_{ij}\, c^i\, c^i \tag{13.7}$$

С друге стране, за главни правац $c_{h|}{}^{i}$ релативна кривина хипер-

површине се изражава у облику

$$\frac{1}{R_{\lambda h|}} = \Psi_{ij}\, c_{h|}{}^{i}\, c_{h|}{}^{j} \tag{13.8}$$

Ако у (13.7) заменимо (13.6) и узмемо у обзир (13.8), добивамо

$$\frac{1}{R_\lambda} = \frac{\cos^2 \gamma_1}{R_{\lambda 1}} + \frac{\cos^2 \gamma_2}{R_{\lambda 2}} + \ldots + \frac{\cos^2 \gamma_n}{R_{\lambda n}}\,. \tag{13.9}$$

Како генералисана Euler-ова формула гласи ([4], јед. 45.8)

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \varepsilon_1}{R_{n1}} + \frac{\cos^2 \varepsilon_2}{R_{n2}} + \ldots + \frac{\cos^2 \varepsilon_n}{R_{nn}}\,,$$

где су ε_s углови између произвољног вектора c^i и главних праваца нормалне кривине, а R_{ns} главни полупречници нормалне кривине, то једнакост (13.9) можемо сматрати *генералисаном Euler-овом формулом за главне полупречнике релативне кривине хиперповршине* V_{m-1} потпростора V_m Риманова простора V_l.

У случају кад је V_n ма какав потпростор простора V_m, извршимо аналогна разматрања за сваку нормалу $n_{a|}{}^{\mu}$ потпростора V_n у простору V_m. На тај наиин добивамо $m-n$ једначина облика (13.9), које су *генералисана Euler-ова формула за главне полупречнике релативне кривине потпростора* V_n *који је смештен у потпростору* V_m *Риманова простора* V_l.

14. *ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈЕ MEUSNIER-OBE ТЕОРЕМЕ.* – Обележимо са k_ν интензитет вектора v^i, тј. парагеодезиску кривину криве D кад се D посматра као крива потпростора V_n околна простора V_l. Тада је

$$k_\nu = \frac{1}{\rho_\nu} = \sqrt{g_{ij}\, v^i\, v^j}\,,$$

при чему смо са ρ_ν обележили полупречник парагеодезиске кривине криве D у односу на потпростор V_n околна простора V_l. Исто тако је (§ 9)

$$k_w = \sqrt{a_{\mu\nu}\, w^\mu\, w^\nu}$$

парагеодезиска кривина, а $\rho_w = \frac{1}{k_w}$ полупречник парагеодезиске кривине криве D у односу на потпростор V_m околна простора V_l.

Ако са $\overline{w}^\mu$ обележимо компоненте вектора v^i у y-онима, тј. ако ставимо

$$\overline{w}^\mu = v^i\, y^\mu{}_{,i}$$

релацију (12.6), с обзиром ни (13.1), можемо написати у облику

$$w^\mu = \bar{w}^\mu + \xi^\mu,$$

тј. у облику

$$\frac{w_0^\mu}{\rho_w} = \frac{\bar{w}_0^\mu}{\rho_\nu} + \frac{\xi^\mu}{R_\lambda}, \tag{14.1}$$

при чему су сад w_0^μ, $\bar{w}_0^\mu$ и ξ_0^μ јединични вектори у одговарајућим правцима. Ако ставимо

$$a_{\mu\nu}\, w_0^\mu\, \xi_0^\nu = \cos\varphi$$

и приметимо да је

$$a_{\mu\nu}\, w_0^\mu\, \bar{w}_0^\nu = \sin\varphi \quad \text{и} \quad a_{\mu\nu}\, \bar{w}_0^\mu\, \xi_0^\nu = 0,$$

из (14.1) добивамо

$$\frac{\cos\varphi}{\rho_w} = \frac{1}{R_\lambda}, \qquad \frac{\sin\varphi}{\rho_w} = \frac{1}{\rho_\nu}. \tag{14.2}$$

Прва релација (14.2) показује да важи теорема:

Релативна кривина потпростора V_n у правцу криве D, пројекција је парагеодезиске кривине, у односу на потпростор V_m околна простора V_l, криве D

односно, теорема:

Полупречник парагеодезиске кривине, у односу на потпростор V_m околна простора V_l криве D је пројекција полупречника релативне кривине потпростора V_n за правац криве D.

Лако је видети да су ове теореме генерализација Meusnier-ове теореме ([4], стр. 152).

Користећи релацију (11.3) можемо дати још једну генерализацију Meusnier-ове теореме. У ту сврху посматрајмо неку криву $C : y^\mu = y^\mu(s)$ потпростора V_m и обележимо са ρ полупречник прве кривине криве C у односу на околни простор V_l, тј. (§ 6)

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{c_{\alpha\beta}\, \eta^\alpha\, \eta^\beta}. \tag{14.3}$$

Ако са $\bar{\eta}^\alpha$ обележимо компоненте вектора w^μ у z-овима, тј. ако ставимо

$$\bar{\eta}^\alpha = w^\mu\, z^\alpha{}_{,\mu},$$

онда, под условом (11.4), важи релација

$$\eta^\alpha = \bar{\eta}^\alpha + \frac{\lambda_{r|}{}^\alpha}{P_{r|}} \tag{14.4}$$

где смо ставили

$$\frac{1}{P_{r|}} = \frac{\Omega_{p|\mu\nu}\, \frac{dy^\mu}{ds}\, \frac{dy^\nu}{ds}}{L_{pr|}}.$$

Релацију (14.4) можемо написати у облику

$$\frac{\eta^{\alpha}}{\rho} = \frac{\overline{\eta}_0^{\alpha}}{\rho_w} + \frac{\lambda_{r|}{}^{\alpha}}{P_{r|}}, \tag{14.5}$$

при чему су η_0^{α} и $\overline{\eta}_0^{\alpha}$ јединични вектори у одговарајућим правцима.

Множењем релације (14.5) са $c_{\alpha\beta}\,\lambda_{r|}{}^{\beta}$, $c_{\alpha\beta}\,\overline{\eta}_0^{\beta}$, $c_{\alpha\beta}\,\eta_0^{\beta}$ и сумирањем по α, добивамо, респективно, једнакости

$$\frac{c_{\alpha\beta}\,\eta_0^{\alpha}\,\lambda_{r|}{}^{\beta}}{\rho} = \frac{1}{P_{r|}} + \frac{c_{\alpha\beta}\,\overline{\eta}_0^{\alpha}\,\lambda_{r|}{}^{\beta}}{\rho_w}, \qquad \frac{c_{\alpha\beta}\,\eta_0^{\alpha}\,\overline{\eta}_0^{\beta}}{\rho} = \frac{c_{\alpha\beta}\,\lambda_{r|}{}^{\alpha}\,\overline{\eta}_0^{\beta}}{P_{r|}} + \frac{1}{\rho_w},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{c_{\alpha\beta}\,\lambda_{r|}{}^{\alpha}\,\eta_0^{\beta}}{P_{r|}} + \frac{c_{\alpha\beta}\,\overline{\eta}_0^{\alpha}\,\eta_0^{\beta}}{\rho_w}.$$

Обележимо са $\vartheta_{r|}$ угао који граде јединични вектори η_0^{α} и $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$; са ϑ угао између јединичних вектора η^{α} и $\overline{\eta}^{\alpha}$, а са $2d - \delta_{r|}$ (d је прав угао) угао који граде јединични вектори $\overline{\eta}^{\alpha}$ и $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$. Тада претходне релације можемо написата у облику

$$\frac{\cos\vartheta_{r|}}{\rho} = \frac{1}{P_{r|}} - \frac{\cos\delta_{r|}}{\rho_w}; \qquad \frac{\cos\vartheta}{\rho} = -\frac{\cos\delta_{r|}}{P_{r|}} + \frac{1}{\rho_w}; \tag{14.6}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\vartheta_{r|}}{P_{r|}} + \frac{\cos\vartheta}{\rho_w}.$$

Ако прву од једнакости (14.6) помножимо са $\cos\vartheta_{r|}$ и одузмемо је од треће, добивамо

$$\frac{\sin^2\vartheta_{r|}}{\rho} = \frac{\cos\vartheta + \cos\delta_{r|}\cos\vartheta_{r|}}{\rho_w}.$$

Како вектор η^{α} припада оном локално Еуклидском простору који је одређен векторима $\overline{\eta}_0^{\alpha}$ и $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$, то је

$$\vartheta = 2d - (\vartheta_{r|} + \delta_{r|}), \tag{14.7}$$

тј.

$$\cos\vartheta = -\cos\vartheta_{r|}\cos\delta_{r|} + \sin\vartheta_{r|}\sin\delta_{r|}.$$

па је, према томе,

$$\frac{\sin^2\vartheta_{r|}}{\rho} = \frac{-\cos\vartheta_{r|}\cos\delta_{r|} + \sin\vartheta_{r|}\sin\delta_{r|} + \cos\vartheta_{z|}\cos\delta_{r|}}{\rho_w},$$

тј.

$$\frac{\sin\vartheta_{r|}}{\rho} = \frac{\sin\delta_{r|}}{\rho_w}. \tag{14.8}$$

Множењем друге једначине из система (14.6) са $\cos\vartheta$ и одузимањем од треће, добивамо

$$\frac{\sin^2\vartheta}{\rho} = \frac{\cos\vartheta_{r|} + \cos\vartheta\cos\delta_{r|}}{P_{r|}}$$

С обзиром на (14.7), ова једнакост добива облик

$$\frac{(\sin\vartheta_{r|}\cos\delta_{r|} + \cos\vartheta_{r|}\sin\delta_{r|})^2}{\rho} =$$

$$= \frac{\cos\vartheta_{r|} - \cos\vartheta_{r|}\cos^2\delta_{r|} + \sin\vartheta_{r|}\cos\delta_{r|}\sin\delta_{r|}}{P_{r|}},$$

тј.

$$\frac{(\sin\vartheta_{r|}\cos\delta_{r|} + \cos\vartheta_{r|}\sin\delta_{r|})^2}{\rho} =$$

$$= \frac{\sin\delta_{r|}(\cos\vartheta_{r|}\sin\delta_{r|} + \sin\vartheta_{r|}\cos\delta_{r|})}{P_{r|}}$$

или коначно

$$\frac{\cos\vartheta_{r|} + \sin\vartheta_{r|}\operatorname{cotg}\delta_{r|}}{\rho} = \frac{1}{P_{r|}}. \tag{14.9}$$

Релација (14.8), под условом (11.4), даје везу између прве кривине криве C, у односу на околни простор V_l, и њене парагеодезиске кривине.

Релација (14.9), под условом (11.4), даје везу између прве кривине криве C у односу на околни простор V_l и величине $P_{r|}$.

Кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m, онда је $\cos\delta_{r|} = 0$ а $\sin\delta_{r|} = 1$. Ако при томе приметимо да се, у овом случају, парагеодезиска кривина $\frac{1}{\rho_w}$ криве C своди на њену прву кривину у односу на потпростор V_m, а величина $\frac{1}{P_{r|}}$ на нормалну кривину потпростора, закључујемо да се једначине (14.8) и (14.9) редукују на

$$\frac{\sin\vartheta_{r|}}{\rho} = \frac{1}{\rho_g}; \qquad \frac{\cos\vartheta_{r|}}{\rho} = \frac{1}{R_n}. \tag{14.10}$$

Међутим, прва од ових једначина је позната релација која даје везу између првих кривина криве C у односу на околни простор и у односу на потпростор коме C припада, а друга изражава генералисану Meusnier-ову теорему ([4], јед. 44.8)).

Стога једначина (14.9), под условом (11.4), претставља генералисану Meusnier-ову теорему у односу на конгруенцију $\lambda_{r|}$, а (14.8) је, под условом (11.4), генерализација прве од једначина (14.10).

IV. ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА ПАРАГЕОДЕЗИСКИХ КРИВИХ

15. *ПРЕТХОДНЕ РЕЛАЦИЈЕ.* — Нека је $D: x^i = x^i(s)$ крива простора V_n који је смештен у потпростору V_m Риманова простора V_l. Нека је, даље, u поље јединичних вектора потпростора V_n, од којих је по један у свакој тачки криве D, при чему су u^i функције лука s криве. Ако су v^α контраваријантне компоненте тог векторског поља и y-онима, онда је

$$v^\mu = u^i\, y^\mu{}_{,i}\,.$$

Унутрашњи извод вектора v^ε у односу на метрику простора V_m дуж криве D, тј. вектор

$$\overline{q}^\mu = \frac{dv^\mu}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \varepsilon\pi \end{matrix} \right\} v^\varepsilon \frac{dy^\pi}{ds}\,,$$

јесте, према Bianchi-jy, *вектор здружен са вектором* v^μ дуж криве D у простору V_m.

Вектор $\overline{q}^\mu$ се може раставити на компоненту која је тангентна и на компоненту која је нормална на потпростору V_n, тј. може се написати ([4], стр. 164)

$$\overline{q}^\mu = \overline{p}^i\, y^\mu{}_{,i} + \sum_a \omega_{a\,|\,ij}\, u^i \frac{dx^j}{ds}\, n_a{}^\mu, \tag{15.1}$$

при чему су

$$\overline{p}^i = u^i{}_{,j}\frac{dx^j}{ds} = \frac{du^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} u^j \frac{dx^k}{ds}$$

компоненте вектора здруженог са вектором u^i дуж крива D у потпростору V_n.

Т. К. Pan [14] посматра нормалну компоненту вектора $\overline{q}^\mu$, тј. вектор

$$\sum_a \omega_{a\,|\,ij}\, u^i \frac{dx^j}{ds}\, n_a{}^\mu\,.$$

Он величину

$$({}_uk_N)^2 = \sum_a \omega_{a|ij}\, \omega_{a|kl}\, u^i\, u^k \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^l}{ds} \tag{15.2}$$

назива *нормалном кривином векторског поља* v^μ у правцу криве D у тачки P потпростора V_n.

Правци за које је

$$\sum_a \omega_{a\,|\,ij}\, \omega_{a|kl}\, u^i\, u^k \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0 \tag{15.3}$$

јесу *асимптотски правци векторског поља* v^μ у тачки P потпро-

стора V_n, а криве чији је сваки правац асимптотски правац векторског поља је *асимптотска линија* тог поља.

Крива за коју је вектор $\overline{p}^i = 0$, тј. која је дефинисана једначином

$$u^i{}_{,j}\frac{dx^j}{ds} = 0, \tag{15.4}$$

јесте *индикатриса векторског поља.*

Ми ћемо, у овој Глави, као што је и у Уводу поменуто, генералисати појам здруженог вектора, као и испитивања и резултате Рап-а у том смислу што уместо нормала на потпростор V_n посматрамо систем конгруенција кривих простора V_l у тачкама потпростора V_n.

16. *ВЕКТОР РЕЛАТИВНО ЗДРУЖЕН СА ДАТИМ ВЕКТОРОМ У ОДНОСУ НА НЕКУ КРИВУ.* – Обележимо са $\overline{w}^\mu$ унутрашњи извод вектора v^μ у односу на конексију (3.2) дуж криве $C: y^\mu = y^\mu(s)$ потпростора V_m Риманова простора V_l. Тада је

$$\overline{w}^\mu = v^\mu{}_{:\varepsilon}\frac{dy^\varepsilon}{ds},$$

тј.

$$\overline{w}^\mu = \frac{dv^\mu}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \varepsilon\pi \end{matrix} \right\} v^\varepsilon \frac{dy^\varepsilon}{ds} - \frac{T_{r|}{}^\mu}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, v^\varepsilon \frac{dy^\pi}{ds}. \tag{16.1}$$

Вектор $\overline{w}^\mu$ зваћемо *вектор релативно здружен, у односу на* V_m, *са вектором* v^μ дуж криве C. Из (16.1) је јасно да тај вектор зависи од изабране нормале $N_{p|}{}^\alpha$ потпростора V_m, јер однос $\frac{1}{L_{pr|}}\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, v^\varepsilon \frac{dy^\pi}{ds}$ зависи од избора те нормале. То пак значи да дуж криве C, у свакој тачки, имамо $l-m$ вектора релативно здружених са вектором v^μ у односу на потпростор V_m. Сви они припадају дводимензионом, локално Еуклидском простору који је одређен векторима $\overline{q}^\mu$ и $T_{r|}{}^\mu$.

Кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на V_m, тј. кад је $T_{r|}{}^\mu = 0$, релација (16.1) се своди на

$$\overline{w}^\mu = \frac{dv^\mu}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \varepsilon\pi \end{matrix} \right\} v^\varepsilon \frac{dy^\pi}{ds},$$

тј. свих $l-m$ вектора релативно здружених, у односу на V_m, са вектором v^μ своде се на вектор здружен са вектором v^μ дуж криве C.

С друге стране, кад је јединично векторско поље v^α поље тангентних вектора криве C, израз (16.1) добива облик

$$\overline{w}^\mu = \left(\frac{dy^\mu}{ds}\right)_{,\nu} \frac{dy^\nu}{ds} - \frac{T_{r|}{}^\mu}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\pi} \frac{dy^\varepsilon}{ds} \frac{dy^\pi}{ds},$$

а то су компоненте вектора парагеодезиске кривине криве C (§ 9).

Према томе: *Вектор релативно здружен са вектором v^μ дуж криве C је, с једне стране, генерализација вектора здруженог са вектором v^μ дуж криве C, а с друге стране, генерализација вектора парагеодезиске кривине криве C.*

Криве потпростора V_m дуж којих је $\overline{w}^\mu = 0$, тј. дуж којих је задовољен услов

$$v^\mu{}_{:\varepsilon} \frac{dy^\varepsilon}{ds} = 0,$$

зваћемо *параиндикатрисе векторског поља* v^μ. Из (16.1) следи да је тада

$$\overline{q}^\mu = \frac{T_{r|}{}^\mu}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\pi} v^\varepsilon \frac{dy^\pi}{ds},$$

па како лева страна ове једначине не зависи од нормале $N_{p|}{}^\alpha$ потпростора V_m, то ни десна страна не зависи од ње. Другим речима: дуж параиндикатрисе простора V_m, векторског поља v^μ, однос $\frac{1}{L_{pr|}} \Omega_{p|\varepsilon\pi} v^\varepsilon \frac{dy^\pi}{ds}$ не зависи од избора нормале $N_{p|}{}^\alpha$ потпростора.

Кад је векторско поље v^μ поље тангентних вектора криве, параиндикатриса векторског поља је парагеодезиска крива потпростора V_m, а кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на V_m, параиндикатриса векторског поља је индикатриса векторског поља. Стога можемо рећи:

Параиндикатриса векторског поља је, с једне стране, генерализација парагеодезиске криве, а с друге стране, индикатрисе векторског поља.

Обележимо са μ^α компоненте вектора у z-овима. Тада је

$$\mu^\alpha = v^\mu z^\alpha{}_{,\mu}.$$

Унутрашњи извод ове релације у односу на конексију (3.2) дуж криве C је

$$\mu^\alpha{}_{:\varepsilon} \frac{dy^\varepsilon}{ds} = v^\mu{}_{:\varepsilon} \frac{dy^\varepsilon}{ds} z^\alpha{}_{,\mu} + v^\mu (z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu} \frac{dy^\nu}{ds}.$$

Компоненте μ^α векторског поља μ инваријанте су с обзиром на трансформацију координата у V_m, па се, стога, горња једначина

може написати у облику

$$\frac{d\mu^\alpha}{ds} = v^\mu{}_{:\varepsilon}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,z^\alpha{}_{,\mu} + v^\mu(z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu}\,\frac{dy^\nu}{ds},$$

или, с обзиром на то што је (§ 11)

$$(z^\alpha{}_{,\mu})_{:\nu} = -\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{Bmatrix} z^\beta{}_{,\mu}\,z^\gamma{}_{,\nu} + \sum_p \Omega_{p|\mu\nu}\,N_{p|}{}^\alpha + \frac{\Omega_{p|\mu\nu}}{L_{pr|}}\,T_{r|}{}^\varepsilon\,z^\alpha{}_{,\varepsilon},$$

у облику

$$\frac{d\mu^\alpha}{ds} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{Bmatrix}\mu^\beta\,\frac{dy^\gamma}{ds} = v^\mu{}_{:\varepsilon}\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,z^\alpha{}_{,\mu} + \tag{16.2}$$

$$\sum_p \Omega_{p|\mu\varepsilon}\,v^\mu\,\frac{dy^\varepsilon}{ds}\,N_{p|}{}^\alpha + \frac{T_{r|}{}^\varepsilon}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\mu\nu}\,v^\mu\,\frac{dy^\nu}{ds}\,z^\alpha{}_{,\varepsilon}.$$

Ако претпоставимо да однос

$$\frac{1}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,v^\varepsilon\,\frac{dy^\pi}{ds}$$

не зависи од изабране нормале $N_{p|}$ потпростора V_m, релација (16.2) се може изразити овако:

$$\bar{\eta}^\alpha = \bar{w}^\mu\,z^\alpha{}_{,\mu} + \frac{1}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,v^\varepsilon\,\frac{dy^\pi}{ds}\,\lambda_{r|}{}^\alpha \tag{16.3}$$

где смо са

$$\bar{\eta}^\alpha = \frac{d\mu^\alpha}{ds} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{Bmatrix}\mu^\beta\,\frac{dy^\gamma}{ds}$$

обележили вектор здружен са вектором μ^α дуж криве C.

Ако је крива C параиндикатриса векторског поља v^α, биће $\bar{w}^\mu = 0$, па се релација (16.3) своди на

$$\bar{\eta}^\alpha = \frac{1}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,v^\varepsilon\,\frac{dy^\pi}{ds}\,\lambda_{r|}{}^\alpha.$$

Отуда следи:

Дуж параиндикатрисе векторског поља v^μ, вектор здружен са вектором $\mu^\alpha = v^\mu z^\alpha{}_{,\mu}$ у односу на околни простор V_l колинеаран је са тангентом на ону криву конгруенције $\lambda_{r|}$ која пролази кроз уочену тачку потпростора.

Приметимо да је релација (16.3) генерализација једнакости (11.3). Заиста, у специјалном случају кад је јединично векторско поље v^μ поље тангентних вектора криве C, релација (16.3) се редукује на једнакост (11.3).

17. *РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА РЕЛАТИВНО ЗДРУЖЕНИХ СА ДАТИМ ВЕКТОРОМ ДУЖ КРИВЕ D ПРОСТОРА V_n КОЈИ ЈЕ СМЕШТЕН У ПОТПРОСТОРУ V_m РИМАНОВА ПРОСТОРА V_l.* Ако криву D $x^i = x^i(s)$ потпростора V_n, посматрамо као криву потпростора V_m околна простора V_l, онда су, према претходном параграфу,

$$\overline{w}^{\mu} = \overline{q}^{\mu} - \frac{T_{r|}{}^{\mu}}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,v^{\varepsilon}\,\frac{dy^{\pi}}{ds} \tag{17.1}$$

компоненте вектора релативно здруженог, у односу на потпростор V_m простора V_l, са вектором v^{μ} дуж криве D. Но, ако D посматрамо као криву потпростора V_n околна простора V_l, онда су

$$\overline{v}^{i} = \overline{p}^{i} - \frac{t_{r|}{}^{i}}{\mathcal{L}_{x\,r|}}\,\overline{\omega}_{x|lk}\,u^{l}\,\frac{dx^{k}}{ds} \tag{17.2}$$

компоненте вектора релативно здруженог, у односу на потпростор V_n простора V_l, са вектором u^i дуж криве D.

С обзиром на (15.1), можемо (17.1) написати у облику

$$\overline{w}^{\mu} = \overline{p}^{i}\,y^{\mu}{}_{,\,i} + \sum_{a}\omega_{a|ij}\,u^{i}\,\frac{dx^{j}}{ds}\,n_{a|}{}^{\mu} - \frac{T_{r|}{}^{\mu}}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,v^{\varepsilon}\,\frac{dy^{\pi}}{ds}$$

тј., према (1.22), и облику

$$\overline{w}^{\mu} = \overline{p}^{i}\,y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{a}\omega_{a|ij}\,u^{i}\,\frac{dx^{j}}{ds}\,n_{a|}{}^{\mu} - \frac{t_{r|}{}^{i}\,y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{a} l_{ar|}\,n_{a|}{}^{\mu}}{L_{pr|}}\,\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,y^{\varepsilon}{}_{,k}\,y^{\pi}{}_{,l}\,u^{k}\,\frac{dx^{l}}{ds}.$$

Отуда имамо

$$\overline{w}^{\mu} = \left(\overline{p}^{i} - t_{r|}{}^{i}\,\frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,y^{\varepsilon}{}_{,k}\,y^{\pi}{}_{,l}}{L_{pr|}}\,u^{k}\,\frac{dx^{l}}{ds}\right)y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{a}\left(\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\pi}{}_{,j}}{L_{pr|}}\,l_{ar|}\right)u^{i}\,\frac{dx^{j}}{ds}\,n_{a|}{}^{\mu},$$

што се, с обзиром на (1.17) и (1.24), може изразити овако:

$$\overline{w}^{\mu} = \left(\overline{p}^{i} - \frac{t_{r|}{}^{i}}{\mathcal{L}_{pr|}}\,\overline{\omega}_{p|lk}\,u^{k}\,\frac{dx^{l}}{ds}\right)y^{\mu}{}_{,\,i} + \sum_{a}\left(\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\,y^{\varepsilon}{}_{,i}\,y^{\pi}{}_{,j}}{L_{pr|}}\,l_{ar|}\right)u^{i}\,\frac{dx^{j}}{ds}\,n_{a|}{}^{\mu}.$$

Ако се у испитивањима ограничимо на једну од $l-m$ нормала потпростора V_m, последњу релацију, према (17.2), можемо

написати у облику

$$(17.3)\quad \overline{w}^{\mu} = \overline{v}^{i}\, y^{\mu}{}_{,i} + \sum_{a}\left(\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\pi}{}_{,j}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right) u^{i}\,\frac{dx^{k}}{ds}\, n_{a|}{}^{\mu}.$$

Једнакост (17.3) успоставља однос између вектора релативно здружених (у односу на V_m простора V_l, односно, у односу на V_n простора V_l) са датим вектором u^i дуж криве D. Она показује да се вектор релативно здружен, у односу на V_m простора V_l, са вектором $v^{\mu} = u^{i}\, y^{\mu}{}_{,i}$ дуж криве D може раставити на две, узајамно ортогоналне компоненте: једна од њих је нормална а друга тангентна на потпростору V_n; ова последња је вектор релативно здружен, у односу на V_n простора V_l, са вектором u^i дуж криве D.

Ако је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m, релација (17.3) се своди на (15.1). Ако је поље вектора v^{μ} поље тангентних вектора криве D, релација (17.3) добива облик (12.6). Отуда,

Релација (17.3) *је, с једне стране, генерализација једнакости* (15.1), *а с друге стране, генерализација једнакости* (12.6).

Обележимо са ${}_{\nu}k_{\lambda}$ интензитет нормалне компоненте вектора $\overline{w}^{\mu}$. Тада је

$$(17.4)\quad ({}_{\nu}k_{\lambda})^{2} = \sum_{a}\left(\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, y^{\varepsilon}{}_{,i}\, y^{\pi}{}_{,j}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\omega_{a|lk} - \frac{\Omega_{p\,\mu\nu}\, y^{\mu}{}_{,l}\, y^{\nu}{}_{,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|}\right) u^{i}\, u^{k}\,\frac{dx^{j}}{ds}\,\frac{dx^{l}}{ds}.$$

Величину ${}_{\nu}k_{\lambda}$ зваћемо *релативна кривина векторског поља* v^{μ} *потпростора* V_n у тачки P и у правцу криве D.

Из релације (17.4) следи:

1^0 да се релативна кривина векторског поља v^{μ} потпростора V_n своди на релативну кривину (13.2) потпростора кад је векторско поље v^{μ} поље тангентних вектора криве D;

2^0 да се релативна кривина векторског поља v^{μ} потпростора V_n своди на нормалну кривину векторског поља v^{μ} (15.2) потпростора кад је конгруенција $\lambda_{r|}$ нормална на потпростору V_m; и

3^0 да је релативна кривина векторског поља v^{μ}, с обзиром на одређену нормалу $N_{p|}{}^{\alpha}$ потпростора V_m, иста за све криве потпростора V_n које у тачки P имају заједничку тангенту.

Параасимптотске правце векторског поља v^μ дефинишемо као правце потпростора V_n за које је задовољен услов

$$\sum_a \left(\omega_{a|ij} - \frac{\Omega_{p|\varepsilon\pi}\, y^\varepsilon{}_{,\,i}\, y^\pi{}_{,\,j}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\omega_{a|k} - \frac{\Omega_{p||\mu\nu}\, y^\mu{}_{,\,i}\, y^\nu{}_{,\,k}}{L_{pr|}}\, l_{ar|} \right) u^i\, u^k\, \frac{dx^j}{ds}\, \frac{dx^l}{ds} = 0,$$

а крива чији је сваки правац параасимптотски правац векторског поља је *параасимптотска линија* тог поља. Отуда можемо рећи:

Дуж параасимптотске линије векторског поља, релативна кривина тог векторског поља једнака је нули.

Из једнакости (17.3) следе теореме:

1° *Ако је параиндикатриса векторског поља* u^i, *у одиосу на* V_n *простора* V_l, *параиндикатриса векторског поља* v^μ *и у односу на* V_m *околна простора* V_l, *онда је она и параасимптотска линија тог векторског поља.*

2° *Вектор релативно здружен са вектором* v^μ, *у односу на* V_m *околна простора* V_l *дуж параиндикатрисе векторског поља* u^i *у односу на потпростор* V_n *околна простора* V_l, *нормалан је на потпростору* V_n, *а његов интензитет је релативна кривина векторског поља* v^μ *потпростора* V_n.

3° *Вектор релативно здружен, и односу на* V_m *простора* V_l, *са вектором* v^μ, *дуж параасимптотске криве векторског поља, једнак је вектору релативно здруженом, у односу на* V_n *простора* V_l, *са вектором* u^i, *кад се овај последњи вектор посматра из простора* V_m.

Лако је показати да су ове теореме генерализација, с једне стране, теорема које смо у § 12 добили као последице релације (12.6), а с друге стране аналогних теорема које следе из једнакости (15.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. П. Ајзенхарт — Увод у диференцијалну геометрију, Београд, Научна књига, 1951.

[2] E. Cartan — Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1946.

[3] L. P. Eisenhart — Non-Riemannian Geometry, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* New York, 1927.

[4] ———— Riemannian Geomtry, Parinceton University Press, 1949.

[5] Finsler P. — Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Göttingen 1918.

[6] Grove V. G. — Sobre curvaturas generalizadas, *Rev. Math. Fis. Teor., Tucuman*, **9** (1952), 47–55.

[7] Hayden H. A. — Subspaces of a space with torsion, *Jahrbuch über Fortschritte d. Math.* (1932), 767.

[8] Mishra R. S. — Union curves on the surface of reference of a recitilinear congruence, *The Math. Student*, **18** (1950), 37–41.

[9] ———— A problem in recitilinear congruences using tensor calculus, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **42** (1950), 118–122.

[10] ———— Union curves and hyper-asymptotic curves on the surface of reference of a recitilinear congruence, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **42** (1950), 213–214.

[11] ———— On the congruence of curves through points of a subspace imbedded in a Riemannian space, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **65** (1951), 109—115.

[12] ———— Hyper-asimptotic curves of a Riemannian hypersurface, *The Math. Student*, **20** (1952), 63—65.

[13] ———— Sur certaines courbes appartenant a un sous-espace d'un espace riemannien, *Bull. Sci. Math.* **76** (1952), 77—84.

[14] Pan T. K. — Normal curvature of a vector field, *Amer. Journ. Math.* **74** (1952), 955—966.

[15] Prvanović M. — Une généralisation des spaces totalements géodésiques, *Comptes Rendus* **242** (1956), 2219—2221.

[16] ———— Propriétés des espaces paragéodésiques, *Comptes Rendus*, **242** (1956), 2500—2502.

[17] Schouten J. A. — Ricci calculus, Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[18] Springer C. E. — Union torsion of a curve on a surface, *Amer. Math. Monthly* **54** (1947), 259—262.

[19] ———— Union curves and union curvatures, *Bull. Amer. Math. Soc.* (1954),

[20] ———— Uinon curves of a hypersurface, *Canadian Journ. Math.* **2** (1950). 457–460.

[21] Vranceanu C. — Leçons de géométrie différentielle, vol. 1, Bucarest, 1947.

[22] Weatherburn C. E. — Riemannian Geometry and the tensor calculus, Cambrigde Univ. Press, 1938.

[23] Yano K. — Union curves and subpaths, *Math. Japonicae* **1** (1948), 51—59.

LES ESPACES PARAGÉODÉSIQUES ET LES COURBES PARAGÉODÉSIQUES APPARTENANT AU SOUS-ESPACE D'ESPACE RIEMANNIEN

Par

MILEVA PRVANOVIĆ

Considérons l'espace V_n plongé dans le sous-espace V_m d'espace riemannien V_l. Soient x^i $(i, j, k, l=1, 2, \ldots, n)$, y^μ $(\mu, \nu, \varkappa, \pi=1, 2, \ldots, m)$ et z^α $(\alpha, \beta, \gamma=1, 2, \ldots, l)$ les coordonnées, respectivement de V_n, V_m et V_l et $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, $a_{\mu\nu}\,dy^\mu\,dy^\nu$ et $c_{\alpha,\beta}\,dz^\alpha\,dz^\beta$ leurs métriques que nous supposons positives. Les tenseurs g_{ij}, $a_{\mu\nu}$, $c_{\alpha\beta}$ satisfont aux relations (1.1), (1.4) et (1.5). Il existe un système de $m-n$ vecteurs unitaires $n_{a|}{}^\mu$ $(a, b, c=n+1, \ldots, m)$ orthogonaux et nomaux à V_n. Dans V_l, il existe un système de $l-m$ vecteurs orthogonaux deux à deux et normaux à

V_m. Donc, nous avons, dans V_l, $l-n$ normales $N_{x|}{}^{\alpha}$ ($x, y, z=n+1, \ldots, l$; $N_{a_|}{}^{\alpha}=n_{a|}{}^{\mu}\, z^{\alpha}{}_{,\mu}$) de V_n. Les vecteurs $N_{p|}{}^{\alpha}$ et $n_{a|}{}^{\mu}$ satisfont aux équations (1.2), (1.3), (1.5) et (1.7).

Désignons, respectivement, par $\omega_{x|ij}$, $\omega_{a|ij}$ et $\Omega_{p|\mu\nu}$ les composantes du second tenseur fondamental : de V_n relatif à V_l, de V_n relatif à V_m et de V_m relatif à V_l. Soient e^i les composantes du vecteur unitaire de V_n. Le vecteur de la courbure normale de V_n dans la direction de e^i et relatif à V_l et le vecteur de la courbure normale de V_n dans la direction de e^i et relatif à V_m sont liés par la relation (1.18). Quand V_n est un sous-espace totalement géodésique de V_m, nous avons $\omega_{a|ij}=0$ pour chaque a, et la relation (1.18) se réduit à la forme (1.18′). De là on déduit le théorème connu:

Si V_n est un sous-espace totalement géodésique de V_m, son vecteur de la courbure normale relatif à V_l, dans la direction du vecteur e^i quelconque, est normal à V_m.

Dans le Chapitre I nous généralisons la propriété mentionné des espaces totalement géodésiques et nous étudions les espaces obtenus au moyen de cette généralisation. À savoir, considérons dans V_l, au lieu des normales $N_{r|}{}^{\alpha}$, en chaque point de V_m, un système de $l-m$ congruences. Nous pouvons exprimer le vecteur $\lambda_{p_|}{}^{\alpha}$ unitaire, tangent à la courbe de congruence $\lambda_{p|}$, sous la forme (1.21), où $T_{p|}{}^{\mu}$ sont les composantes contravariantes d'un vecteur de V_m et $L_{pr|}$ les paramètres. Nous pouvons aussi exprimer le vecteur $\lambda_{r|}{}^{\alpha}$ sous la forme (1.23), où $t_{r|}{}^{i}$ sont les composantes contravariantes d'un vecteur de V_n.

Le sous-espace V_n de V_m dont le vecteur de courbure normale relatif à V_l, dans la direction du vecteur e^i quelconque, est colinéaire avec le vecteur tangent à la courbe de congruence $\lambda_{r|}$ passant par le point considéré, est, par la définition, l'espace paragéodésique de V_m de V_l relatif à la congruence $\lambda_{r|}$. [15].

Il s'en suit de cette définition que, si V_n est un sous-espace paragéodésique de V_m, leur vecteur de courbure normale relatif à V_l satisfait à la condition (2.1). Nous pouvons, en vertu de (1.18) et (1.21), exprimer cette condition sous la forme (2.2), d'où nous obtenons les équations différentielles (2.8) des espaces paragéodésiques.

En poursuivant, nous déduisons les propriétés suivantes des sous-espaces paragéodésiques:

1) Si la congruence $\lambda_{r|}$ est normale à V_m (c'est à dire si $T_{r|}{}^{\mu}=0$) les équations (2.8) prennent la forme (2.11). Donc, lorsque la congruence $\lambda_{r|}$ est normale à V_m, le sous-espace paragéodésique est totalement géodésique.

2) La condition (2.10) est satisfaite à chaque point du sous-espace paragéodésique.

3) Aux points du sous-espace paragéodésique le rapport (2.7) ne dépend pas de la normale $N_{p|}{}^{\alpha}$ du sous-espace V_m.

4) Si V_n est un espace paragéodésique, ses normales satisfont à la relation (3.6), les deux points, devant l'indice, désignant la dérivée covariante généralisée relative à la connexion (3.2). La relation (3.6) est la généralisation de la relation analogue (1.20). Si l'espace paragéodésique V_n est l'hypersurface de V_m (si $n=m-1$), l'égalité (3.6) se réduit à (3.7). De là, nous obtenons le théorème:

Les normales n^μ d'hypersurface paragéodésique V_{m-1} sont parallèles, par rapport à la connexion (3.2), *dans l'espace V_m environnant, pour toute direction d'hypersurface.*

5) Nous pouvons exprimer les équations de Gauss et de Codazzi d'espace paragéodésique sous la forme (9.10) et (9.11).

Nous envisageons, dans le Chapitre II, les sous-espaces paragéodésiques lorsque $n=1$. Les courbes obtenues de cette manière nous appelons *courbes paragéodésiques* du sous-espace V_m d'espace riemannien V_l, relatif à la congruence $\lambda_{r|}$. Les équations (7.3) sont les équations différentielles des courbes paragéodésiques, q^μ désignant les composantes du vecteur de la première courbure de la courbe relative au sous-espace V_m.

Des nombreux propriétés des courbes paragéodésiques, notons les suivantes:

1) La coubre paragéodésique de V_m est la courbe dont le vecteur de première courbure relatif à l'espace environnant V_l, est collinéaire, en chaque point, avec le vecteur tangent à la courbe de la congruence $\lambda_{r|}$, passant par le point considéré.

2) Le rapport (7.4) ne dépend pas de la normale $N_{p|}{}^\alpha$ du sous-espace V_m aux points de la courbe paragéodésique.

3) Les courbes paragéodésiques sont une généralisation des courbes géodésiques; elles se réduisent à ces dernières lorsque la congruence $\lambda_{r|}$ est normale au sous-espace V_m.

4) Si la congruence $\lambda_{r|}$ n'est pas normale à V_m, il existe en chaque point du sous-espace V_m, dans chaque direction d'espace E_{m-1} local euclidien normalé à $T_{r|}{}^\mu$, une courbe paragéodésique, relative à la congruence donnée $\lambda_{r|}$.

Cette propriété résulte du fait que les équations (7.5) expriment une condition pour les $2m$ constantes du système (7.3).

5) La tangente de la courbe paragéodésique se transporte parallèlement à elle-même le long de la courbe, relative à la connexion (3.2), ce que suit des équations (8.1).

En considérant en chaque point de la courbe quelconque $C: y^\mu = y^\mu(s)$ du sous-espace V_m le vecteur dont les composants w^μ s'expriment sous la forme (9.1), nous pouvons définir ce vecteur comme *le vecteur de la courbure paragéodésique* de la courbe C, relatif à la congruence donnée $\lambda_{r|}$. La longuer du vecteur w^μ est *la courbure paragéodésique* de C relative à la congruence $\lambda_{r|}$. L'expression (9.1) dépend, dans le cas général, de la normale $N_{p|}{}^\alpha$ de V_m, ce qui signifie

que la courbe C a, en chaque point, $l-m$ vecteurs de courbure paragéodésique relative à la congruence donnée $\lambda_{r|}$. Lorsque la congruence $\lambda_{r|}$ est normale à V_m, tous ces vecteurs se confondent et c'est le vecteur q^{μ} de première courbure relatif à V_m. Si la courbe C appartient à la surface de l'espace euclidien à trois dimensions, le vecteur de la courbure paragéodésique est le vecteur de courbure relative [6].

Nous déduisons aux §§ 9 et 10, les relations entre le vecteur de courbure paragéodésique et le vecteur de courbure union ((6.5); [11]) des courbes de V_m de V_l. L'une d'entre elles s'exprime : *La projection du vecteur de courbure paragéodésique de la courbe C a son vecteur de courbure union est la courbure union de la courbe C.*

Dans le Chapitre III nous considérons la courbe $D : x^i = x^i(s)$ quelconque d'espace V_n plongé dans V_m de V_l. Les relations (6.2), (6.1) et (12.1) déterminent les vecteurs de première courbure relative respectivement à V_l, V_m et V_n. La relation (12.3) détermine le vecteur de courbure paragéodésique de la courbe D lorsqu'on la considère comme la courbe du sous-espace V_m de V_l, et la relation (12.4) — le vecteur de courbure paragéodésique de la courbe D lorsqu' on la considère comme la courbe du sous-espace V_n de V_l. Si les deux derniers vecteurs se rapportent à la normale fixe $N_{p|}^{\alpha}$ de V_m, on peut déduire la relation (12.6). Elle est la généralisation de la relation connue (12.2). L'un des théorèmes résultant de (12.6) est que:

La courbe paragéodésique d'espace V_n paragéodésique, plongé dans le sous-espace V_m d'espace riemannien V_l, est aussi la courbe paragéodésique lorsqu'on la considère comme la courbe de V_m de V_l [16].

Puis, nous envisageons, dans la relation (11.6), la composante normale, donc le vecteur (13.1). Nous définissons ce vecteur comme *le vecteur de courbure relative du sous-espace V_n* se rapportant à la congruence $\lambda_{r|}$, et sa longuer comme la courbure relative du sous-espace V_n, se rapportant à la congruence $\lambda_{r|}$. Les directions principales de courbure relative de V_n sont déterminés par l'équation (13.3). Les courbures relatives de V_n dans les directions principales de courbure relative sont reliées par $m-n$ relations de la forme (13.9). De cette manière, nous obtenons la généralisation de la formule d'Euler ([4], equ. (45.8)).

Ensuite, nous démontrons le théorème: *La courbure relative de V_n dans la direction de la courbe D, est la projection de courbure paragéodésique, relative du sous-espace V_m de V_l, de la courbe D.* Il est la généralisation du théorème de Meusnier ([4], pp. 152).

Le Chapitre IV est cosacré à la généralisation des notions définies et des théorèmes démontrés dans les Chapitres II et III. Cette généralisation est faite dans le sens du vecteur associé de Bianchi (le vecteur qui généralise le vecteur de première courbure de

la courbe). Par example, *le vecteur* (16.1) *relative associé* au vecteur v^μ le long da la courbe C est, d'une part, la généralisation du vecteur associé au vecteur v^μ le long de C, et d'autre part, la généralisation du vecteur de courbure paragéodésique de C. Les équations (17.3) donnent la relation entre les vecteurs $\overline{w}^\mu$ et $\overline{v}^i$; le premier, déterminé par la relation (17.1), est le vecteur relatif associé, se rapportant à V_m de V_l, au vecteur v^μ le long de la courbe $D: x^i = x^i(s)$; le deuxième, déterminé par le relation (17.2), est le vecteur relatif associé, se rapportant à V_n de V_l, au vecteur u^i ($v^\mu = u^i y^\mu{}_{,i}$) le long de D. La relation (17.3) est, d'une part, la généralisation de l'égalité (15.1), et d'autre part, la généralisation de l'égalité (12.6).