Зборник радова С. А. Н. L — Математички институт С. А. Н. књ. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique № 5, 1956

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О ЈЕДНОЈ ЛИНЕАРНОЈ КОМБИНАЦИЈИ НОРМАЛНИХ ЕЛИПТИЧКИХ ИНТЕГРАЛА I И II ВРСТЕ

Увод
I. О функцији $\Lambda(k, \psi)$ и њеним особинама
II. Примене

УВОД

0.1. Теорија елиптичких функција, која се развила, може се рећи, до савршенства, има своју историју у којој се оштро разликују два периода. Први период је проучавање елиптичких интеграла почевши од Wallis-а, па преко Euler-а и Lagrange-а до Legendre-а и Landen-а. Legendre-ова је замисао била да елиптичке интеграле доведе на каноничке облике и тиме дође до важног сазнања да се елиптички интеграли распадају у три битно различите и несводљиве класе.

Нарочито скривене и тешко приступачне биле су особине интеграла III врсте. Кад се узму у обзир средства која су Legendre-у стајала на расположењу, тешкоће су биле скоро непребродиве, и баш у савлађивању тих тешкоћа огледала се величина Legendre-а.

Други период јо проучавање елиптичких функција, тј. проучавање инверзија елиптичких интеграла; тај период почиње са Abel-ом и Jacobi-јем. После њихових радова се релативно мало истраживало у области елиптичких интеграла као таквих, јер се и њихово проучавање сводило на елиптичке функције, уствари инверзије елиптичких интеграла I врсте. Но елиптичке функције, колико год да су допринеле развоју теорије рашчишћавањем појмова, нису увек подесне у примени. Да бих поткрепио своје тврђење, изнећу један пример — а такав није једини — за вредност интеграла III врсте са позитивним параметром n, модулом k и амплитудом φ:

$$\Pi(n, k, \varphi) = u + \frac{sn(b, k')\, cn(b, k')}{dn(b, k')}\, i\, \Pi(u, bi),$$

интеграла III врсте везани извесним алгебарским једначинама. Овај проблем решио сам поставивши адиционе и мултипликационе теореме за израз $\Lambda(k, \psi)$. На основи оваквих теорема добио сам и једначине које у себи кондензују познате обрасце за трансформацију потпуних нормалних елиптичких интеграла III врсте, а који су до сада били извођени независно један од другог. Показао сам, надаље, да се обрасци на основи којих се потпуни интеграл III врсте изражава комбинацијама интеграла I и II врсте могу изразити простијим обрасцима од до сада познатих, а који још дају могућност да се за функцију $\Lambda(k, \psi)$ постави доња и горња граница.

Горе изложено и нека испитивања функције $\Lambda(k, \psi)$ чине први део овог рада.

У другом делу свога рада доказујем да функција $4\Lambda(k, \psi)$ претставља отвор омотача усправне елиптичке купе. Примењујући ставове из првог дела рада, добивам знатан број резултата који се односе на површине омотача косих кружних купа. На крају, постављам једну врло једноставну приближну формулу за површину омотача косе кружне купе и дајем у елементарном облику процену релативне грешке.

Да је функција (1) заиста од интереса потврђују и новији радови из области елиптичких интеграла. Heuman [9] у својим таблицама за потпуне елиптичке интеграле уводи функцију

$$\Lambda_0(\beta, k) = \frac{2}{\pi}\left[E(k)\,F(\beta, k') + K(k)\,E(\beta, k') - K(k)\,F(\beta, k')\right].$$

У најновијем приручнику за елиптичке интеграле од Byrd-a и Friedmann-a [1], који се по речима Magnus-a [18], може сматрати за стандардно дело своје врсте, дато је и неколико специјалних вредности за $\Lambda_0(\beta, k)$, а постављена је и адициона теорема ла функцију Λ_0.

I. О ФУНКЦИЈИ $\Lambda(k, \psi)$ И ЊЕНИМ ОСОБИНАМА

1. *ФУНКЦИЈА* $\Lambda(k, \psi)$

1.1. Legendre [17] је дао две генерализације релације (3):

$$\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\int_0^{\psi'}\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}+$$

$$+\sin\psi'\cos\psi'\sqrt{1-k^2\sin^2\psi'}\int_0^{\psi}\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi'\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-[E(k,\psi')\,F(k',\psi)+E(k',\psi)\,F(k,\psi')-F(k,\psi')\,F(k',\psi)] \qquad (5)$$

у којој F и E претстављају потпуне нормалне елиптичке интеграле I и II врсте са модулом k, а $F(k',\psi)$ и $E(k',\psi)$ су елиптички интеграли I и II врсте са комплементарним модулом

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \tag{2}$$

и са амплитудом ψ.

Како су ови интеграли непарне функције променљиве ψ, то је и $\Lambda(k, \psi)$ непарна функција ове променљиве:

$$\Lambda(k, -\psi) = -\Lambda(k, \psi). \tag{1a}$$

Према класичној Legendre-овој релацији

$$EF' + FE' - FF' = \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

(F' и E' су потпуни интеграли са модулом k'), добивамо

$$\Lambda\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

и функција Λ је генерализација леве стране Legendre-ове релације (3).

Сама Legendre-ова релација била је предмет многих проучавања. Настојало се да се даду и други докази ове релације. Тако је Moigno [19] базирао свој доказ на геометриским посматрањима, док је Glaisher [7] приказао леву страну једначине (3) у облику двоструког интеграла. Isenkrahe [10] је чак употребио ову релацију за извођење инверзије потпуних нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. Овим радовима осветљена је релација (3) са разних страна, а Kronecker [15] је у својој расправи о њој указао на њен унутрашњи разлог и дубљи смисао.

Разумљиво је да се, с друге стране, ишло и за проширивањем Legendre-ове релације (4) на интеграле општије од елиптичких. Тако је Weierstrass [25] дао проширење ове релације и на хиперелиптичке интеграле, а Riemann [21] је, ослањајући се на ставове опште теорије функција, дао одговарајућу релацију за све Abel-ове интеграле.

Може се рећи да је Legendre-ова релација била први пример за детерминанте у којима су елементи одређени интеграли. Полазећи са тога становишта, уопштили су ову релацију Haedekamp [8], Catalan [2] и Enneper [5]. Једно уопштење Legendre-ове релације дао је Ellioth [4].

Познато је да се потпуни нормални елиптички интеграли III врсте могу изразити комбинацијама потпуних и непотпуних нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. Помоћу функције (1) успео сам да у извесним случајевима потпуни нормални елиптички интеграл III врсте прикажем комбинацијама само потпуних интеграла I и II врсте, наиме онда кад су модуо и параметар

$$\Pi_0(-1+k'^2\sin^2\psi) = F + \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{k'^2\sin\psi\cos\psi}\left[\frac{\pi}{2} - \Lambda(k,\psi)\right]. \quad (10)$$

Кад величина ψ непрекидно расте од 0 до $\pi/2$, параметар $n=\operatorname{ctg}^2\psi$ интеграла Π_0 у једначини (9) непрекидио опада од $+\infty$ до 0, док у (10) параметар $n=-1+k'^2\sin^2\psi$ непрекидно расте од -1 до $-k^2$. Као што се види, обрасци за изражавање интеграла III врсте помоћу функције Λ важе за све позитивне параметре $\operatorname{ctg}^2\psi$ и за оне негативне који се налазе између -1 и $-k^2$. Изрази облика (1) не долазе у обзир кад је параметар интеграла Π_0 мањи од -1. Јер, у таквом случају, подинтегрална функција за $\theta = \arcsin 1/\sqrt{-n}$ има дисконтинуитет; а како се поменута вредност θ налази између интегралних граница 0 и $\pi/2$, то је интеграл Π_0 у таквом случају дивергентан.

1.2. Што се тиче случаја $-k^2 < n < 0$, за такве параметре постоји формула ([23], §§ 49 и 50)

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) = F + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}[F\,E(k,\psi) - E\,F(k,\psi)]; \quad (11)$$

у том случају израз $\Lambda(k,\psi)$ не би био реалан, тј. не би довео до интеграла III врсте за чији је параметар $-k^2 < n < 0$. Међутим, ако се узму у обзир и имагинарне амплитуде — дефинишући дакле израз $\Lambda(k,\psi)$ и за такве амплитуде ψ — може се показати да и интеграл III врсте са параметром облика $-k^2\sin^2\psi$ доводи до функције Λ.

Тога ради, уочимо, најпре, интеграл

$$w_1 = \oint \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$(z=x+yi)$ чија путања иде дуж реалне осовине од 0 до $\sin\psi > 1$, тако да буде $1 < \sin\psi < 1/k$, а да се критички сингуларитет $z=1$ обиђе по једном полукругу чији је центар тачка $z=1$. Кад полупречник кружне путање тежи ка нули, конвергираће и интеграл узет дуж полукруга према нули, тако да ће бити

$$w_1 = F(k,\psi) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{1}{i}\int_1^{\sin\psi} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Ако се у другом интегралу изврши смена

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2t^2}},$$

и

$$k'^2 \sin\psi \cos\psi \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} \int_0^{\psi'} \frac{\sin^2\theta}{1-(1-k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} +$$

$$+ k^2 \sin\psi' \cos\psi' \sqrt{1-k^2\sin^2\psi'} \int_0^{\psi} \frac{\sin^2\theta}{1-(1-k^2\sin^2\psi')\sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\psi' \sqrt{1-k^2\sin^2\psi'} \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}) - \tag{6}$$

$$-[E(k,\psi')F(k',\psi) + E(k',\psi)F(k,\psi') - F(k',\psi)F(k,\psi')].$$

За $\psi'=\pi/2$, једначине (5) и (6) постају

$$\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k'^2\sin\psi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - [FE(k',\psi) + EF(k',\psi) - FF\,k',\psi)] \tag{7}$$

и

$$k'^2 \sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{1-(1-k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - [FE(k',\psi) + EF(k',\psi) - FF(k',\psi)]. \tag{8}$$

Ако се први разломци подинтегралних функција напишу у облику

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\psi\cos^2\psi} \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\psi\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\psi},$$

$$\frac{\sin^2\theta}{1-(1-k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta} = \frac{1}{-1+k'^2\sin^2\psi}\left[1 - \frac{1}{1+(-1+k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}\right]$$

и ако означимо са

$$\Pi_0(n) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

потпуни нормални елиптички интеграл III врсте, једначине (7) и (8) дају обрасце — као што је Legendre показао — помоћу којих се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте може изразити комбинацијама нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. Уводећи функцију (1), ови обрасци постају

$$\Pi_0(\operatorname{ctg}^2\psi) = \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\left[\frac{\pi}{2} + F\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} - \Lambda(k,\psi)\right], \tag{9}$$

то је

$$E(k,\psi) = E - i\left[F\left(k', \arcsin\frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k'\sin\psi}\right) - \right.$$

$$\left. - E\left(k', \arcsin\frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k'\sin\psi}\right) + \frac{\sqrt{(\sin^2\psi - 1)(1 - k^2\sin^2\psi)}}{\sin\psi}\right]. \quad (13)$$

Множењем једначине (13) са F, а једначине (12) са $-E$, и сабирањем добићемо

$$E(k,\psi)F - F(k,\psi)E = \quad (14)$$

$$= i\Lambda\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k'\sin\psi}\right) - Fi\frac{\sqrt{(\sin^2\psi - 1)(1 - k^2\sin^2\psi)}}{\sin\psi}.$$

Како је из једначине (11)

$$E(k,\psi)F - F(k,\psi)E =$$

$$= \operatorname{ctg}\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\,[\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) - F], \quad (15)$$

то се уношењем ове вредности у једначину (14) добива веза између интеграла III врсте са параметром облика $-k^2\sin^2\psi$ и функције Λ; треба само обратити пажњу да услед $\sin\psi > 1$ треба писати

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{i\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{\sin\psi}.$$

Тако се добива

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) =$$

$$\frac{\sin\psi}{\sqrt{(\sin^2\psi - 1)(1 - k^2\sin^2\psi)}}\,\Lambda\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k'\sin\psi}\right),$$

што је требало показати.

1.3. За оно што следи биће нам потребна функција

$$L(k,\psi) = E(k,\psi)F - F(k,\psi)E. \quad (16)$$

Према једначини (14), веза између функција L и Λ дата је са

$$L(k,\psi) = i\left[\Lambda\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k'\sin\psi}\right) - F\frac{\sqrt{(\sin^2\psi - 1)(1 - k^2\sin^2\psi)}}{\sin\psi}\right].$$

Приметимо да је функција $L(k,\psi)$ специјалан случај елиптичког интеграла III врсте Jacobi-јева [23] типа

добићемо

$$F(k, \psi) = F - i \int_0^{\xi(\psi)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k'^2\,t^2)}},$$

где смо краткоће писања ради ставили

$$\xi(\psi) = \frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k' \sin\psi}$$

Позитивна горња граница овог интеграла је мања од јединице, јер из $\sin\psi < 1/k$ следи

$$(1-k'^2)\sin^2\psi < 1, \qquad \sin^2\psi - 1 < k'^2 \sin^2\psi.$$

Услед тога је, прелазећи на тригонометриску форму,

$$F(k, \psi) = F - i\,F\left(k', \arcsin \frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k' \sin\psi}\right). \tag{12}$$

Примењујући исти поступак на интеграл

$$w_2 = \oint \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}}\, dz,$$

долази се до следећег израза:

$$E(k, \psi) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{1-x^2}}\, dx + \frac{1}{i} \int_1^{\sin\psi} \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{x^2-1}}\, dx =$$

$$= E - ik'^2 \int_0^{\xi(\psi)} \sqrt{\frac{1-t^2}{(1-k'^2 t^2)^3}}\, dt = E - ik'^2 \int_0^{\arcsin \xi(\psi)} \frac{\cos\psi\, d\psi}{(1-k'^2 \sin^2\psi)^{3/2}}.$$

Како је ([23] стр. 301)

$$\int_0^{\omega} \frac{\cos^2\omega\, d\omega}{(1-k'^2\sin^2\omega)^{3/2}} = \frac{F(k', \omega) - E(k', \omega)}{k'^2} + \frac{\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\omega}}$$

и како је у овом случају

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{\sin^2\psi - 1}}{k' \sin\psi}, \qquad \cos\omega = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{k' \sin\psi},$$

Како је функција $\Lambda(k, \psi)$ непарна, то је

$$\Lambda(k, \varphi) - \Lambda(k, \psi) = \Lambda(k, \varphi) + \Lambda(k, -\psi).$$

Дакле, према (18) и (17),

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(k, \varphi) - \Lambda(k, \psi) &= \Lambda(k, \bar{\sigma}) - F k'^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\bar{\sigma}, \\ \cos\bar{\sigma} &= \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\bar{\sigma}}. \end{aligned}\right\} \quad (18a)$$

За одређивање величина σ и $\bar{\sigma}$ може се употребити Schellbach-ова ([22], стр. 107) формула

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin\varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi} + \sin\psi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}{\cos\varphi + \cos\psi}, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{\sigma}}{2} = \frac{\sin\varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi} - \sin\psi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}{\cos\varphi + \cos\psi}. \quad (20a)$$

Из адиционе теореме може се извести ова последица. Нека је

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}. \quad (21)$$

Онда је

$$\Lambda(k, \varphi) + \Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F k'^2 \sin\varphi \sin\psi. \quad (22)$$

Треба, наиме, у (17) и (18) ставити $\sigma = \pi/2$ и узети у обзир (4).

Показаћу сада да једначина (22) (уз услов (21)) кондензује у себи неке познате обрасце из теорије елиптичких интеграла.

2.2. Ставимо ли у једначини (9)

$$\operatorname{ctg}^2\psi = n,$$

она ће постати

$$\Pi_0(n) = \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} \left[\frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n+k^2}{n(n+1)}} - \Lambda(k, \psi)\right].$$

Одавде следи

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n+k^2}{n(n+1)}} - \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\,\Pi_0(n). \quad (23)$$

Ако овде уведемо величину φ на основи једначине (21), биће

$$\operatorname{ctg}^2\varphi = \frac{k^2}{n} > 0,$$

$$\Pi(\alpha, k, \psi) =$$

$$= k^2 \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} \int_0^{\psi} \frac{\sin\psi \, d\psi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\psi)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

где је α тзв. параметарски угао. За такве интеграле, као што је познато, постоји формула

$$\Pi(\alpha, k, \psi) - \Pi(\psi, k, \alpha) = E(k, \alpha) F(k, \psi) - F(k, \alpha) E(k, \psi)$$

(став о измени параметра и амплитуде). За $\alpha = \pi/2$ добива се

$$\Pi(\psi, k, \pi/2) = E(k, \psi) F - F(k, \psi) E = L(k, \psi).$$

2. *АДИЦИОНА ТЕОРЕМА ЗА ФУНКЦИЈУ* $\Lambda(k, \psi)$ *И ПОСЛЕДИЦЕ*

2.1. Heuman [9] је за функцију Λ_0 доказао адициону теорему, па тиме и адициону теорему за функцију Λ:

Кад год три амплитуде φ, ψ и σ задовољавају једначину

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\sigma} \tag{17}$$

тада важи адициона теорема за функцију $\Lambda(k, \psi)$:

$$\Lambda(k, \varphi) + \Lambda(k, \psi) = \Lambda(k, \sigma) + F k'^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\sigma, \tag{18}$$

и обрнуто.

Доказ је кратак. Наиме, као што је познато, под условом (17) за елиптичке интеграле I и II врсте важи

$$F(k', \varphi) + F(k', \psi) = F(k', \sigma), \tag{19}$$

$$E(k', \varphi) + E(k', \psi) = E(k', \sigma) + k'^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\sigma. \tag{19a}$$

Множењем горње једначине са E, доње са F и сабирањем добива се

$$[E(k', \varphi) F + F(k', \varphi) E] + [E(k', \psi) F + F(k', \psi) E] =$$

$$= [E(k', \sigma) F + F(k', \sigma) E] + F k'^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\sigma.$$

Изрази облика $E(k', \omega) F + F(k', \omega) E$ који се јављају у заградама имају, на основи (1), вредност $\Lambda(k, \omega) + F\, F(k', \omega)$. Кад се ово унесе у последњу једначину, ова постаје

$$\Lambda(k, \varphi) + \Lambda(k, \psi) + F[F(k', \varphi) + F(k', \psi) - F(k', \sigma)] =$$

$$= \Lambda(k, \sigma) + F k'^2 \sin\varphi\sin\psi\sin\sigma.$$

Како израз у средњој загради, на основи једначине (19), има вредност 0, то је тиме адициона теорема доказана.

при чему је

$$\sin^2 \varphi = \frac{n}{n+k^2}.$$

Сабирањем овог израза $\Lambda(k, \varphi)$ са једначином (23), узимајући у обзир једначину (22), добива се после краћег рачуна

$$\Pi_0(n) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} + \frac{F}{n+1} - \frac{n\,k'^2}{(n+1)(n+k^2)}\Pi_0\left[-\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}\right]. \tag{26}$$

Ово је позната формула на основи које се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте са позитивним параметром може изразити интегралом исте врсте, но у ком параметар има вредност која се налази између -1 и $-k^2$, Она се обично даје у облику

$$\Pi_0(k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\pi}{2}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha}} + \frac{F}{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha} -$$

$$-\frac{k'^2\sin^2\alpha}{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha}\Pi_0\left[-(\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha)\right],$$

на основи смене $n = k^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ [16].

2.4. Ако се на једначину (10) примени (21) и (22), тј. ако се место израза у средњој загради те једначине стави вредност $\Lambda(k, \varphi) - F k'^2 \sin\varphi \sin\psi$, добиће се једначина, једноставнија од (10),

$$\Pi_0(-1+k'^2\sin^2\psi) = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{k'^2\sin\varphi\cos\varphi}\Lambda(k, \varphi), \tag{27}$$

при чему је

$$tg\,\varphi = \frac{1}{k}ctg\,\psi,$$

а то је краће извођење познате формуле D e a n - a [3].

Примењујући исти поступак на једначину (9), добива се

$$\Pi_0(\operatorname{ctg}^2\psi) = F\cos^2\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\Lambda(k, \varphi); \tag{29}$$

и овде је

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{k}\operatorname{ctg}\psi. \tag{30}$$

Једначина (29) такође је подеснија од једначине (9), јер даје могућност да се изразу $\Lambda(k, \varphi)$ одреде границе, што ћу касније показати.

па ће зато и за нови параметар $N = k^2/n$ важити једначина (23), тј. биће

$$\Lambda(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{N+k^2}{N(N+1)}} - \sqrt{\frac{(N+1)(N+k^2)}{N}}\,\Pi_0(N).$$

Одавде излази

$$\Lambda(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} - \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\,\Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right); \quad (24)$$

сабирањем једначина (23) и (24), а на основи једначине (22), добива се

$$\Pi_0(n) + \Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} + F. \quad (25)$$

Ово је позната формула за збир два елиптичка потпуна нормална интеграла III врсте истог модула, а са различитим параметрима (L a s k a [16]). Извели смо је уз претпоставку да су параметри n и k^2/n позитивни. Но она важи и кад се параметри налазе између -1 и $-k^2$; јер, када се у једначини (10) стави

$$-1 + k'^2 \sin^2\psi = n$$

и примени исти поступак као изложени, опет резултује једначина (25). Ово је разумљиво, јер и једначина (9) и једначина (10) воде на исти израз $\Lambda(k, \psi)$.

2.3. Узмимо опет

$$n = \operatorname{ctg}^2\psi.$$

Тада важи једначина (23). Узимајући за величину φ вредност на основи једначине (21), види се да ће се величина

$$-1 + k'^2 \sin^2\varphi = -\frac{k^2(n+1)}{n+k^3}$$

налазити између -1 и $-k^2$. Стога за величину φ важи једначина (10) у којој, сада, стоји φ место ψ, у којој је нови параметар

$$N = -\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}$$

и која се, сада, због $N = -1 + k'^2\sin^2\varphi$ своди на облик

$$\Lambda(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{(N+1)(N+k^2)}{N}}\left[\Pi_0(N) - F\right],$$

тј.

$$\Lambda(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} - k'^2\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\left\{\Pi_0\left[-\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}\right] - F\right\},$$

тј.

$$\Lambda(k, \varphi) = \sin\varphi \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \theta} d\theta. \tag{36}$$

Одавде је лако видети шта су дегенерације функције $\Lambda(k, \varphi)$ за $k=0$ и $k=1$ (то се може видети и по дефиницији (1)). Наиме,

$$\Lambda(0, \varphi) = \sin\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta,$$

$$\Lambda(1, \varphi) = \operatorname{tg}\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi \sin^2\theta} d\theta = \Big[\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi \sin\theta)\Big]_0^{\pi/2}.$$

Дакле,

$$\Lambda(0, \varphi) = \frac{\pi}{2} \sin\varphi, \quad \Lambda(1, \varphi) = \varphi. \tag{36a}$$

3.2. Из једначине (36) се види да је $\Lambda(k, \varphi)$ позитивна величина. Диференцирањем по φ добивамо

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi} = \frac{E - F k'^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\varphi^2} = \frac{k'^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - k'^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} (E + F k'^2 \sin^2\varphi - 2F) =$$

$$= -\frac{k'^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - k'^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + k^2 \sin^2\theta - k'^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} d\theta.$$

Како је

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt > \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2}\, dt = \frac{\pi}{2} k',$$

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} < \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k'},$$

то је $E/F > k'^2$, тј. $E > Fk'^2$. Према томе је $\partial\Lambda/\partial\varphi > 0$, тј. функција $\Lambda(\varphi)$ монотоно расте. У затвореном интервалу $(0, \pi/2)$ њена најмања вредност је, према (1), $\Lambda(k, 0) = 0$, а највећа, према (4), излази $\Lambda(k, \pi/2) = \pi\ 2$.

Из израза за $\partial^2\Lambda/\partial\varphi^2$ види се да је $\partial^2\Lambda/\partial\varphi^2 < 0$ за $0 < \varphi < \pi/2$. Према томе, функција $\Lambda(\varphi)$ је у интервалу $(0, \pi/2)$ конвексна.

2.5. Из једначине (18) може се извести адициона теорема за функцију L. Но, она се може извести и непосредно на следећи начин. Из адиционих теорема за нормалне елиптичке интеграле I и II врсте (модуо k)

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \sigma),$$

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) = E(k, \sigma) + k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma,$$

при чему је

$$\cos\sigma = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\sigma}\,, \tag{31}$$

после множења доње једначине са F, горње са $-E$, сабирањем се добива

$$[E(k, \varphi) F - F(k, \varphi) E] + [E(k, \psi) F - F(k, \psi) E] =$$

$$= [E(k, \sigma) F - F(k, \sigma) E] + F k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma.$$

Дакле, на основи дефиниције (16),

$$L(k, \varphi) + L(k, \psi) = L(k, \sigma) + F k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma \tag{32}$$

уз услов (31) за величине φ, ψ и σ.

3. *НЕКЕ ОСОБИНЕ ФУНКЦИЈЕ* Λ

3.1. Стављајући у једначини (29)

$$\operatorname{ctg}^2 \psi = n,$$

из ње добивамо

$$\Pi_o(n) = \frac{k^2 F}{n + k^2} + \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\Lambda(k, \varphi). \tag{33}$$

Овде је

$$\Lambda(k, \varphi) = \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}} \left[\Pi_0(n) - \frac{k^2 F}{n + k^2} \right],$$

при чему је

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{n}}{k}. \tag{34}$$

Ако се, сада, интеграли Π_0 и F скупе, биће

$$\Lambda(k, \varphi) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}{1 + n \sin^2\theta}\, d\theta, \tag{35}$$

3.4. За функцију $\Lambda(k, \varphi)$ лако се изналазе границе ако се употреби облик (35), и то на следећи начин. Услед

$$\sqrt{1-k^2} \leqslant \sqrt{1-k^2 \sin^2\theta} \leqslant 1,$$

множењем ове двоструке неједначине са $\frac{d\theta}{1+n\sin^2\theta}$, после интегралења у границама од 0 до $\pi/2$ добива се

$$\frac{k'\pi}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+n\sin^2\theta} d\theta \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}.$$

Множењем са $\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}$ имамо

$$\frac{\pi}{2} k' \sqrt{\frac{n}{n+k^2}} \leqslant \Lambda(k, \varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{n+k^2}},$$

тј., због (34),

$$\frac{\pi}{2} k' \sin\varphi \leqslant \Lambda(k, \varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\sin\varphi. \tag{37}$$

4. *МУЛТИПЛИКАЦИОНА ТЕОРЕМА ЗА ФУНКЦИЈУ* $\Lambda(k, \psi)$ *И ПОСЛЕДИЦЕ*

4.1. На основи (18) имамо:

$$\Lambda(k, \psi_1) + \Lambda(k, \psi_1) = \Lambda(k, \psi_2) + Fk'^2 \sin\psi_1 \sin\psi_1 \sin\psi_2,$$

$$\Lambda(k, \psi_2) + \Lambda(k, \psi_1) = \Lambda(k, \psi_3) + Fk'^2 \sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin\psi_3,$$

. . . . . .

$$\Lambda(k, \psi_{m-1}) + \Lambda(k, \psi_1) = \Lambda(k, \psi_m) + Fk'^2 \sin\psi_1 \sin\psi_{m-1} \sin\psi_m,$$

где је према (17),

$$\cos\psi_{\nu+1} = \cos\psi_1 \cos\psi_\nu - \sin\psi_1 \sin\psi_\nu \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi_{\nu+1}},$$

$$\nu = 1, 2, \ldots m-1.$$

Обрнуто, ако узмемо ψ_1 произвољно, а $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_m$ тако да буду задовољени ових $m-1$ услова, моћићемо на основи адиционе теореме написати наведених $m-1$ једначина за Λ. Саберемо ли их, добићемо

$$m\,\Lambda(k, \psi_1) = \Lambda(k, \psi_m) + Fk'^2 \sin\psi_1 \sum_{\nu=1}^{m-1} \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1}.$$

Дакле:

Ако величине $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$ *задовољавају услове*

Од интереса је неједначина

$$\Lambda\left(k, \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\pi}{4},$$

која излази на основи Jensen-ове [13] неједначине за конвексне функције

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Доња граница је постигнута за $k=1$, јер из (36*a*) следи $\Lambda(1, \pi/4)=\pi/4$.

3.3. Ако се израз $\Lambda(k, \varphi)$ посматра као функција од k, имамо познате обрасце [5, стр. 226 – 227]

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{F}{k} + \frac{E}{kk'^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E-F}{k},$$

$$\frac{\partial F(k', \varphi)}{\partial k} = \frac{k F(k', \varphi)}{k'^2} - \frac{E(k', \varphi)}{k k'^2} + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{k\sqrt{1-k'^2 \sin^2\varphi}},$$

$$\frac{\partial E(k', \varphi)}{\partial k} = \frac{k[F(k', \varphi) - E(k', \varphi)]}{k'^2}.$$

На основи тога, из (1) излази

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial k} = \frac{(E-F)\sin\varphi\cos\varphi}{k\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = -\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

Интеграл на десној страни означићемо са $J(k)$, а коефицијенат уз њега са $y(k)$:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial k} = -y(k)\, J(k).$$

Функција $y(k)$ је позитивна и лако се можемо уверити да она монотоно расте кад се k креће од 0 до 1. Исто тако и $J(k)$ је у истом интервалу позитивно и монотоно расте. Према томе је $\partial y(k)/\partial k > 0$, $\partial J(k)/\partial k > 0$. На основи тога,

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial k^2} = -\left(J\frac{\partial y}{\partial k} + y\frac{\partial J}{\partial k}\right) < 0,$$

па је функција $\Lambda(k)$ конвексна и монотоно опада од $\Lambda(0, \varphi)$ до $\Lambda(1, \varphi)$, тј. од $^1/_2\pi\sin\varphi$ до φ (36*a*).

Како ова једначина важи за $\nu=1, 2, \ldots, m-1$, биће за $\nu=1$

$$\cos\psi_1 \cos\psi_2 + \sin\psi_1 \sin\psi_2 \sqrt{1-k'^2 \sin^2\psi_1} = \cos\psi_1, \tag{42}$$

тако да је, према претпоследњој једначини, и

$$\cos\psi_2 \cos\psi_3 + \sin\psi_2 \sin\psi_3 \sqrt{1-k'^2 \sin^2\psi_1} = \cos\psi_1, \tag{43}$$

итд., па је заједничка вредност обеју страна поменуте једначине једнака $\cos\psi_1$, што доводи на прве једначине ове тачке.

Према томе:

У мултипликационој теореми за функцију Λ *услови* (38) *могу се замениши условима* (40).

Обрасци (40) подеснији су за израчунавање величина ψ_ν него обрасци (38).

4.3. Величине $\cos\psi_\nu$ добивају се сукцесивно из $m-1$ квадратних једначина чији су коефицијенти полиноми по $\cos\psi_1$, $\cos\psi_2, \ldots,$ $\cos\psi_{m-1}$, јер из (38), после редукције и решења по $\cos\psi_{\nu+1}$ следи

$$\begin{gathered}\cos^2\psi_{\nu+1}(k^2+k'^2\cos^2\psi_1+k'^2\cos^2\psi_\nu-k'^2\cos^2\psi_1\cos^2\psi_\nu)-\\ -2\cos\psi_1\cos\psi_\nu\cos\psi_{\nu+1}+\\ +(k'^2\cos^2\psi_1\cos^2\psi_\nu+k^2\cos^2\psi_1+k^2\cos^2\psi_\nu-k^2)=0, \quad \nu=1, 2, \ldots m-1.\end{gathered} \tag{44}$$

Но могу се и амплитуде нижег индекса $\cos\psi_\nu$ изразити помоћу оних вишег индекса, $\cos\psi_{\nu+1}$. Јер, из

$$\begin{aligned}\Lambda(k,\psi_2)-\Lambda(k,\psi_1)&=\Lambda(k,\psi_1)-Fk'^2\sin\psi_1\sin\psi_1\sin\psi_2,\\ \Lambda(k,\psi_3)-\Lambda(k,\psi_1)&=\Lambda(k,\psi_2)-Fk'^2\sin\psi_1\sin\psi_2\sin\psi_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Lambda(k,\psi_m)-\Lambda(k,\psi_1)&=\Lambda(k,\psi_{m-1})-Fk'^2\sin\psi_1\sin\psi_{m-1}\sin\psi_m,\end{aligned}$$

после сабирања следи опет (39), при чему морају постојати услови

$$\begin{gathered}\cos\psi_\nu=\cos\psi_1\cos\psi_{\nu+1}+\sin\psi_1\sin\psi_{\nu+1}\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi_\nu},\\ \nu=1, 2, \ldots, m-1.\end{gathered} \tag{45}$$

Како из ове једначине излази

$$\begin{gathered}\cos^2\psi_\nu(k^2+k'^2\cos^2\psi_1+k'^2\cos^2\psi_{\nu+1}-k'^2\cos^2\psi_1\cos^2\psi_{\nu+1})-\\ -2\cos\psi_1\cos\psi_{\nu+1}\cos\psi_\nu+\\ +(k'^2\cos^2\psi_1\cos^2\psi_{\nu+1}+k^2\cos^2\psi_1+k^2\cos^2\psi_{\nu+1}-k^2)=0, \quad \nu=1, 2, \ldots m-1,\end{gathered} \tag{46}$$

то се види да се величине $\cos\psi_{m-1}$, $\cos\psi_{m-2}, \ldots, \cos\psi_2$, добивају сукцесивно из једне серије квадратних једначина чији су коефицијенти полиноми по косинусима амплитуда непосредно вишег индекса и по $\cos\psi_1$.

4.4. За функцију $\Lambda(k, \psi)$ може се такође извести мултипликациона теорема аналогно оној за функцију Λ. Ако се, наиме,

$$\cos\psi_{\nu+1} = \cos\psi_1 \cos\psi_\nu - \sin\psi_1 \sin\psi_\nu \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi_{\nu+1}}, \tag{38}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, m-1,$$

онда је

$$\Lambda(k, \psi_m) = m\,\Lambda(k, \psi_1) - Fk'^2 \sin\psi_1 \sum_{\nu=1}^{m-1} \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1}, \tag{39}$$

и обрнуто.

Зваћемо ово мултипликациона теорема за функцију $\Lambda(k, \psi)$.

На основи (20), услове (38) можемо заменити условима

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}}{2} = \frac{\sin\psi_\nu \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi_1} + \sin\psi_1 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi_\nu}}{\cos\psi + \cos\psi_\nu}, \tag{38a}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Полазећи од ψ_1 можемо поступно израчунати величине ψ_2, $\psi_3, \ldots, \psi_m$.

4.2. Узећемо у напред наведеном систему једначина две узастопне

$$\Lambda(k, \psi_{\nu-1}) + \Lambda(k, \psi_1) = \Lambda(k, \psi_\nu) + Fk'^2 \sin\psi_1 \sin\psi_{\nu-1} \sin\psi_\nu,$$
$$\Lambda(k, \psi_\nu) + \Lambda(k, \psi_1) = \Lambda(k, \psi_{\nu+1}) + Fk'^2 \sin\psi_1 \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1},$$
$$\nu = 1, 2, \ldots m-1, \quad \psi_0 = 0.$$

Писаћемо их у облику

$$\Lambda(k, \psi_\nu) - \Lambda(k, \psi_{\nu-1}) = \Lambda(k, \psi_1) - Fk'^2 \sin\psi_1 \sin\psi_{\nu-1} \sin\psi_\nu,$$
$$\Lambda(k, \psi_{\nu+1}) - \Lambda(k, \psi_\nu) = \Lambda(k, \psi_1) - Fk'^2 \sin\psi_1 \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1}.$$

Тада се, према (18a), види да је

$$\cos\psi_1 = \cos\psi_{\nu-1} \cos\psi_\nu + \sin\psi_{\nu-1} \sin\psi_\nu \sqrt{1 - k'^2 \sin\psi_1},$$
$$\cos\psi_1 = \cos\psi_\nu \cos\psi_{\nu+1} + \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi_1}.$$

После одузимања и кратке редукције следи дефинитивно

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1} + \psi_{\nu-1}}{2} = \operatorname{tg}\psi_\nu \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi_1}, \tag{40}$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, m-1, \quad \psi_0 = 0.$$

Обрнуто, одавде после множења са $2 \sin\frac{\psi_{\nu+1} - \sin\psi_{\nu-1}}{2}$ лако следи

$$\cos\psi_{\nu-1} \cos\psi_\nu - \cos\psi_\nu \cos\psi_{\nu+1} =$$
$$= (\sin\psi_{\nu+1} \sin\psi_\nu - \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu-1}) \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi_1}. \tag{41}$$

где је l неки природан број, а за φ_2 и C важи исто што је речено за φ_1 и B. Множењем једне једначине са једним, друге са неким другим рационалним бројем и сабирањем добива се

$$q_1 \Lambda(k, \varphi_1) + q_2 \Lambda(k, \varphi_2) = q \Lambda(k, \psi) + FD,$$

тј., после дељења са q,

$$p_1 \Lambda(k, \varphi_1) + p_2 \Lambda(k, \varphi_2) = \Lambda(k, \psi) + F \Psi(\sin \psi),$$

где су p_1 а p_2 рационални бројеви, а Ψ алгебарска функција. При томе се величине φ_1 и φ_2 добивају из величине ψ или, што на исто излази, величина ψ се може извести из величина φ_1 и φ_2 и то помоћу алгебарских операција над sin и cos. На исти начин као што се из $\Lambda(k, \varphi_1)$ и $\Lambda(k, \varphi_2)$ формирала једна функција $\Lambda(k, \psi)$, може се из ове и неке друге, рецимо $\Lambda(k, \varphi_3)$, формирати нова функција Λ под истим околностима, тако да се добива

$$p_1 \Lambda(k, \varphi_1) + p_2 \Lambda(k, \varphi_2) + p_3 \Lambda(k, \varphi_3) = \Lambda(k, \omega) + FG,$$

где је G алгебарска функција, итд.

Из изложенога се непосредно увиђа тачност става.

Разумљиво је да то све важи и за функцију L.

6. *О НЕКИМ РЕДУКЦИЈАМА ПОТПУНОГ НОРМАЛНОГ ЕЛИПТИЧКОГ ИНТЕГРАЛА III ВРСТЕ*

6.1. Једначине (9) и (10), ако се узме у обзир значење функције Λ, изражавају могућност да се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте сведе на комбинације потпуних и непотпуних нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. То исто се види и из једначине (11), у којој се параметар интеграла III врсте налази између $-k^2$ и 0. Овиме је омогућено израчунавање потпуних нормалних елиптичких интеграла III врсте помоћу постојећих таблица за елиптичке интеграле [12].

У специјалном случају $n=0$, интеграл

$$\Pi_0(n) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

своди се на

$$\Pi_0 = F,$$

док се за $n=-k^2$ лако можемо уверити да је

$$\Pi_0 = \frac{E}{1-k^2}.$$

У ова два позната случаја, потпуни нормални елиптички интеграл III врсте изражава се само потпуним нормалним елиптичким интегралима I и II врсте.

уоче адиционе теореме за функције L и Λ, види се да на десној страни (32) фигурише величина k док на десној страни (18) фигурише величина k'. Осим тога, и услови (17) и (31) су аналогни, само што у (31) фигурише k место k'. Стога ће и мултипликациона теорема за функцију L бити аналогна оној за функцију Λ, само ће место k' фигурисати величина k.

Биће, дакле,

$$L(k, \psi_m) = mL(k, \psi) - Fk^2 \sin\psi_1 \sum_{\nu=1}^{m-1} \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1} \tag{47}$$

уз услове

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_{\nu+1}+\psi_{\nu-1}}{2} = \operatorname{tg}\psi_\nu \sqrt{1-k^2\sin^2\psi_1}, \tag{48}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, m-1, \quad \psi_0 = 0.$$

5. *ЈЕДАН СТАВ ОПШТИЈЕ ПРИРОДЕ*

Нека су p_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ произвољни рационални бројеви, а φ_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ дате амлитуде. Тада је

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \Lambda(k, \varphi) = \Lambda(k, \psi) + FA,$$

тј. агрегат на левој страни може се изразити једном једином функцијом $\Lambda(k, \psi)$ истог модула, са амплитудом ψ која се добива из амплитуда φ_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ помоћу алгебарских операција, и са једним изразом FA у коме је F потпуни нормални елиптички интеграл прве врсте такође истог модула, а A је алгебарска функција од $\sin\psi$.

Доказ. Систем од $m-1$ једначина (38) у коме је $\psi_0=0$ и $\psi_1=\psi$ даје могућност да се, поступно, $m-1$ величина $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_m$ изрази помоћу величине ψ. Што је још важно истаћи, sin и cos тих величина добивају се помоћу алгебарских операција. На тај начин, мултипликациона теорема (39) може се писати у облику

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{1}{m}\Lambda[k, f(\psi)] + \frac{1}{m}Fk'^2 \sin\psi\, \Phi(\sin\psi),$$

а функција Φ је алгебарска функција. На основи тога се може писати

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{1}{m}\Lambda(k, \varphi_1) + BF,$$

где је B алгебарска функција од $\sin\psi$, а φ_1 се добива из ψ помоћу алгебарских операција над sin и cos. Исто тако, може се писати

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{1}{l}\Lambda(k, \varphi_2) + CF,$$

па, (49) постаје

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{4} + \frac{F k'^2}{2(1+k)} = \frac{\pi}{4} + \frac{F}{2}(1-k). \tag{51}$$

Узимајући, сада, параметар интеграла III врсте

$$n = \operatorname{ctg}^2 \psi = k > 0,$$

може се применити једначина (9), која важи за позитивне параметре, те изразити Λ помоћу Π_0. Како је у нашем случају $n = k$

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F - (1+k)\,\Pi_0(n)$$

(види такође (23)), то излази

$$\Pi_0(n) = \frac{\pi}{4(1+k)} + \frac{1}{2}F \quad \text{за} \quad n = k. \tag{52}$$

Ако се узме

$$n = -1 + k'^2 \sin^2 \psi,$$

дакле таква вредност параметра која се налази између -1 и k^2, тада се може применити једначина (10), која важи за такве параметре. Због

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + \frac{k'^2 \sin\psi \cos\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}} \left[F - \Pi_0(n)\right],$$

а у овом случају је

$$n = -1 + \frac{k'^2}{1 + \operatorname{ctg}^2\psi} = -1 + \frac{k'^2}{1+k} = -k,$$

то се због

$$\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+k}}, \qquad \cos\psi = \sqrt{\frac{k}{1+k}},$$

добива

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + (1-k)\left[F - \Pi_0(n)\right].$$

Кад се ова вредност унесе у једначину (51), из ове резултује

$$\Pi_0(n) = \frac{\pi}{4(1-k)} + \frac{1}{2}F, \tag{54}$$

за

$$n = -k \tag{55}$$

Може се поставити питање: за које вредности параметра се потпуни нормални елиптички интеграли III врсте могу свести на изразе у којима се појављују само потпуни нормални елиптички интеграли I и II врсте.

Решавајући делимично ово питање, указујем на једну методу добивања везе између параметра и модула, применом које се решава постављено питање.

Пре него што пређем на излагање, напоменуо бих, још једном, да параметри мањи од -1 не долазе у обзир услед дивергенције интеграла III врсте у овом случају.

Један одговор на горње питање је изненађујуће прост ако се употреби функција $\Lambda(k, \psi)$ односно $L(k, \psi)$. Треба само у једначини (39), којом је изражена мултипликациона теорема за функцију (39) (уз услове (38)), ставити $\psi_m = \pi/2$. Тада, због једначине (4), поменута једначина (39) добива облик

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + Fk'^2 \sin\psi \sin\psi_{m-1}\right) + \frac{F k'^2 \sin\psi}{m} \sum_{\nu=2}^{m-1} \sin\psi_{\nu-1} \sin\psi_\nu, \tag{49}$$

а место леве стране може се узети вредност било из једначине (9) било из (10), већ према томе који се параметар жели третирати. При томе се још може користити адициона теорема (25) за елиптичке интеграле III врсте, која важи за $n > 0$ и $-1 < n < -k^2$, тако да се добивају два низа интеграла III врсте изражених само помоћу потпуних нормалних елиптичких интеграла I врсте.

Из система (38) од $m-1$ једначина, услед $\psi_0 = 0$, $\psi_m = \pi/2$, може се израчунати $m-1$ величина $\psi_1 = \psi$, $\psi_2, \ldots, \psi_{m-1}$, и оне ће бити изражене помоћу модула k. Како је величина m произвољна, за разне вредности m добиће се разне везе између параметра и модула.

За функцију L важи слично, па ћу то касније изложити.

6.2. У једначини (38) варира величина ν од 1 до $m-1$, па се може почети са случајем $m=2$.

За овај случај, у једначини (49) отпада други члан на десној страни, тако да се ова своди на

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{1}{m}\left(\frac{\pi}{2} + F k'^2 \sin\psi \sin\psi_{m-1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} F k'^2 \sin^2\psi,$$

а услови (38) се своде на један једини ($\psi_2 = \pi/2$)

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_2 + \psi_0}{2} = 1 = \operatorname{tg}\psi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi},$$

тј. на

$$\operatorname{ctg}^2\psi = k, \tag{50}$$

има један реалан и два комплексна корена, то ако се стави

$$A(\lambda) = \sqrt{\frac{4(1-\lambda^2)}{\lambda^4}}, \tag{59}$$

због

$$z_1 = 1 + A(k') \quad z_2 = -1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} A(k'), \quad z_3 = -1 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} A(k'),$$

реални корени једначине (58) јесу

$$\sin\psi_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + A} \pm \sqrt{2 - A + 2\sqrt{1 - A + A^2}}\right).$$

Како је још $\sin\psi_1 < 0$, то у обзир долази друга вредност $\sin\psi_2$, па је

$$\sin\psi = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 + A(k')} + \sqrt{2 - A(k') + 2\sqrt{1 - A(k') + A^2(k')}}\right] \tag{60}$$

тражена вредност.

Водећи рачуна о вредности ψ_2 из једначине (57), може се писати

$$\sin\psi_2 = \frac{2\sin\psi\cos\psi\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi}}{1 - k'^2\sin^4\psi},$$

тј., због вредности $1 - k'^2\sin^4\psi$ из једначине (58),

$$\sin\psi_2 = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi}}. \tag{61}$$

Уношењем овога у једначину (56), добивамо

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{6} + \frac{F k'^2}{3} \frac{\sin\psi\cos\psi(1 + \sin\psi)}{\sqrt{1 - k'^2\sin\psi}}; \tag{62}$$

при томе ψ има вредност из једначине (60).

Узимајући, сада,

$$n = \operatorname{ctg}^2\psi,$$

тј. бирајући позитиван параметар интеграла III врсте, може се применити једначина (9), па се добива

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F\operatorname{tg}\psi\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi} - \frac{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi}}{\sin\psi\cos\psi}\Pi_0(\operatorname{ctg}^2\psi) =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{F k'^2}{3} \frac{\sin\psi\cos\psi(1 + \sin\psi)}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\psi}},$$

6.3. Узмимо, сада, случај $m=3$. Овде једначина (49) постаје

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + Fk'^2 \sin\psi \sin\psi_2\right) + \frac{Fk'^2}{3} \sin\psi \sin\psi_1 \sin\psi_2, \quad (56)$$

а услови (48) постају

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_2 + \psi_0}{2} = \operatorname{tg}\psi_1 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_3 + \psi_1}{2} = \operatorname{tg}\psi_2 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}.$$

Услед $\psi_0 = 0$; $\psi_1 = \psi$; $\psi_3 = \pi/2$, из прве једначине следи

$$\operatorname{tg}\psi_2 = \frac{2\operatorname{tg}\psi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\psi}}{1 - \operatorname{tg}^2\psi\,(1 - k'^2 \sin^2\psi)}. \quad (57)$$

Кад се ова вредност унесе у другу једначину, добива се

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\psi\,(1 - k'^2 \sin^2\psi)}{1 - \operatorname{tg}^2\psi\,(1 - k'^2 \sin^2\psi)},$$

тј.

$$k'^2 \sin^5\psi - k'^2 \sin^4\psi - 2k'^2 \sin^3\psi + 2\sin^2\psi + \sin\psi - 1 = 0.$$

Како у обзир долазе вредности ψ које се налазе између 0 и $\pi/2$, то отпада корен $\sin\psi = -1$ последње једначине. На тај начин, место тога услова добива се услов

$$k'^2 \sin^4\psi - 2k'^2 \sin^3\psi + 2\sin\psi - 1 = 0. \quad (58)$$

У обзир би дошла једино она вредност за $\sin\psi$ која се налази између 0 и 1. Ако се примени, рецимо, Sturm-ова метода за раздвајање корена, лако је показати да постоји само једна таква вредност за $\sin\psi$.

Сменом

$$\sin\psi = \frac{1}{2}(t+1)$$

горња једначина се своди на облик

$$t^4 - 6t^2 + \frac{8(2 - k'^2)}{k'^2}\, t - 3 = 0.$$

Како кубна резолвента ове једначине

$$z^3 - 3z^2 + 3z - \frac{(2 - k'^2)^2}{k'^4} = 0$$

за вредност параметра

$$n = -1 + k'^2 \sin^2 \psi \tag{68}$$

и вредност ψ из једначине (58).

Из овог излагања јасно се види пут за изналажење онаквих вредности параметра n интеграла III врсте код којих се тај интеграл изражава само помоћу потпуних нормалних елиптичких интеграла. Разумљиво је, да ће се при сваком даљем кораку једначине компликовати. Али, на основи досадашњих резултата, ипак се може извући општи закључак да су модуо и параметар при горњим редукцијама увек везани алгебарским једначинама и да потпуни интеграл F прве врсте има исти модуо као интеграл треће врсте.

6.4. Као што сам већ напоменуо, коришћењем адиционе теореме (25) за интеграле III врсте, која важи за $n > 0$ и $-1 < n < -k^2$, може се добити још један низ интеграла III врсте који се изражавају потпуним интегралима I врсте. Из једначине (25), наиме, следи

$$\Pi_0 \left(\frac{k^2}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} + F - \Pi_0 (n). \tag{69}$$

За $n=k$ нови параметар k^2/n такође постаје k, па ако се у једначини (69) стави $n=k$, добива се опет вредност (52); дакле, никаква нова вредност. То исто важи и за случај $n=-k$ (обе ове вредности резултовале су из случаја $m=2$).

Међутим, за остале случајеве $m > 2$ добивају се потпуно нове вредности за интеграле Π_0. Тако за $n = \operatorname{ctg}^2 \psi$, где ψ има вредност из једначине (58), тј. из једначине (60), интеграл $\Pi_0 (n)$ у једначини (69) има вредност (65). Ако се још у једначини (69) стави $n = \operatorname{ctg}^2 \psi$, биће

$$\Pi_0 (k^2 \operatorname{tg}^2 \psi) = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}} - \frac{\pi}{3k'} \sqrt{2 \sin \psi - 1} + \\ + \frac{F}{3} (2 + \sin \psi - \sin^2 \psi)$$

која једначина, услед (63), добива простији облик

$$\Pi_0 (k^2 \operatorname{tg}^2 \psi) = \frac{\pi}{6k'} \sqrt{2 \sin \psi - 1} + \frac{F}{3} (2 + \sin \psi - \sin^2 \psi); \tag{70}$$

при том, $\sin \psi$ има вредност (60).

Ако се за n узме вредност $-1 + k'^2 \sin^2 \psi$, где ψ такође има вредност из једначине (58) односно (60), интеграл $\Pi_0 (n)$ у

одакле следи вредност за Π_0. Услед вредности (60) за $\sin\psi$, овде ће се појавити компликовани изрази за рачунање, но примењујући једначину (58) могу се постићи извесна упрошћења.

Тако је

$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}=\frac{\sin\psi\cos\psi\sqrt{2\sin\psi-\sin^2\psi}}{\sqrt{(k'^2\sin^4\psi-2k'^2\sin^3\psi+2\sin\psi)-\sin^2\psi}}=$$

$$=\sin\psi\sqrt{2\sin\psi-\sin^2\psi}=\frac{1}{k'}\sqrt{2k'^2\sin^3\psi-\sin^4\psi}\,,$$

тј.

$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}=\frac{1}{k'}\sqrt{2\sin\psi-1}, \tag{63}$$

тако да је

$$\Lambda(k,\psi)=\frac{\pi}{6}+\frac{Fk'}{3}(1+\sin\psi)\sqrt{2\sin\psi-1}\,. \tag{64}$$

Услед овога, израз за Π_0 добива облик

$$\Pi_0(\operatorname{ctg}^2\psi)=\frac{\pi}{3k'}\sqrt{2\sin\psi-1}+\frac{F}{3}(1-\sin\psi+\sin^2\psi), \tag{65}$$

при чему $\sin\psi$ има вредност (60). Параметар овог интеграла има вредност

$$n=\operatorname{ctg}^2\psi=\frac{1}{1+\sin^2\psi}\,. \tag{66}$$

И овде, разумљиво, $\sin\psi$ има вредност (60).

Ако се опет узме

$$n=-1+k'^2\sin^2\psi,$$

због $-1<n<-k^2$ може се применити једначина (10), из које је

$$\Lambda(k,\psi)=\frac{\pi}{2}-\frac{k'^2\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\left(\Pi_0(-1+k'^2\sin^2\psi)-F\right),$$

па због вредности $\Lambda(k,\psi)$ из једначине (62) следи

$$\Pi_0(n)=\frac{\pi}{3}\,\frac{\sqrt{1-k'^2\sin\psi}}{k'^2\sin\psi\cos\psi}+\frac{F}{3}(2-\sin\psi).$$

Дакле, на основи једначине (63), биће

$$\Pi_0(n)=\frac{\pi}{3k'\sqrt{2\sin\psi-1}}+\frac{F}{3}(2-\sin\psi) \tag{67}$$

Одавде се види да се за разне вредности m такође добива низ интеграла III врсте (параметар $-k^2 < n < 0$) изражених потпуним интегралом I врсте.

И овде се из система (48) од $m-1$ једначине, услед $\psi_0=0$, $\psi_m=\pi/2$, може израчунати $m-1$ величина $\psi_1=\psi$, $\psi_2, \ldots, \psi_{m-1}$; оне ће бити изражене помоћу модула k, тако да се за разне вредности m добивају разне везе између модула и параметра.

Због варијације величине ν од 1 до $m-1$, може се почети са случајем $m=2$. За овај случај отпада други члан у малој загради једначине (72) тако да се ова своди на

$$\Pi_0\,(-k^2\sin^2\psi)=\frac{F(2\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+k^2\operatorname{tg}\psi\sin^2\psi)}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

($\psi_1=\psi$), а услови (48) се своде на један једини ($\psi_2=\pi/2$)

$$\operatorname{tg}\frac{\psi_2+\psi_0}{2}=1=\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi},$$

тј. на

$$\operatorname{ctg}^2\psi=k;$$

Дакле,

$$\Pi_0\,(-1+k')=\frac{1+k'}{2k'}F. \tag{73}$$

Ако се упореде услови (38) за функцију $\Lambda(k,\psi)$ и услови (48) за функцију $L(k,\psi)$, види се да се они разликују само у томе што у (48) фигурише k место k'. Стога ће, напр., у случају $m=3$ важити аналогна једначина једначини (58), тј.

$$k^2\sin^4\psi-2k^2\sin^3\psi+2\sin\psi-1=0, \tag{74}$$

а место (60) биће

$$\sin\psi=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1+A(k)}+\sqrt{2-A(k)+2\sqrt{1-A(k)+A^2(k)}}\right]. \tag{75}$$

За $m=3$, једначина (72) постаће

$$\Pi_0\,(-k^2\sin^2\psi)=$$

$$=\frac{F}{3\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\left[3\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+k^2\operatorname{tg}\psi\sin\psi\sin\psi_2(1+\sin\psi)\right];$$

како је, аналогно једначини (61),

$$\sin\psi_2=\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

једначини (69) има вредност (67). Ако се још у једначину (69) стави $n=-1+k'^2\sin^2\psi$, биће

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2}{1-k'^2\sin^2\psi}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2k'^2}\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{\sin\psi\cos\psi}-\frac{\pi}{3\,k'\sqrt{2\sin\psi-1}}+\frac{F}{3}(1+\sin\psi).$$

Најпосле, користећи (63), следи

$$\Pi_0\left(-\frac{k^2}{1-k'^2\sin^2\psi}\right)=\frac{\pi}{6\,k'\sqrt{2\sin\psi-1}}+\frac{F}{3}(1+\sin\psi), \quad (71)$$

где $\sin\psi$ има вредност (60).

И овде се види пут за изналажење вредности интеграла III врсте изражених потпуним интегралима I врсте са истим модулом.

Приметимо још да су резултати за случајеве $n=k$ и $n=-k$ били раније познати [5]. Овде су они дедуцирани из опште методе изложене у овом параграфу.

6.5. Још један низ вредности интеграла III врсте редукованих на потпуне интеграле I врсте добива се помоћу функција $L(k,\psi)$. Наиме, и овде треба у једначини (47) (уз услове (48)), којом је изражена мултипликациона теорема за функцију $L(k,\psi)$, ставити $\psi_m=\pi/2$. Тада је, према значењу те функције на основи једначине (16),

$$L\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=0$$

а једначина (47) постаје

$$L(k,\psi)=\frac{F\,k^2}{m}\sin\psi\sin\psi_{m-1}+\frac{1}{m}F\,k^2\sin\psi\sum_{\nu=2}^{m-1}\sin\psi_{\nu-1}\sin\psi_\nu.$$

Место леве стране се може узети вредност од L из (11), према којој је

$$L(k,\psi)=\left(\Pi_0(-k^2\sin^2\psi)-F\right)\operatorname{ctg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}.$$

Тако се добива

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi)=$$

$$=\frac{F}{m\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\left[m\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+k^2\operatorname{tg}\psi\sin\psi\left(\sin\psi_{m-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\nu=2}^{m-1}\sin\psi_{\nu-1}\sin\psi_\nu\right)\right]. \quad (72)$$

II. ПРИМЕНЕ

7. *ГЕОМЕТРИСКО ЗНАЧЕЊЕ ФУНКЦИЈЕ* $\Lambda(k, \varphi)$

7.1. Уочимо једну усправну купу са елиптичком основом. Нека су осовине основе $2a$ и $2b$ нека је t ексцентрична аномалија те елипсе. Ако се са H означи висина купе, њен омотач, као што је познато [26, стр. 305 – 306], дат је интегралом

$$M=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{H^2}{a^2}\cos^2 t+\frac{H^2}{b^2}\sin^2 t+1}\,dt.$$

Ако се отвор омотачеве мреже обележи са Ω, а ма која изводница са ρ, тада је

$$dM=\frac{1}{2}\rho^2\,d\Omega,$$

а из ове једначине, услед симетрије купе, следи

$$\frac{1}{4}\Omega=ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\sqrt{\frac{H^2}{a^2}\cos^2 t+\frac{H^2}{b^2}\sin^2 t+1}\;dt=$$

$$=ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\sqrt{\left(1+\frac{H^2}{b^2}\right)-\left(\frac{H^2}{b^2}-\frac{H^2}{a^2}\right)\cos^2 t}\;dt,$$

тј.

$$\frac{1}{4}\Omega=a\sqrt{H^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\rho^2}\sqrt{1-\frac{H^2\varepsilon^2}{H^2+b^2}\cos^2 t}\;dt,$$

где је $\varepsilon=e/a$ нумерички, а e линеарни ексцентрицитет елипсе. Ако се са r обележи онај полупречник основе који одговара изводници ρ, биће

$$\rho^2=H^2+r^2=H^2+(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t)=(b^2+H^2)\left(1+\frac{e^2}{b^2+H^2}\cos^2 t\right);$$

уношењем ове вредности за ρ у израз за отвор омотача добива се

$$\frac{1}{4}\Omega=\frac{a}{\sqrt{H^2+b^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-\frac{H^2\varepsilon^2}{b^2+H^2}\cos^2 t}}{1+\frac{e^2}{H^2+b^2}\cos^2 t}\,dt.$$

го добивамо

$$\Pi_0\,(-k^2\sin^2\psi)=\frac{F}{3}\,\frac{3-2\,k^2\sin^2\psi+k^2\sin^3\psi}{1-k^2\sin^2\psi}.$$

Да би се овде избегли компликовани изрази за рачунање, може се последњи разломак проширити са $\sin\psi$ и применити једначина (74). Биће

$$\Pi_0\,(-k^2\sin^2\psi)=\frac{F}{3}\,\frac{3\sin\psi+(k^2\sin^4\psi-2\,k^2\sin^3\psi)}{\sin\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)}=$$

$$=\frac{F}{3}\,\frac{1+\sin\psi}{\sin\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)}.$$

После поновног проширивања са $2-\sin\psi$ следи

$$\Pi_0\,(-k^2\sin^2\psi)=\frac{F}{3}\,\frac{2+\sin\psi-\sin^2\psi}{(k^2\sin^4\psi-2\,k^2\sin^3\psi+2\sin\psi)-\sin^2\psi}=$$

$$=\frac{F}{3}\,\frac{2+\sin\psi-\sin^2\psi}{1-\sin^2\psi},$$

тј.

$$\Pi_0\,(-k^2\sin^2\psi)=\frac{F}{3}\left(1+\frac{1}{1-\sin\psi}\right), \tag{76}$$

при чему $\sin\psi$ има вредност (75).

И овде ће се разумљиво, при свакој даљој вредности за m рачуни компликовати. Но и овде су тешкоће чисто алгебарске природе, јер су и овде параметар и модуо везани алгебарским једначинама. Ипак, осим везе облика, рецимо

$$f\,(n,k)=0,$$

које су постојале кад смо употребљавали функцију Λ, неће се појавити никакве везе друге природе које би важиле радећи са функцијом L. Са овом функцијом, према раније напоменутоме, везе ће бити сличне, тј. облика

$$f\,(n,k')=0.$$

Из изложенога се, дакле, види да постоји бесконачно много случајева када се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте изражава само потпуним нормалним елиптичким интегралом I врсте, истог модула.

Од интереса је да се још истакне геометриско значење неједначине (37) из I дела. Због

$$k' = \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{\delta}{2}}$$

и

$$\sin\frac{\delta_1}{2} = \frac{a}{\sqrt{H^2+a^2}} = \frac{a}{\sqrt{b^2\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}+a^2}} = \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{\delta}{2}}} = \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{k'}, \quad (6)$$

поменута неједначина се своди на

$$2\pi\sin\frac{\delta}{2} \leqslant \Omega \leqslant 2\pi\sin\frac{\delta_1}{2},$$

па каже да се отвор омотачеве мреже усправне елиптичке купе налази између отвора двеју кружних купа чији су пречници основâ мала и велика осовина елипсе.

8. *ПРИМЕНА НА КОСУ КРУЖНУ КУПУ*

8.1. Очигледно је да израз за отвор омотача усправне елиптичке купе даје и величину отвора косе кружне купе. Јер, ако косу кружну купу пресечемо једном равни нормалном на симетралу оног угла карактеристичног троугла који лежи наспрам пречника основе, добиће се усправна елиптичка купа са истим отвором омотачеве мреже. Ради се само о томе да се величина Λ која карактерише отвор омотача усправне елиптичке купе изрази елементима косе кружне купе.

Уочимо једну косу кружну купу (в. сл.). Нека буду: r полупречник основе, s_1 и s_2 највећа и најмања изводница, s осовина, α угао осовине према основи, β, γ и δ углови карактеристичног троугла који леже наспрам страна s_1, s_2 и $2r$, а ρ макоја изводница купе.

Кроз тачку B положимо раван B_e нормално на симетралу VS угла δ, а кроз VS положимо раван Π нормално на раван K карактеристичног троугла. Раван B_e сећи ће раван K по пречнику BG пресечне елипсе, раван Π сећи ће раван B_e по пречнику DL, док ће та иста раван сећи кружну основу B_k по правој AO. Због $VS \perp B_e$ имамо $K \perp B_e$. Како је још $\Pi \perp K$, биће пресек (Π, B_e) тј. права $SD \perp K$, дакле $SD \perp BS$ и $SD \perp VS$. Ако се кроз изводнице BV и CV положе тангенцијалне равни купе, оне ће сећи раван B_k по тангентама на ту основу и биће нормалне на BC, дакле и и на BG. Стога ће пречник DL бити паралелан са тим тангентама, па ће BG и DL бити коњуговани дијаметри. Пошто су они међу-

Због $\varepsilon < 1$, коефицијенат уз $\cos^2 t$ у бројиоцу мањи је од јединице; обележимо га са k^2. Коефицијенат уз $\cos^2 t$ у имениоцу обележимо са n. Тада је

$$\frac{a}{\sqrt{H^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}. \tag{1}$$

Ако се још изврши смена $t = \pi/2 - \theta$, израз за отвор омотача добиће облик

$$\Omega = 4\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2\theta}}{1+n\sin^2\theta}\, d\theta, \tag{2}$$

тј., према једначини (35) у I делу,

$$\Omega = 4\,\Lambda(k, \varphi), \tag{3}$$

где је, због једначине (34) у I делу,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{H}.$$

Ако се са δ_1 обележи угао осовинског пресека који пролази кроз велику осовину елипсе и који лежи наспрам те осовине, биће

$$\frac{a}{H} = \operatorname{tg}\frac{\delta_1}{2},$$

па је зато

$$\varphi = \frac{\delta_1}{2}. \tag{4}$$

Означимо са δ угао осовинског пресека који пролази кроз малу осовину елипсе и који лежи наспрам те мале осовине, биће

$$k = \frac{H\varepsilon}{\sqrt{H^2 + b^2}} = \varepsilon \cos\frac{\delta}{2}. \tag{5}$$

Из горњег излагања јасно се види геометриско значење израза Λ:

Израз $\Lambda(k, \varphi)$ претставља четвртину отвора мреже усправне елиптичке купе. При томе величине k и φ имају значење (5) *и* (4).

7.2. Код кружне купе је $\varepsilon = 0$, тј. $k = 0$, па због $\Lambda(0, \varphi) = \pi/2 \sin\varphi$ излази за отвор омотача познати елементарни образац $\Omega = 2\pi \sin\varphi$. Кад купа дегенерише у равну фигуру, биће $\varphi = \pi/2$ па је, према Legendre-овој релацији, $\Omega = 2\pi$, што се и могло, очекивати.

На основи ових података лако се изналазе величине k и φ. Из

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - s_1 s_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

следи на основи једначине (8),

$$\varepsilon = \frac{s_1 - s_2}{2r} = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}}, \tag{9}$$

па је, на основи једначине (5),

$$k = \sin \frac{\beta - \gamma}{2}. \tag{10}$$

Величина φ добива се из једначина (4) и (6):

$$\sin \varphi = \sin \frac{\delta_1}{2} = \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{2r}{s_1 + s_2}. \tag{11}$$

На тај начин, отвор омотача косе кружне купе је величина $4\,\Lambda\,(k, \varphi)$, где k и φ, сада, имају значења (10) и (11). Дакле,

$$\Omega = 4\,\Lambda\left(\sin \frac{\beta - \gamma}{2},\quad \arcsin \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}\right).$$

8.2. Да би се величина $\Lambda\,(k, \varphi)$ изразила у облику интеграла (2), потребно је да се независна променљива θ изрази неком величином која се налази на основи кружне клупе, рецимо углом ω, који гради полупречник одговарајући изводници ρ са полупречником $\overline{BO_1}$. Величина θ претставља комплемент ексцентричне аномалије. На слици, нека тој величини одговара нека тачка N_1 елипсе, тако да се θ рачуна почевши од мале осовине $\overline{BG}$. Угао θ_1, који заклапа полупречник $r = \overline{N_1 S}$ са малом осовином, добиће се из

$$\operatorname{ctg} \theta_1 = \frac{b \cos \theta}{a \sin \theta},$$

собно нормални, то ће BG и LD претстављати осовине пресечне елипсе.

Како је и $AO \perp VO$, то је $AO \| SD$. Из $\Delta AOV \sim SDV$ излази

$$\overline{SD} = \frac{\overline{AO} \cdot H}{\overline{OV}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OV}} s_2 \cos \frac{\delta}{2};$$

како је

$$\overline{AO}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OC},$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{OB} &= \frac{2 r s_2}{s_1 + s_2}, \\ \overline{OC} &= 2r - \overline{OB}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

то је

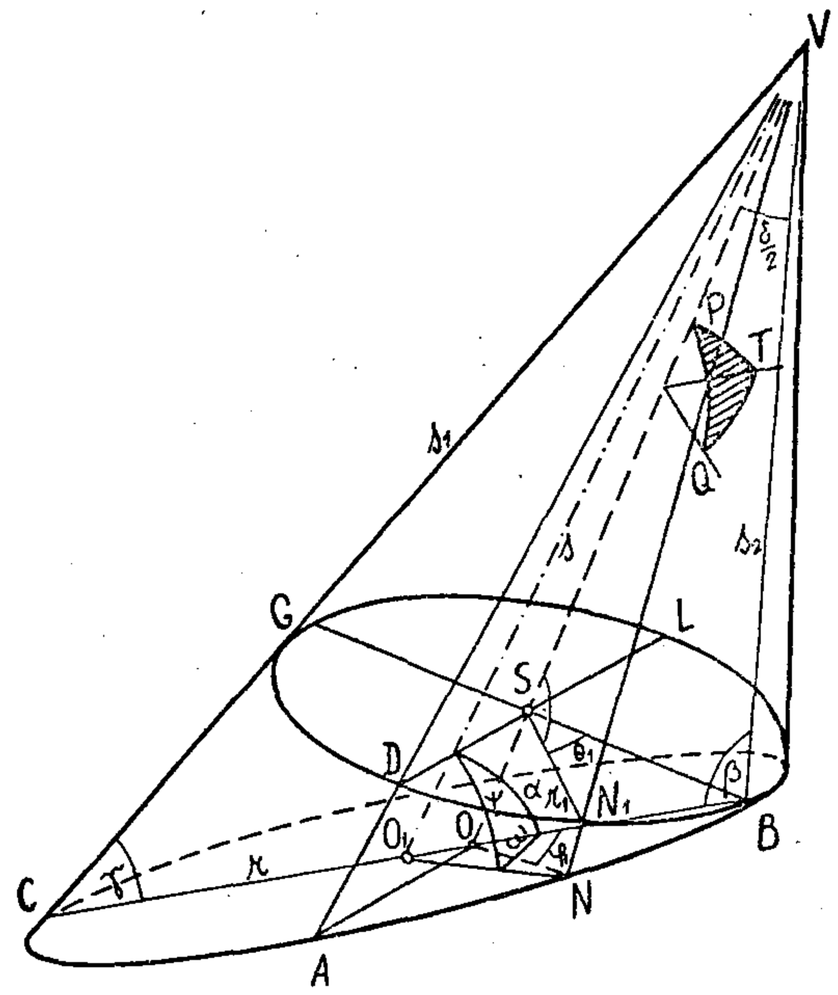
$$\overline{AO} = \frac{2r \sqrt{s_1 s_2}}{s_1 + s_2}.$$

Величина $\overline{OV}$ добива се из

$$\frac{\overline{OV}}{\sin \beta} = \frac{\overline{BO}}{\sin \frac{\delta}{2}},$$

те је

$$\overline{OV} = \frac{2 r s_2}{s_1 + s_2} \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$



Услед тога је

$$\overline{SD} = \frac{1}{2} \sqrt{s_1 s_2} \frac{\sin \delta}{\sin \beta} = r \sqrt{\frac{s_2}{s_1}}.$$

Даље је

$$\overline{BS} = s_2 \sin \frac{\delta}{2}.$$

На основи једначине

$$4r^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos \delta = (s_1 - s_2)^2 + 4 s_1 s_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}, \qquad (8)$$

лако се види да је $\overline{BS} < \overline{DS}$. Према томе, величине $\overline{DS}$ и $\overline{BS}$ претстављају велику и малу полуосовину елипсе:

$$a = r \sqrt{\frac{s_2}{s_1}}, \quad b = s_2 \sin \frac{\delta}{2}.$$

и једначине (9), добивамо

$$n = \frac{(s_1 - s_2)^2}{4\, s_1\, s_2}.$$

На основи тога,

$$1 + n \sin^2 \theta = \frac{2\,[(s_1^2 + s_2^2) - (s_1^2 - s_2^2) \cos \omega]}{[(s_1 + s_2) - (s_1 - s_2) \cos \omega]^2}.$$

Ако са ψ означимо угао осовине купе са полупречником $\overline{O_1 N}$, луци α, ω и ψ образоваће правоугли сферни троугао, коме је ψ хипотенуза. Због

$$\cos \psi = \cos \alpha \cos \omega,$$

за изводницу $\overline{VN} = \rho$ следи

$$\rho^2 = s^2 + r^2 - 2rs \cos \alpha \cos \varphi, \tag{16}$$

Међутим, из релација између страна и углова карактеристичног троугла

$$s_1^2 = s^2 + r^2 + 2rs \cos \alpha\,, \quad s_2^2 = s^2 + r^2 - 2rs \cos \alpha\,,$$

излази

$$s_1^2 + s_2^2 = 2\,(s^2 + r^2), \qquad s_1^2 - s_2^2 = 4\, r\, s \cos \alpha, \tag{17}$$

па за изводницу ρ имамо

$$\rho^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} - \frac{s_1^2 - s_2^2}{2} \cos \omega, \tag{18}$$

тако да је

$$1 + n \sin^2 \theta = \frac{4\, \rho^2}{[(s_1 + s_2) - (s_1 - s_2) \cos \omega]^2}. \tag{19}$$

На основи релација из карактеристичног троугла

$$\frac{s_1 - s_2}{2\, r} = \frac{\sin \dfrac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \dfrac{\delta}{2}} = \frac{k}{\cos \dfrac{\delta}{2}},$$

$$4\, r^2 = s_1^2 + s^2 - 2\, s_1\, s_2 \cos \delta = (s_1 + s_2)^2 - 4\, s_1\, s_2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

излази још

$$k = \frac{s_1 - s_2}{2\, r} \cos \frac{\delta}{2} \tag{20}$$

и

$$4\, s_1\, s_2 \cos^2 \frac{\delta}{2} = (s_1 + s_2)^2 - 4\, r^2. \tag{21}$$

тј. биће

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{r}{\sqrt{s_1 s_2}\sin\frac{\delta}{2}}\operatorname{ctg}\theta_1 .$$

Ако у произвољној тачки висине елиптичке купе замислимо центар неке лопте, раван карактеристичног троугла, раван VSN_1 и раван кроз поменуту тачку висине паралелна са кружном основом образоваће рогаљ. Његове стране граде на лопти сферни троугао PQT, коме је угао код T прав. Угао P биће, очигледно, једнак углу θ_1, док ће страна $\widehat{PT}$ сферног троугла имати величину $\pi/2 - (\beta - \gamma)/2$. Ако се страна $\widehat{TQ}$ означи са φ_1, биће

$$\operatorname{ctg}\theta_1 = \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{ctg}\varphi_1 ,$$

па је зато

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{r}{\sqrt{s_1 s_2}}\,\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{s_1+s_2}{2\sqrt{s_1 s_2}}\operatorname{ctg}\varphi_1 .$$

Изводница ρ кроз тачку N_1 нека сече кружну основу у тачки N. Због $\sphericalangle NOB = \varphi_1$, из троугла NO_1O следи

$$\frac{\overline{O_1O}}{r} = \frac{\sin(\varphi_1-\omega)}{\sin\varphi_1} = \cos\omega - \operatorname{ctg}\varphi_1\sin\omega. \tag{12}$$

Како је, на основи једначине (7)

$$\overline{O_1O} = r - \overline{OB} = r\,\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2},$$

то, на основи вредности за $\operatorname{ctg}\varphi_1$, из (12) излази

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{(s_1+s_2)\cos\omega-(s_1-s_2)}{2\sqrt{s_1 s_2}\sin\omega}. \tag{13}$$

Одавде је

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{s_1 s_2}\sin\omega}{(s_1+s_2)-(s_1-s_2)\cos\omega}$$

и

$$d\theta = \frac{2\sqrt{s_1 s_2}}{(s_1+s_2)-(s_1-s_2)\cos\omega}\,d\omega. \tag{14}$$

Даље, због

$$n = \frac{e^2}{H^2+b^2} = \frac{a^2\varepsilon^2}{s_2^2} = \frac{r^2}{s_1 s_2}\,\varepsilon^2$$

Из последњег израза за Λ види се још да је елемент отвора

$$d\Omega = \frac{r}{\rho^2} \sqrt{s^2 \sin^2\alpha + (r - s\cos\alpha\cos\omega)^2}\, d\omega .$$

Такође се увиђа да последњи интеграл узет у границама 0 и π има двоструку вредност од Λ/r.

9. *КОМПЛАНАЦИЈА КОСЕ КРУЖНЕ КУПЕ*

9.1. Израз за површину омотача косе кружне купе није елементарна трансцендента, те је стога проблем компланације у томе да се интеграли сведу на каноничне форме, како би се могле користити евентуално постојеће таблице за такве форме. Овај проблем изискује компликоване редукције и њега је Schellbach ([22], стр. 324 – 336) решио помоћу Jacobi-јевих „Тета“ функција. Овде ћемо изабрати други пут — директну редукцију на елиптичке интеграле. Он није дужи, а из једначина које се појављују приликом редукције могу се извући неки интересантни закључци.

Кад се елемент омотача пише у облику

$$dM = \frac{1}{2}\rho^2\, d\Omega ,$$

из једначине за $d\Omega$ види се да је

$$dM = \frac{1}{2} r \sqrt{s^2 \sin^2\alpha + (r - s\cos\alpha\cos\omega)^2}\, d\omega ,$$

па је део омотача

$$M_1(\omega) = \frac{r}{2}\int_0^{\omega} \sqrt{s^2 \sin^2\alpha + (r - s\cos\alpha\cos\omega)^2}\, d\omega . \tag{23}$$

Према томе, целокупни омотач, услед симетрије купе, износи

$$M = r\int_0^{\pi} \sqrt{s^2 \sin^2\alpha + (r - s\cos\alpha\cos\omega)^2}\, d\omega . \tag{24}$$

Ако се, краткоће ради, стави

$$A = \frac{s_1 + s_2}{s_1 + s_2} = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{k'}{k}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} > 1, \tag{25}$$

Услед тога је

$$1-k^2\sin\theta=$$

$$=\frac{(s_1+s_2)^2-2(s_1^2-s_2^2)\cos\omega+(s_1-s_2)^2\cos\omega-\frac{(s_1-s_2)^2}{4r^2}[(s_1+s_2)^2-4r^2]\sin^2\omega}{[(s_1+s_2)-(s_1-s_2)\cos\omega]^2}=$$

$$=\frac{2(s_1^2+s_2^2)-2(s_1^2-s_2^2)\cos^2\omega-\frac{(s_1^2-s_2^2)^2}{4r^2}\sin^2\omega}{[(s_1+s_2)-(s_1-s_2)\cos\omega]^2}$$

тј., према (17),

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{s^2\sin^2\alpha+(r-s\cos\alpha\cos\omega)^2}}{s_1+s_2-(s_1-s_2)\cos\omega}. \tag{22}$$

Како још израз на десној страни једначине (1) има вредност

$$\frac{a}{s_2}=\frac{r}{\sqrt{s_1 s_2}},$$

а границе интеграла (2), према (13), имају вредности 0 и $\arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2}=$ $=\omega$ то, услед једначина (14), (19) и (22), излази вредност за Λ:

$$\Lambda=r\int_0^\omega\frac{d\omega}{\rho^2}\sqrt{s^2\sin^2\alpha+(r-s\cos\alpha\cos\omega)^2}.$$

8.3. Из чињенице да је Λ четвртина отвора мреже, из последње једначине излази да изводница која одговара вредности

$$\omega=\arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2}$$

гради са изводницом s_2 угао ω. Величина ρ те изводнице добива се, на основи (18), из

$$\rho^2=s_1 s_2.$$

Одавде, како је фигура мреже симетрична у односу на изводницу s_2 (или s_1), следи ова интересантна чињеница:

Изводнице карактеристичног троугла и геометриска средина тих изводница деле отвор мреже на четири једнака дела.

скупи поново са првим интегралом, добива се следећи израз за M:

$$M = \frac{4\,(s_1\,s_2)^{\frac{3}{2}}\,\sin\,\delta/2}{s_1 - s_2} \int\limits_A^\infty \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} \sqrt{\frac{t^2+\operatorname{ctg}^2\,\delta/2}{t^2-A^2}}\,dt.$$

Као што се види, овај интеграл се третира исто као и онај за $M_1\,(\omega)$, само без другог члана. Заустављајући се, дакле, на првом члану J израза за M_1, смена

$$t = \frac{A}{\cos\,\varphi}$$

даће

$$J = \frac{r}{2}\sqrt{s_1\,s_2} \int\limits_0^\varphi \frac{2n+1-n\sin^2\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi\,,$$

$$\cos\varphi = \frac{A\cos\omega - 1}{A - \cos\omega}\,;$$

при томе k и n имају вредности из једначине (10), односно (20) и (15).

Израз за M имаће четвороструку вредност од J, а горња граница тога интеграла биће $\pi/2$.

Кад се разломак у изразу за J прошири са $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ и бројилац подели имениоцем, резултат се може приказати у облику

$$\frac{k^2}{n} - \frac{(2n+3)\,k^2+n}{n\,(1+n\sin^2\varphi)} + \frac{2\,(n+1)\,(n+k^2)}{n\,(1+n\sin^2\varphi)^2}\,.$$

Ако, за час, обележимо

$$\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^\varkappa\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = Z_\varkappa\,,$$

израз за J постаје

$$J = \frac{r}{2}\sqrt{s_1\,s_2}\left\{\frac{k^2}{n}F\,(k,\varphi) - \frac{(2n+3)\,k^2+n}{n}Z_1 + \frac{2(n+1)\,(n+k^2)}{n}Z_2\right\}.$$

смена

$$\cos\omega = \frac{1}{A}\,\frac{A^2+t}{1+t}$$

даће

$$M_1(\omega) = \frac{(s_1 s_2)^{\frac{3}{2}}\sin\delta/2}{s_1-s_2}\int\limits_A^m \frac{dt}{(1+t)^2}\sqrt{\frac{t^2+\operatorname{ctg}^2\delta/2}{t^2-A^2}},$$

где је

$$m = \frac{A(A-\cos\omega)}{A\cos\omega-1},$$

при чему су искоришћене релације (17) и (21) између страна и углова у карактеристичном троуглу и значење величине A. Наведена смена је дозвољена само до вредности $\omega = \arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2}$, тј. до изводнице $\rho = \sqrt{s_1 s_2}$, јер је у том случају t монотоно узлазна функција од ω. Но за ову вредност ω функција t има дисконтинуитет. Стога је довољно задржати се, најпре, на случају компланације до четвртине отвора мреже, а затим извести компланацију целокупног омотача. Компланација делова који иду преко четвртине отвора лако ће се добити из претходна два резултата.

Последња једначина може се писати у облику

$$M_1(\omega) = \frac{(s_1 s_2)^{\frac{3}{2}}\sin\delta/2}{s_1-s_2}\left\{\int\limits_A^m \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}\sqrt{\frac{t^2+\operatorname{ctg}^2\delta/2}{t^2-A^2}}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_A^m \frac{2\,t\,dt}{(1-t^2)^2}\sqrt{\frac{t^2+\operatorname{ctg}^2\delta/2}{t^2-A^2}}\,dt\right\}.$$

Ако се тражи цео омотач, примениће се иста смена, само се интеграл за M мора претходно раставити на два интеграла и то у границама $\left(0,\ \arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2}\right)$ и $\left(\arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2},\ \pi\right)$. Нове интегралне границе биће у првом интегралу A и $+\infty$, у другом $-\infty$ и $-A$, док ће изрази под интегралима имати облик

$$\frac{2(s_1 s_2)^{\frac{3}{2}}\sin\delta/2}{r(1+t)^2(s_1-s_2)}\sqrt{\frac{t^2+\operatorname{ctg}^2\delta/2}{t^2-A^2}}.$$

Ако се други интеграл сведе на границе A и ∞ $(t=-t)$ и

сменом $t^2=x$. Наиме, због

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{x+\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}}{x-A^2}}=\frac{1}{A^2-1}\left\{\frac{\sqrt{(x-A^2)\left(x+\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)}}{x-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{A^2\sin^2\frac{\delta}{2}+\cos^2\frac{\delta}{2}}{2\sqrt{A^2-1}\sin\frac{\delta}{2}}\arccos\frac{A^2+(A^2-1)\cos^2\frac{\delta}{2}+x\left[(A^2-1)\sin^2\frac{\delta}{2}-1\right]}{(x-1)\left(A\sin^2\frac{\delta}{2}+\cos^2\frac{\delta}{2}\right)}\right\},$$

имамо

$$\int_A^m \frac{2\,t\,dt}{(1-t^2)^2}\sqrt{\frac{t^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}}{t^2-A^2}}=\frac{1}{A^2-1}\left\{\frac{\sqrt{(m^2-A^2)\left(m^2+\operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}\right)}}{m^2-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{A^2\sin^2\frac{\delta}{2}+\cos^2\frac{\delta}{2}}{2\sqrt{A^2-1}\sin\frac{\delta}{2}}\arccos\frac{A^2+(A^2-1)\cos^2\frac{\delta}{2}+m^2\left[(A^2-1)\sin^2\frac{\delta}{2}-1\right]}{(m^2-1)\left(A^2\sin^2\frac{\delta}{2}+\cos^2\frac{\delta}{2}\right)}\right\}.$$

Ако се и овде величина m изрази помоћу φ, тј. из $\cos\varphi=A/m$, а води рачуна о релацијама (25), (15), (20) и (21), десна страна последњег интеграла може се писати у облику

$$\frac{n\,r}{\sqrt{s_1s_2}\sin\delta/2}\left\{\frac{s_1+s_2}{2\sqrt{s_1\,s_2}}\sin\varphi\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{r}{s_1-s_2}\arccos\left[\frac{k^2}{\cos^2\delta/2}\left(\frac{2\cos^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi}-\frac{n-\sin^2\delta/2}{n}\right)\right]\right\}.$$

На тај начин добивамо

$$M_1=\frac{r}{2}\sqrt{s_1s_2}\left\{(n+1)\,\Pi(n,k,\varphi)+E(k,\varphi)-F(k,\varphi)\right\}-$$

$$-\frac{r(s_1-s_2)}{8\sqrt{s_1\,s_2}}\left\{[(s_1+s_2)-(s_1-s_2)\cos\varphi]\,\frac{\sin\varphi\,\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\,r\sqrt{s_1\,s_2}}{s_1-s_2}\arccos\left[\frac{k^2}{\cos^2\delta/2}\left(\frac{2\cos^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi}-\frac{n-\sin^2\delta/2}{n}\right)\right]\right\},$$

$$\cos\varphi=\frac{A\cos\omega-1}{A-\cos\omega}.$$

Међутим, из познате формуле за редукцију [24, стр. 92—94]

$$\gamma_0 Z_\varkappa + \gamma_1 Z_{\varkappa-1} + \gamma_2 Z_{\varkappa-2} + \gamma_3 Z_{\varkappa-3} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{(1+n\sin^2\varphi)^{\varkappa-1}},$$

за $\varkappa=2$ следи

$$Z_2 = \frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi} - \gamma_1 Z_1 - \gamma_2 Z_0 - \gamma_3 Z_{-1}\right).$$

Овде је ($\varkappa=2$)

$$\gamma_0 = \frac{2(n+1)(n+k^2)}{n^2}, \qquad \gamma_1 = -\left(1+2\frac{1+k^2}{n}+\frac{3k^2}{n^2}\right),$$

$$\gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = \frac{k^2}{n^2},$$

$$Z_{-1} = \int_0^\varphi \frac{1+n\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi\left(\frac{n+k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - n\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{n+k^2}{k^2}F(k,\varphi) - \frac{n}{k^2}E(k,\varphi).$$

Даље је $Z_0=F(k,\varphi)$, а Z_1 је нормални елиптички интеграл III врсте $\Pi(n,k,\varphi)$ Legendre-ова типа. Зато је

$$Z_2 = \frac{n^2}{2(n+1)(n+k^2)}\left\{\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2+2n(1+k^2)+3k^2}{n^2}\Pi(n,k,\varphi) - \frac{n+k^2}{n^2}F(k,\varphi) + \frac{E(k,\varphi)}{n}\right\}.$$

На основи тога

$$J = \frac{r}{2}\sqrt{s_1 s_2}\left\{(n+1)\Pi(n,k,\varphi) + E(k,\varphi) - F(k,\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{n\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\right\}. \tag{26}$$

Одавде се одмах добива вредност за цео омотач $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$,

$$M = 2r\sqrt{s_1 s_3}\left((n+1)\Pi_0 + E - F\right). \tag{27}$$

9.2. За део омотача M_1 потребно је још израчунати други интеграл који се у њему налази. Он се израчунава елементарно

Приметимо да је функција Λ која се јавља у изразу за отвор омотача Ω (в. § 8.1), трансформиран израз $\Lambda(k, \psi)$ једначине (28). То се лако увиђа на основи трансформационих једначина (21) и (22) I дела. Ако се, наиме, уочи вредност ψ из последње једначине и вредности за k и $\delta/2$ из једначина (20) н (21), тада једначина (22) I дела постаје

$$\sin\varphi = \frac{2r}{s_1+s_2},$$

тако да је

$$\frac{1}{4}\Omega = \Lambda(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{s_1 s_2}}{r} F \sin^2\frac{\delta}{2} - \Lambda(k, \psi). \qquad (29)$$

10. *ЈЕДАН ОПШТИ ОБРАЗАЦ*

10.1. Нека су S_1 и S_2 највећа и најмања изводница косе кружне купе, R полупречник њене основе, а β, γ и δ одговарајући наспрамни углови тих трију страна карактеристичног пресека. Нека је μ површина омотача такве купе. Образац (28) може послужити за добивање обрасца за површину омотача зарубљене косе кружне купе. Такав образац лако излази из једначине (28) ако се од омотача μ одузме омотач M_2 допунске купе.

Тога ради означимо са σ_1 и σ_2 највећу и најмању изводницу допунске купе, а са r полупречник њене основе. Како су одговарајући углови карактеристичних троуглова и код целе купе и код њене допуне једнаки, биће

$$\frac{S_1-S_2}{S_1+S_2} = \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2},$$

па величина ψ остаје иста у изразу μ и у изразу M_2. Исто је то случај и са величином $k = \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$. Услед тога, величине E и Λ остају непромењене, тако да за омотач M зарубљене купе добивамо

$$M = (R^2 - r^2)\pi + 2(R\sqrt{S_1 S_2} - r\sqrt{\sigma_1\sigma_2})E - 2(R^2 - r^2)\Lambda(k, \psi).$$

Ако се још, са s_1 и s_2 означе највећа и најмања изводница зарубљене купе, услед пропорционалности је

$$S_i = \sigma_i\frac{R}{r} = s_i\frac{R}{R-r} \qquad (i=1,2),$$

тако да је

$$\frac{S_1-S_2}{S_1+S_2} = \frac{s_1-s_2}{s_1+s_2}$$

Из овог обрасца се може извући следећи интересантан закључак. За

$$\omega = \arccos \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2},$$

тј. за четвртину отвора мреже, због $\varphi = \pi/2$, површина омотача која одговара тој четвртини отвора биће

$$M_1 = \frac{r}{2} \sqrt{s_1 s_2} \left\{ (n+1) \Pi_0 + E - F \right\} - D,$$

где је

$$D = \frac{s_1 - s_2}{4} \sqrt{s_1 s_2} \sin \frac{\delta}{2} + \frac{r^2}{4} \arccos \left[1 - \frac{(s_1 - s_2)^2}{2r^2} \right].$$

Први члан десне стране израза за M_1 је на основи обрасца (27), четвртина површине целог омотача. Из тога излази :

Четвртина површине омотача (рачунато од мање изводнице) увек је већа од површине која одговара четвртини отвора мреже, а разлика између четвртине површине омотача и површине која одговара четвртини отвора мреже, увек се може изразити елементарним функцијама.

Код усправне купе ($s_1 = s_2$) та разлика, разумљиво, постаје једнака нули.

9.3. Израз за површину целокупног омотача добива много простију форму ако се искористи једначина (23) I дела. Тада је

$$M = 2r \sqrt{s_1 s_2} \left\{ \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \Lambda(k, \psi) \right] + E \right\}.$$

Водећи рачуна да је при томе $\operatorname{ctg} \psi = \sqrt{n}$, тј.

$$\cos \psi = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2},$$

и

$$\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} = \frac{r}{\sqrt{s_1 s_2}},$$

израз за M добива сажету форму

$$\left.\begin{aligned} M &= r^2 \pi + 2r \sqrt{s_1 s_2}\, E - 2r^2 \Lambda(k, \psi), \\ k &= \sin \frac{\beta - \gamma}{2}, \qquad \cos \psi = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Примера ради, нека је $s_1 = 24$, $s_2 = 16$, $r = 6{,}5$. Рачун показује да је $M = 370{,}67$.

даље, због $s_1 = s_2$ и $E = \frac{\pi}{2}$, за M излази

$$M = r\,\pi\,s.$$

Ово, дакле, важи за усправну купу. Ако је још $\beta = \gamma = 0$, тј. $\delta = \pi$, купа дегенерише у равну фигуру, па је $\Omega = 2\pi$; тада, због $s_1 + s_2 = 2r$,

$$\arccos\frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} = \arcsin\frac{2\sqrt{s_1 s_2}}{s_1 + s_2} = \arcsin\frac{\sqrt{s_1 s_2}}{r}$$

и

$$\Lambda(0, \varphi) = \frac{\pi}{2}\sin\varphi = \frac{\pi\sqrt{s_1 s_2}}{2r},$$

добивамо

$$M = r^2\pi.$$

У случају $k = 1$, тј. $\beta = \pi$ и $\gamma = \delta = 0$, купа такође дегенерише у равну фигуру код које је $s_1 - s_2 = 2r$, па отвор омотача као и његова површина могу имати произвољне вредности.

11.2. Међутим, и онда кад је $k \neq 0$ и $k \neq 1$, могу у извесним случајевима, обрасци за површину и отвор омотача имати једноставније облике, наиме такве да се уместо комбинација потпуних и непотпуних елиптичких интеграла, који фигуришу у поменутим изразима, појављују само потпуни интеграли. Такве специјалне купе добиће се ако се примене резултати из § 6.

Ако се употреби једначина (51) I дела, при чему ψ има вредност из (50), биће, због значења величине ψ из једначине (28) и једначине (20),

$$\frac{(s_1 - s_2)^2}{4\,s_1\,s_2} = k = \frac{s_1 - s_2}{2r}\cos\frac{\delta}{2}.$$

Због вредности $\cos\delta/2$ из једначине (21), имамо

$$\sqrt{\frac{(s_1 + s_2) - 4r^2}{4\,s_1\,s_2}} = \frac{r(s_1 - s_2)}{2\,s_1\,s_2},$$

одакле је

$$r = \sqrt{s_1 s_2}. \tag{32}$$

Како је за ову вредност r

$$\cos\frac{\delta}{2} = \frac{s_1 - s_2}{2\sqrt{s_1 s_2}},$$

биће

$$k = \cos^2\delta/2$$

и

$$R\sqrt{S_1 S_2} - r\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} = (R+r)\sqrt{s_1 s_2}.$$

На тај начин, образац за површину омотача зарубљене косе кружне купе гласиће

$$\left.\begin{aligned} M &= (R^2 - r^2)\pi + 2(R+r)\sqrt{s_1 s_2}\,E - 2(R^2 - r^2)\Lambda(k, \psi), \\ k &= \sin\frac{\beta - \gamma}{2}, \quad \cos\psi = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

Из овог обрасца, за $r=0$, непосредно следи образац (28).

За $s_1 = s_2 = s$, тј. код усправне зарубљене купе, имамо $\beta = \gamma$, тј,

$$k = 0, \qquad E = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{2}, \qquad \Lambda\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

па је

$$M = (R+r)\, s\, \pi.$$

10.2. За $R=r$ добива се случај косог кружног ваљка, па у обрасцу (30) отпадају први и трећи члан десне стране. Како је још $s_1 = s_2 = s$, то образац (30) добива облик

$$M = 4\, r\, s\, E,$$

при чему величина k, због $\beta = \pi - \gamma$, има вредност $k = \cos\gamma$.

Величина $O = 4aE$, као што је познато, претставља обим елипсе са великом осовином $2a$ и нумеричким ексцентрицитетом који је једнак модулу елиптичког интеграла. Како је пресек косог ваљка са равни нормалном на изводнице ваљка елипса са осовинама $2a = 2r$ и $2b = 2r\sin\gamma$, то је нумерички ексцентрицитет те елипсе

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \cos\gamma.$$

Услед тога, образац (31), написан у облику $M = s\,O$, изражава да је површина омотача косог кружног ваљка једнака производу из изводнице и обима нормалног пресека. Ово потврђује познату теорему о површини омотача косог кружног ваљка.

11. *О НЕКИМ СПЕЦИЈАЛНИМ КОСИМ КРУЖНИМ КУПАМА*

11.1. Као што смо видели, обрасци за површину и за отвор омотача косе кружне купе не претстављају елементарне функције. То ће бити само у специјалним случајевима $k=0$ и $k=1$. У првом случају је, наиме, $\beta = \gamma$, па је

$$\Omega = 4\,\Lambda\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = 2\,\pi\sin\frac{\delta}{2};$$

За егзистенцију овакве купе, величина s_1 мора лежати у размаку

$$s_2 < s_1 < (7+4\sqrt{3})\, s_2\,,$$

што се лако увиђа.

11.3. Као што се величина $\Lambda(k,\psi)$ у једначини (36) изразила само потпуним интегралом I врсте, тако да се и трансформисана величина $\Lambda(k,\varphi)$, која би следила на основи једначине (21) I дела, може изразити таквим интегралом. На основи те једначине биће, наиме,

$$\Lambda(k,\varphi) = \frac{\pi}{2} + Fk'^2 \sin\varphi \sin\psi - \Lambda(k,\psi),$$

а због $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}$ (в. (22) I дела), тј.

$$\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} = \frac{2r}{s_1-s_2}\,. \tag{37}$$

Због вредности $\Lambda(k,\psi)$ из (36), имамо тако

$$\Lambda(k,\varphi) = \frac{\pi}{3} + \frac{F}{4r\sqrt{s_1 s_2}}[4r^2-(s_1-s_2)^2] +$$
$$+ \frac{F}{12r\sqrt{s_1 s_2}}[s_1^2+s_2^2-6s_1s_2-2\sqrt{s_1s_2}\,(s_1+s_2)].$$

После уношења вредности r^2 из (35), следи

$$\Lambda(k,\varphi) = \frac{\pi}{3} - \frac{Fr}{6s_1s_2}(s_1+s_2-4\sqrt{s_1s_2})\,, \tag{38}$$

где величина r има вредност из (35).

Можемо, сада, замислити нову купу са аналогним елементима S_1, S_2, $2R$ и употребити једначину (28) за израчунавање површине омотача и једначину (29) за отвор омотача. Но потребно је још изразити величине s_1, s_2 и $2r$ помоћу нових елемената. То се постиже на основи једначине

$$\cos\varphi = \frac{S_1-S_2}{S_1+S_2}\,.$$

Како је, према (37) и (35),

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(s_1+s_2)^2-4r^2}}{s_1+s_2} = 1 - \frac{2\sqrt{s_1s_2}}{s_1+s_2}\,,$$

то следи

$$\frac{\sqrt{s_1s_2}}{s_1+s_2} = \frac{S_2}{S_1+S_2}\,. \tag{39}$$

Помоћу ове вредности може се формирати израз у загради једначине (38):

$$s_1+s_2-4\sqrt{s_1s_2} = \left(\frac{s_1+s_2}{\sqrt{s_1s_2}} - 4\right)\sqrt{s_1s_2} = \frac{S_1-3S_2}{S_2}\sqrt{s_1s_2}\,.$$

па једначина (51) I дела постаје

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{4} + \frac{F}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2}. \tag{33}$$

Тако се добива

$$M = s_1 s_2 \left(\frac{\pi}{2} + 2E - F \sin^2 \frac{\delta}{2} \right). \tag{34}$$

Израз (29) за отвор омотача постаје, на основи (32) и (33),

$$\Omega = \pi + 2F \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

За егзистенцију овакве купе мора се претпоставити могућност њеног карактеристичног троугла; лако се види да мора бити

$$s_2 < s_1 < s_2 (3 + 2\sqrt{2}).$$

Може се, надаље, употребити једначина (64) I дела, при чему ψ мора задовољавати једначину (58) I дела. Ако се узме у обзир да је, према једначини (28),

$$\sin \psi = \frac{2\sqrt{s_1 s_2}}{s + s_2},$$

а према једначинама (20) и (21)

$$k' = \frac{s_1 + s_2}{2r} \sin \frac{\delta}{2},$$

$$4 s_1 s_2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = 4r^2 - (s_1 - s_2)^2,$$

то, кад се ове вредности унесу у једначину (58) I дела, ова се своди на

$$r^2 = (s_1 + s_2)\sqrt{s_1 s_2} - s_1 s_2. \tag{35}$$

Уз тај услов једначина (64) I дела постаје

$$\Lambda(k, \psi) = \frac{\pi}{6} - \frac{F}{\sqrt{s_1 s_2}} \frac{s_1^2 - 6 s_1 s_2 + s_2^2 - 2\sqrt{s_1 s_2}(s_1 + s_2)}{12 r}, \tag{36}$$

тако да израз за површину омотача, према једначини (28), постаје

$$M = \frac{2r^2\pi}{3} + 2r\sqrt{s_1 s_2}\, E + \frac{rF}{6\sqrt{s_1 s_2}} [s_1^2 - 6 s_1 s_2 + s_2^2 - 2(s_1 + s_2)\sqrt{s_1 s_2}],$$

где r има вредност из (35).

Израз (29) за отвор омотача, после краћег рачуна, постаје у овом случају

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} + \frac{2r}{3 s_1 s_2} [4\sqrt{s_1 s_2} - (s_1 + s_2)] F.$$

И овде, разуме се, величина r^2 има вредност (35).

Аналогно изразу за ψ у једначини (28) овде ће се узети

$$\cos\varphi = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}.$$

За вредност k', аналогно једначини (20), добива се

$$k' = \frac{S_1 + S_2}{2R} \sin\frac{\delta_1}{2}, \tag{42}$$

а вредност $\sin \delta_1/2$ дата је једначином (40).

Услед свега тога, из једначине (41) добиће се

$$R^2 - R(S_1 + S_2) + S_1 S_2 = 0,$$

тј.

$$2R = (S_1 + S_2) \pm (S_1 - S_2),$$

За горњи знак било би $2R > S_1 + S_2$, што је немогуће. Треба, дакле, узети доњи знак:

$$R = S_2. \tag{43}$$

На основи тога услова, израз M за површину омотача постаће

$$M = \frac{1}{3} S_2^2 \pi + \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{3} [6 S_2 E + (S_1 - 3 S_2) F], \tag{44}$$

док ће израз за отвор омотача бити

$$\Omega = \frac{2\pi}{3} + \frac{9 S_2^2 - S_1^2}{3 S_2 \sqrt{S_1 S_2}} F. \tag{45}$$

Потребно је још напоменути да величина k остаје инваријантна, јер је, према (42) и (43),

$$k' = \frac{S_1 + S_2}{4 S_2 \sqrt{S_1 S_2}} \sqrt{3 S_2^2 + 2 S_1 S_2 - S_1^2},$$

а та се иста вредност добива из једначине

$$k'^2 = \frac{(s_1 + s_2)^2}{4 r^2} \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{s_1 + s_2}{\sqrt{s_1 s_1}}\right)^2 \left[1 - \frac{(s_1 - s_2)^2}{4 r^2}\right]$$

ако се у ову стави r^2 из (35). Дакле,

$$k'^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{s_1 + s_2}{\sqrt{s_1 s_2}}\right)^2 \frac{4 - \dfrac{s_1 + s_2}{\sqrt{s_1 s_2}}}{1 - \dfrac{\sqrt{s_1 s_2}}{s_1 + s_2}},$$

а по томе треба применити једначину (39).

Према томе,

$$\Lambda(k,\varphi) = \frac{\pi}{3} - \frac{Fr}{6\sqrt{s_1 s_2}} \frac{S_1 - 3S_2}{S_2}.$$

Како је још

$$\frac{r^2}{s_1 s_2} = \frac{s_1 + s_2}{\sqrt{s_1 s_2}} - 1 = \frac{S_1}{S_2},$$

то је

$$\Lambda(k,\varphi) = \frac{\pi}{3} - \frac{S_1 - 3S_2}{6S_2}\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}\,F.$$

На основи тога, израз (28) за површину омотача постаје

$$M = R^2\pi + 2R\sqrt{S_1 S_2}\,E - 2R^2\Lambda(k,\varphi) =$$

$$= \frac{R^2\pi}{3} + 2R\sqrt{S_1 S_2}\,E + \frac{R^2 F(S_1 - S_2)}{3S_2}\sqrt{\frac{S_1}{S_2}},$$

а израз за отвор омотача

$$\Omega = 2\pi + \frac{4\sqrt{S_1 S_2}}{R} F \sin^2\frac{\delta_1}{2} - 4\Lambda(k,\varphi) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2F\sqrt{S_1 S_2}\left(\frac{2\sin^2\delta_1/2}{R} + \frac{S_1 - 3S_2}{3S_2^2}\right).$$

При томе је, према (21),

$$\sin^2\frac{\delta_1}{2} = \frac{4R^2 - (S_1 - S_2)^2}{4S_1 S_2}, \tag{40}$$

тако да је

$$\Omega = \frac{2\pi}{3} + \frac{F}{3R\sqrt{S_1 S_2^3}}\left[12R^2 S_2 - 3(S_1 - S_2)^2 S_2 + 2(S_1 - 3S_2)S_1 R\right].$$

Међутим, и овде величина R није произвољна, већ зависи од величина S_1 и S_2. Разлог је следећи. Величина ψ у пређашњем случају морала је задовољавати једначину (58) I дела, из које је резултовала једначина (35). Како су величине φ и ψ везане једначином (28) I дела, то ако место величине ψ унесемо у (35) величину φ, добиће се

$$\frac{k'^2\cos^4\varphi}{(1 - k'^2\sin^2\varphi)^2} - 1 + \frac{2\cos\varphi\,(1 - k'^2)}{\sqrt{(1 - k'^2\sin^2\varphi)^3}} = 0.$$

Ако $\cos^4\varphi$ изразимо помоћу синуса, из ове једначине следи

$$2\cos\varphi\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi} = 1 - k'^2\sin^4\varphi. \tag{41}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Byrd, F. P. and Friedmann, D. — Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

[2] Catalan, E. — Verallgemeinerung der Legendre-schen Gleichung. *Mém. cour. de l'Ac. de Belg. Bruxelles* **XIV** (1854)

[3] Dean, W. R. — Note on the evaluation of an elliptic integral of the third kind. *Journal London Math. Soc.* **XIX** (1943), 130—132.

[4] Ellioth, E. B. — A formula including Legendres $EK' + KE' - KK' = \pi/2$. *Messenger of Mathematics* **33** (1904), 31—40.

[5] Enneper, A. — a) Verallgemeinerung der Legendre-schen Gleichung. *Schlömilch Z.* **VI** (1861), 300 i **XI** (1866), 69.

b) Theorie der elliptischen Funktionen. Halle a. S. 1890.

[6] Фемпл, С. — a) Отвор омотача косе кружне купе. *Гласник математичко-физички и астрономски* **4** (1949), 127—134.

b) Приближна формула за омотач косе кружне купе. *Зборник радова Математичког института САН* **1** (1951), 135—142.

c) О једном уопштењу Legendre-ове релације. *Зборник радова Математичког института САН* **4** (1955), 41—56.

[7] Glaisher, J. W. L. — Proof of the formula $KE'+K'E-KK'=\pi/2$. *Messenger of M.* (2) **IV** (1874), 95—96.

[8] Haedenkamp, L. — Über Transformationen vielfacher Integrale. *Crelle J.* **XXII** (1837), 184—192.

[9] Heuman, C. — Tables of complete Elliptic Integrals. *Journal of Mathematics and Physics* **20** (1941), 127—206.

[10] Isenkrahe, C. — a) Über die Inversion der vollständigen Integrale erster Gattung für ihre reelen Modulen. *Schlömilch Z.* **XXXI** (1886), 34—43.

b) Über die Inversion der von Legendre definierten vollständigen elliptischen Integrale zweiter Gattung für ihre rellen Moduln. *Ibid.* **XXXI** (1886), 178—191.

[11] Jacobi, K. G. — Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg (1829).

[12] Jahnke-Emde — Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1909.

[13] Jensen, J. L. W. V. — Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les moyennes. *Acta math.* **30** (1905), 175—193.

[14] Krause, M. — Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig u Berlin 1912.

[15] Kronecker, L. — Die Legendre-sche Relation. *Berliner Ber.* (1891), 323—332, 343—358, 447—465, 905—908.

[16] Laska, W. — Sammlung von Formeln der reinen u. angewandten Mathematik. Braunschweig 1894.

[17] Legendre, A. M. — Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes. Paris 1825.

[18] Magnus, W. — *Zentralblatt für Mathematik* **55** (1955), 119.

[19] Moigno, P. — Leçons de Calcul differ. et integr. II. Paris 1844.

[20] Петровић, М. — Рачунање са бројним размацима. Београд 1932.

[21] Rieman, B. — Theorie der Abelschen Funktionen. *Crelle J.* **LIV** (1856), 115.

[22] Schellbach, K. H. — Die Lehre von den elliptichen Integralen und den Theta-Functionen. Berlin 1864.

[23] Schlömilch, O. — Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis. Braunschweig 1879.

[24] Serret-Scheffers — Lehrbuch d. Differential- u. Integralrechung. Leipzig u. Berlin 1921.

[25] Weierstrass, K. — Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Pr. Braunsberg (1849) i *Crelle J.* **LVII** (1857), 302.

[26] Czuber, E. — Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. II. Leipzig—Berlin 1919.

За овакву специјалну купу је њена егзистенција условљена размаком

$$s_2 < s_1 < 3\, s_2,$$

као што се то лако увиђа.

Из ових примера види се начин добивања и других специјалних купа применом резултата из § 6.

12. *ПРИБЛИЖНА ФОРМУЛА ЗА ОМОТАЧ КОСЕ КРУЖНЕ КУПЕ*

Формула за омотач косе кружне купе, иако дозвољава употребу таблица за елиптичке интеграле [напр. 12] није довољно подесна за практично рачунање ако се не тражи исувише велика тачност. У једном свом ранијем раду [6 b] показао сам да се приближна вредност за површину омотача може добити по обрасцу

$$M \approx \frac{r}{2}\left(\frac{s_1+s_2}{2} + \sqrt{h^2+r^2}\right)\pi \tag{46}$$

(h је висина). У поменутом раду дао сам и границе отступања ове приближне вредности од праве вредности. Те границе отступања следе на основи става:

Нека је

$$A = \frac{(s_1-s_2)^2}{h^2+r^2}\,\frac{s_1+s_2+2\sqrt{h^2+r^2}}{s_1+s_2-2\sqrt{h^2+r^2}} \tag{47}$$

$$G = \frac{r\,\pi}{16\sqrt{h^2+r^2}}\left(\frac{s_1+s_2}{2} - \sqrt{h^2+r^2}\right)^2. \tag{48}$$

Ако је

$$A \leqslant 1,$$

релативна грешка је

$$\delta < \frac{G}{M};$$

ако је

$$A > 1,$$

релативна грешка је

$$\delta < \frac{A\,G}{M}.$$

les amplitudes données. On a alors

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \Lambda (k, \varphi_\nu) = \Lambda (k, \psi) + FA ,$$

c'est-à-dire l'agrégat au second membre peut s'exprimer par une seule fonction $\Lambda (k, \psi)$ de même module, d'amplitude ψ se déduisant des amplitudes φ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ au moyen d'opérations algébriques de sin et cos, et avec une expression FA où F est l'intégrale elliptique normale complète de première espèce de même module, et A une fonction algébrique de sin ψ.

Partant du théoreme de multiplication on a résolu le problème de réduction de l'intégrale elliptique normale complète de troisième espèce aux combinaisons d'intégrales complètes de première espèce. A l'aide de la relation de Legendre, en posant dans le théorème de multiplication $\psi_m = \pi/2$ et avec m arbitraire, on obtient deux suites de tels cas. Puis, en se servant du théorèmme d'addition relatif aux intégrales elliptiques normales complètes de troisième espèse

$$\Pi_0 (n) + \Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} + F$$

valables pour $n > 0$ et $-1 < n < -k^2$, ayant exprimé $\Pi_0 (n)$ comme on vient de l'indiquer, on trouve deux autres suites de telles valeurs pour les intégrales de la forme $\Pi_0 (k^2/n)$.

Si, dans le cas d'amplitudes ψ imaginaires, on pose

$$i\left[\Lambda\left(k, \arcsin \frac{\sqrt{\sin^2 \psi - 1}}{k' \sin \psi}\right) - F \frac{\sqrt{(\sin^2 \psi - 1)(1 - k^2 \sin^2 \psi)}}{\sin \psi}\right] = L (k, \psi)$$

on a alors

$$L (k, \psi) \equiv FE (k, \psi) - EF (k, \psi),$$

en observant que pour la fonction L est valable le théorème d'addition (32) sous la condition (31) et le théorème de multiplication (47) sous la condition (48). En posant ici $\psi_m = \pi/2$ et en prenant m arbitraire, on obtient une cinquième suite de valeurs d'integrales elliptiques normales complètes de troisième espèce s'exprimant à l'aide des intégrales complètes de première cspèce.

De ces résultats on arrive à cette conclusion générale que la réduction des intégrales elliptiques normales complètes aux intégrales elliptiques normales complètes de première espèce est possible toutes les fois que le modul et le paramètre de ces intégrales sont liés par certaines équations algébriques. Jusqu'à présent on connaissait trois cas de telles réductions: $n = k$, $n = -k$ et $n = -1 + k'$. Ici on y parvient par une méthode générale pour ces réductions, qui est exposée dans ce travail (les cas connus s'obtiennent en posant $m = 1$).

La seconde partie de se travail est consacrée aux applications géométriques. On montre d'abord que la fonction $\Lambda (k, \psi)$ a une signification géométrique concrète: L'expression $4 \Lambda (k, \psi)$ représente

SUR UNE COMBINAISON LINÉAIRE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES NORMALES DE PREMIÈRE ET SECONDE ESPÈCES

Par

STANIMIR FEMPL

L'objet de ce travail est l'étude d'une combinaison linéaire des intégrales elliptiques normales de première et seconde espèces,

$$\Lambda(k, \psi) \equiv FE(k', \psi) + EF(k', \psi) - FF(k', \psi),$$

où F et E désignent les intégrales elliptiques normales complètes de première et seconde espèces de module k, et $F(k', \psi)$ et $E(k', \psi)$ les intégrales elliptiques normales de première et seconde espèces de module complémentaire $k' = \sqrt{1-k^2}$ et d'amplitude ψ.

Dans la première partie de ce travail on montre que la fonction Λ conduit aux intégrales elliptiques normales complètes de troisième espèce à paramètres positifs ou ceux se trouvant entre -1 et $-k^2$. Si une telle fonction est definie aussi pour les amplitudes imaginaires, on montre que, dans ce cas, elle conduit aussi aux integrales complètes de troisième espèce dont le paramètre est compris entre $-k^2$ et 0 (le cas du paramètre $n < -1$ n'entre pas en considération, puisque les integrales complètes divergent dans ce cas).

En vertu du théorème d'addition (18) relatif à la fonction Λ sous la condition (17), résultant directement du théorème d'addition relatif à la fonction Λ_0 de Heumann [9], on démontre que l'équation de transformation (22), à la condition (21) ($\sigma = \pi/2$), renferme deux propositions connues de la théorie des intégrales elliptiques de troisième espèce, qu'on demontrait jusqu'ici idépendamment l'une de l'autre.

On sait que l'intégrale elliptique normale complète de troisième espèce s'exprime par combinaison des intégrales complètes et incomplètes des deux premières espèces. Ici on montre qu'à l'aide de l'équation de transformation précédente on y parvient par des formules plus simples et plus commodes que celles connues jusqu'ici. Cette manière de l'exprimer a facilité de mettre la fonction Λ sous la forme condensée (36), qui a permis d'assigner les limites (37) de cette fonction et d'étudier l'allure de la fonction.

Le théorème de multiplication de la fonction Λ est formulé en termes suivants: Toutes les fois que la suite des amplitudes ψ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ satisfait à la suite des conditions (38) on a

$$\Lambda(k, \psi_m) = m\Lambda(k, \psi_1) - Fk'^2 \sin\psi_1 \sum_{\nu=1}^{m-1} \sin\psi_\nu \sin\psi_{\nu+1},$$

et inversement, en rappelant que la suite des conditions (38) peut être remplacée par les conditions (40) equivalentes et plus commodes.

On donne aussi la proposition de nature plus générale suivante: Soient p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ des nombres rationnels arbitraires, et φ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$

Dans la suite on donne une formule plus générale (30) de la surface latérale du tronc de cône circulaire oblique dont la formule (28) est une conséquence immediate ($r=0$). En outre, de la formule (30) on déduit aisément la formule connue pour la surface latérale du cylindre circulaire oblique ($R=r$).

La surface latérale d'un cône circulaire oblique n'est pas une transcendente élémentaire, sauf dans le cas d'un cône droit ($k=0$) ou pour $k=1$. On peut cependant obtenir de formules plus simples pour l'aire de la surface latérale et l'ouverture de sa surface développée si on aplique les résultats de la première partie. Dans ces formules ne figureront que les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèces. On a donné trois cas de tels cônes, à savoir lorsque entre les génératrices et les rayons de la base existent les relations

$$r = \sqrt{s_1 s_2}, \qquad r = s_2, \qquad r^2 = (s_1+s_2)\sqrt{s_1 s_2} - s_1 s_2 .$$

Enfin on donne sous une forme très élémentaire, la formule approchée (46) de la surface latérale M du cône circulaire oblique, avec une évaluation élémentaire de l'écart, à savoir: Si par A et G on désigne les grandeurs figurant dans les formules (43) et (48), alors pour

$$A \leqslant 1, \text{ l'erreur relative est } \delta < \frac{G}{m},$$

alors que pour

$$A > 1 \text{ l'erreur relative est } \delta < \frac{AG}{m}.$$

le quart d'ouverture de la surface latérale d'un cône elliptique droit, avec 2ψ comme angle de la section axiale du cône passant par le grand axe de l'ellipse à l'opposé de cet axe. La grandeur k a la valeur $\varepsilon \cos \delta$, ε étant l'excentricité numérique de l'ellipse et 2δ l'angle de la section axiale passant par le petit axe à l'oppose de cet axe.

Si, dans un cône circulaire oblique, on trace la bissectrice de l'angle δ au sommet du triangle caractéristique et par le pied de la génératrice la plus petite s_2 on fait passer un plan perpendiculaire à cette bissectrice on aura un cône elliptique droit de même ouverture de la surface développée du cône. Si en outre, on désigne par β et γ les angles du triangle caractéristique situés à l'opposé des génératrices s_1 (la plus grande) et s_2, l'expression de l'ouverture de la surface developpée du cône circulaire droit prend la forme

$$4\Lambda\left(\sin\frac{\beta-\gamma}{2},\ \arcsin\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\right).$$

La grandeur Λ peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{1}{4}\,\Omega=\Lambda=r\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\rho^2}\sqrt{s^2\sin^2\alpha+(r-s\cos\alpha\cos\omega)^2}$$

avec

$$\omega=\arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2},$$

où ρ désigne une génératrice quelconque, ω l'angle entre les rayons correspondant aux génératrices ρ et s_2, s étant l'axe du cône, et α l'angle que l'axe forme avec la base.

Du fait que Λ est égal au quart de l'ouverture de la surface développée du cône il s'ensuit qu'à l'angle ω_1, égal au quart de l'ouverture de la surface développé du cône correspond la génératrice $\rho=\sqrt{s_1 s_2}$. De là on déduit ce resultat intéressant que les génératrices qui sont égales a la moyenne géométrique de ces génératrices divisent l'ouverture de la surface développé du cône en quatre parties égales.

La dernière intégrale permet d'effectuer la complanation de la partie $M_1(\omega)$ du cône circulaire oblique, à l'aide de la formule $dM_1=\frac{1}{2}\rho^2\,d\Omega$.

L'aire de la surface latérale entière est donnée par la formule (28) de la seconde partie. Second résultat interessant: La différence entre le quart de l'aire de la surface latéral et de l'aire correspondant au quart de l'ouverture de la surface développée peut être exprimée par des fonctions élémentaire.

Уопштавања оних особина геодезиске линије, које се добивају посматрањем датог Риманова простора као потпростора неког другог Риманова простора, почела су недавно.

Године 1945, C. E. Springer [19] посматра криве на површини тродимензиона Еуклидског простора које су окарактерисане тиме што оскулаторна раван садржи ону линију дате праволинске конгруенције простора која пролази кроз уочену тачку површине. Те криве Springer назива *унион кривима* површине. Он изводи и диференцијалну једначину тих кривих

$$\text{(i)} \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}(k_n p^\alpha - q\,\rho^\alpha)\,dy^\beta = 0,$$

где је: k_n нормална кривина површине, ρ^α вектор геодезиске кривине криве, p^α пројекција, на површини, вектора конгруенције, а q косинус угла између вектора нормале површине и вектора конгруенције у уоченој тачки. Тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ је дрфинисан релацијама

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}\sqrt{g}, \quad e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = 1, \quad e_{21} = -1, \quad g = g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2,$$

а индекси узимају вредности 1 и 2. Најзад, за криве за које услов (i) није задовољен, он дефинише *унион кривину*. √

Овако дефинисане, унион криве су генерализације геодезиских линија површине и своде се на ове последње кад је дата праволиниска конгруенција нормална на површини.

Значај те Springer-ове идеје види се најбоље из чињенице што је, после тога, поред Springer-а и други аутори разрађују и кроз низ радова ([18], [8], [9], [10]) испитују унион криве и унион кривине кривих на површини.

Затим K. Yano [23], 1948 г посматра унион криве хиперповршине Риманова простора, даје диференцијалне једначине тих кривих и показује да су унион криве аутопаралелне линије афина простора везаног одређеном конексијом.

Године 1950, Springer [20] такође посматра унион криве хиперповршине Риманова простора, вероватно не знајући за већ објављене резултате Yano-а. Ослањајући се на овај рад Springer-а, R. S. Mishra [13] дефинише унион криве потпростора Риманова простора, у односу на дату конгруенцију кривих околна Риманова простора, и изводи њихове диференцијалне једначине. Једна таква крива потпростора окарактерисана је тиме што, у свакој тачки, њена оскулаторна геодезиска површина, садржи вектор тангенте оне криве конгуенције која пролази кроз уочену тачку потпростора. У вези с овим, Mishra [11], даље дефинише и испитује унион кривину и вектор унион кривине произвољне криве потпростора.

С друге стране, V. G. Grove [6] уводи нове величине: *релативну кривину* и *вектор релативне кривине* криве, у односу на дату праволиниску конгруенцију тродимензиона Еуклидског простора.

Вектор релативне кривине криве на површини дат је изразом који је сличан изразу за вектор геодезиске кривине криве.