Зборник радова САН. L — Математички институт САН. књ. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique № 5, 1956

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ

О ИЗВЈЕСНИМ КЛАСАМА ПОЛИНОМА И О РАСПОРЕДУ ЊИХОВИХ НУЛА

— ТЕЗА —

Увод

I. О распону полинома

II. О једној класи полинома најмањег распона

III. О неким афино-пресликаним полиномима

IV. О полиномима чије нуле имају извјестан правилан распоред на разним конусним пресјецима и на неким другим кривим линијама.

V. О полиномима $P_{m^2}(z)$.

УВОД

0.1. Обзиром на проблематику коју обрађује, овај рад спада у област „Геометрије нула полинома комплексне промјенљиве", како је Marden [9] назвао област, која је иначе позната под именом „Аналитичка теорија полинома" (Dieudonné [6]).

Схваћено у ширем смислу тог назива, у ову област спадају сви они проблеми који су у вези са испитивањем и одређивањем положаја и распореда нула полинома комплексне промјенљиве и, евентуално, нула њихових изводних полинома. Дјелимично, ту се ради о проширењу на комплексну област оних проблема о којима се говори, на примјер, у Descartes-овом, Sturm-овом и Rolle-овом теорему за полиноме са реалним коефицијентима, а дјелимично и и о таквим проблемима који немају својих аналогона у реалном подручју.

Прве ставове у овој области дали су Gauss и Cauchy (види [9] стр. vi). Послије њих многи други су радили на проблемима који спадају у ову област. У монографији [9] наведено је преко 200 аутора са преко 400 радова који, у цјелини или дјелимично, спадају у област „Геометрије нула полинома комплексне промјенљиве".

И неки радови наших аутора [8], [10], [14], [19] спадају такође у ову област.

И поред тако великог броја радова, испитивања у овој области, због многобројности и ширине њених проблема, нису још

Затим смо доказали ставове:

СТАВ 1.1. *Распон полинома $P_n(z)$ је инваријантан у односу на транслацију и ротацију координатног система као и у односу на хомотетична пресликавања у равни комплексне промјенљиве z;*

СТАВ 1.3. *Полином $P_n(z)$, чији је распон једнак нули, има или све нуле једнаке или све нуле различите;*

специјално,

СТАВ 1.4. *Ако полином $P_n(z)$, $n=2m$ или $n=2m+1$, има распон једнак нули, а његов изводни полином $P_n'(z)$ има све нуле различите и распоређене на једној правој, тада полином стационарних вриједности*

$$S_{n-1}(E) = \prod_{\nu=1}^{n-1} (E - P_n(\zeta_\nu)), \tag{3}$$

аташиран полиному $P_n(z)$, има једну вишеструку нулу m-тог реда и једну вишеструку нулу $(n-m-1)$-ог реда,

чији инверзни став, уз претпоставку да су све нуле изводног полинома $P_n'(z)$ различите, вриједи не само за полиноме чији је распон једнак нули већ и за једну ширу класу полинома специфичних особина, као што то показује став 2.1.

(ii) У општем случају нуле полинома (3) налазе се и унутар и ван круга $K(0, r)$ чији се центар налази у коодинатном почетку и чији је радиус r одређен релацијом

$$r = \frac{1}{n}\left(r^* + \sum_{\nu=1}^{n-1} |P_n(\zeta_\nu)|\right), \quad r^* = \begin{cases} \max |P_n(\zeta_\nu)| & \text{за } n=2m, \\ r & \text{за } n=2m+1. \end{cases}$$

Ако је λ, $0 < \lambda < n-1$, број нула полинома (3) које се налазе унутар круга $K(0, r)$ и ако је збир њихових растојања од тога круга сталан, тј. ако је

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda} (r - |P_n(\zeta_\nu)|) = \text{const.} \tag{4}$$

тада вриједи

СТАВ 1.5. *Од свих полинома $P_n(z)$ датог степена n, $n=2m$ или $n=2m+1$, који задовољавају релацију (4), најмањи распон имају они полиноми чији полином стационарних вриједности $S_{n-1}(E)$ има m нула на једном а $n-m-1$ нула на другом концентричном кругу са центром у координатном почетку.*

Доказ овог, као и претходних ставова, наведен је у глави I.

ништа не говори. Наиме, елипса уписана у троугао (z_1, z_2, z_3) у сл. 1. је Steiner-ова елипса (видјети на примјер [4]), и хомотетична је са коаксиалном елипсом описаном око тога троугла [16 b]. Посматрана у цјелини, сл. 1 је афина слика неког равностраног троугла, круга уписаног у тај троугао и круга описаног око њега. Полигон нула полинома $f(z)$ је, дакле, афина слика полигона нула неког биномног полинома трећег степена

$$P_3(Z) = Z^3 + q. \tag{0,1}$$

У вези с овим дефинишемо појам афине (пројективне) слике полинома и кажемо:

Полином $Q(z)$ је афина (пројективна) слика полинома $P(z)$, ако је полигон нула полинома $Q(z)$ афина (пројективна) слика полигона нула полинома $P(z)$.

Можемо, дакле, рећи: полином $f(z)$ је афина слика биномног полинома (0,1).

Чим се уочи ова чињеница, само по себи се намеће питање афине (пројективне) слике биномних полинома уопште

$$P_n(Z) = Z^n + q, \quad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{0,2}$$

У овом раду извршена је генерализација претходних односа у смислу наведених геометриских пресликавања, или, боље речено, извршен је низ сукцесивних генерализација које се, било у геометриском било у алгебарском смислу, логички надовезују једна на другу, односно произлазе једна из друге.

0.4. (i) Очигледно је да се нуле афиних слика биномних полинома (0,2) у општем случају налазе на елипси (као афиној слици круга). Кад се центар те елипсе налази у координатном почетку, а њени фокуси у тачкама $\zeta_{1,2} = \pm 2p$, тада се као афине слике биномних полинома (0,2) добију полиноми познатог облика (видјети на примјер [17, стр. 450], [20, стр. 477], [3, стр. 50], [15])

$$P_n(z) = U_n(z) + q = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(-p^2)^k z^{n-2k} + q, \quad \nu = [n/2]. \tag{1}$$

За специјалне вриједности параметара $p = 1/2$, $q = 0$, полиноми (1) прелазе у класичне полиноме Чебишева [1, стр. 68] који се у интервалу $[-1, 1]$ најмање отклањају од нуле. Одатле наслућујемо да су специфичне особине полинома Чебишева само специјалан случај извјесних општих особина полинома (1).

Испитујући које су то опште особине полинома (1) и како их формулисати независно од интервала $[-1, 1]$ у којем се нуле тих полинома у општем случају очигледно не налазе, најприје смо дефинисали појам распона полинома $P_n(z)$ [16 c]

$$\begin{aligned} R &= \max|P_n(\zeta_\nu)| - \min|P_n(\zeta_\nu)| \\ P_n'(\zeta_\nu) &= 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{2}$$

кад је познат положај двију нула полинома (1) или положај двију нула изводног полинома (1′) и још један елемент.

Поред тога,

СТАВ 2.4. *Ако над сваком страном полигона нула полинома* (1) *датог степена n конструишемо извана (изнутра) правилан n-угао, тада центри свих тако конструисаних правилних n-углова образују такође правилан n-угао чији се центар поклапа са тежиштем полигона нула полинома* (1)

показује да познати Bellati-ев теорем [18, став посљедњи] изражава само специјалан случај једне опште особине коју имају сви полигони нула полинома (1), па и они, чији се „врхови“ налазе на једној правој.

0.6. Посматрано са становишта геометриских пресликавања, у глави III се углавном говори о полиномима чији су полигони нула перспективно-афине слике различито комбинованих правилних полигона, односно о полиномима чији су полигони нула афине слике макаквих тетивних полигона. Та геометријска уопштавања су одраз алгебарских уопштавања облика

$$(0,3) \qquad U_k(U_m(z)+q)+q_1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n-1} A_k U_{n-k}(z)+A_n,$$

извршених у вези са полиномима (1), односно у вези са полиномима (2,2).

Најприје, у вези са првим од израза (0,3), доказујемо да за полиноме

$$Q_{km}(z) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda} \frac{k}{k-s}\binom{k-s}{s}(-p_1^2)^s \left[\sum_{t=0}^{\nu} \frac{m}{m-t}\binom{m-t}{t}(-p^2)^t z^{m-2t}+q\right]^{k-2s}+q_1,$$

$$\lambda=[k/2], \quad \nu=[m/2].$$

вриједи

СТАВ 3.1. 1° *У општем случају нуле полинома Q_{km} су распоређене на k конфокалних елипса $E_{1\lambda}(\lambda=1,\ldots,k)$. На свакој од тих елипса налази се по m нула полинома Q_{km}.*

2° *Нуле изводног полинома $Q'_{km}(z)$ су распоређене тако да се по m нула тога полинома налази на свакој од $k-1$ елипса $E_{0\nu}(\nu=1,2,\ldots,k-1)$, конфокалних са елипсама $E_{1\lambda}$. Преосталих $m-1$ нула изводног полинома налази се на заједничкој дужој оси тих елипса, између њихових фокуса.*

0.5. У глави II испитујемо један специјалан случај полинома најмањег распона у смислу става 1.5 и као основни став доказујемо

СТАВ 2.1. *Ако полином $S_{n-1}(E)$, аташиран полиному $P_n(z)$, $n=2m$ или $n=2m+1$, има једну вишеструку нулу m-тог реда и једну вишеструку нулу $(n-m-1)$-ог реда, а изводни полином $P_n'(z)$ има све нуле различите, тада се*

1° *коефицијенти $a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}$ полинома $P_n(z)$ могу потпуно и једнозначно изразити помоћу коефицијента a_0, a_1 и a_2, тако да се за $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=-np^2=a$, полином $P_n(z)$ може написати у облику* (1);

2° *нуле полинома $P_n(z)$ налазе на једној правој или једној елипси;*

3° *нуле изводног полинома $P_n'(z)$ налазе на једној правој.*

У вези с овим доказујемо даље

СТАВ 2.2. *Од свих полинома* (1) *датог степена n, чији је распон једнак нули, најмањи отклон од нуле у интервалу $[-2p, 2p]$ има онај полином код којег је $q=0$.* (Полином Чебишева).

ПОСЉЕДИЦА: *Полиноми Чебишева су једини полиноми реалне промјенљиве чији изводни полиноми имају све нуле различите, а чији полиноми стационарних вриједности $S_{n-1}(E)$ имају једну $(-E_1)$ вишеструку нулу m-тог реда и једну супротну (E_1) вишеструку нулу $(n-m-1)$-ог реда.*

СТАВ 2.3. *Полиноми* (1) *су перспективно-афине слике биномних полинома* (0.2).

Затим се у ставовима 2.4 2.8 дају неке геометриске особине полигона нула полинома (1), на основу којих се (са раније споменутом тачношћу) геометриским путем може одредити положај свих нула полинома (1)

$$z_\nu = \sqrt[n]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\left(-\frac{a}{n}\right)^n}}\, e^{\frac{2\nu\pi}{n}i} + \sqrt[n]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\left(-\frac{a}{n}\right)^n}}\, e^{-\frac{2\nu\pi}{n}i} \tag{5}$$

$$\nu=1,2,\ldots,n$$

и положај свих нула

$$\zeta_\nu = 2p\cos\frac{\nu\pi}{n}, \quad \nu=1,2,\ldots,n-1 \tag{6}$$

изводног полинома

$$P_n'(z) = n\cdot\sum_{k=0}^{\nu}\binom{n-1-k}{k}(-p^2)^k z^{n-1-2k}, \quad \nu=\left[\frac{n-1}{2}\right], \tag{1'}$$

2° онолико нула на хиперболи (H), *колико укупно имају реалних нула полином* $P_n(\zeta)$ *и полином* $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k (\beta r^2)^{n-k} t^k$.

СТАВ 3.5. *Ако се све нуле полинома* $Q_n(z, r, {}^1/_2, {}^1/_2)$ *налазе у интервалу* $[-r, r]$ *или ако се све нуле полинома* $Q_n(z, r|\beta/\alpha|, {}^1/_2, {}^1/_2)$ *налазе у интервалу* $[-r|\beta/\alpha|, r|\beta/\alpha|]$, *полином* $Q_n(z, r, \alpha, \beta)$ *је афина слика полинома* $P_n(\zeta)$.

0.7. Вршећи уопштавање односа из главе II у једном другом смислу, у глави IV показујемо да све нуле

$$(9) \qquad z_\nu = -\frac{q_0 - q_1 e^{\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\nu+1}{n}\pi\right) i} - q_2 e^{-\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\nu+1}{n}\pi\right) i}}{p_0 - p_1 e^{\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\nu+1}{n}\pi\right) i} - p_2 e^{-\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\nu+1}{n}\pi\right) i}},$$

полинома

$$F_n(z, p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2, \alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \frac{n}{n-\lambda} \binom{n-\lambda}{\lambda} (p_1 z + q_1)^\lambda (p_2 z + q_2)^\lambda (p_0 z + q_0)^{n-2\lambda} +$$

$$+ (p_1 z + q_1)^n e^{\alpha i} + (p_2 z + q_2)^n e^{-\alpha i}; \quad \nu = [n/2],$$

припадају једном истом геометриском мјесту чија једначина у равни комплексних бројева има облик

$$z = -\frac{q_0 - q_1 e^{\theta i} - q_2 e^{-\theta i}}{p_0 - p_1 e^{\theta i} - p_2 e^{-\theta i}}.$$

Одатле произилази да је геометриско мјесто нула полинома F_n или конусни пресјек или одређена уникурзална крива трећег или четвртог реда.

Овим је, очигледно, ријешено и питање пројективне слике биномних полинома (0.2).

У вези с тим доказујемо

СТАВ 4.1. *Ако је* $p_0 \gtreqless 0, p_2 = \bar{p}_1 \neq 0$, *полиноми* F_n *су пројективне слике биномних полинома* (0,2).

Задржавајући се даље на неким посебним вриједностима параметара p_j и q_j, $j = 0, 1, 2$, и класификујући полиноме F_n према геометриском мјесту којем припадају нуле тих полинома, показујемо да се у свим тим случајевима нуле полинома налазе у пресјечним тачкама геометриског мјеста којем припадају и једног прамена (полупрамена) зрака (S), чије сваке двије узастопне зраке

Затим, успостављањем одређене везе између коефицијената A_k другог од израза (0,3) и коефицијената a_k полинома

$$P_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^{n-k}, \quad a_0 a_n \neq 0,$$

добијамо одређену зависност између нула полинома $P_n(\zeta)$ и нула полинома

$$Q_n(z, r, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{n-k+2\lambda}{n-k+\lambda} \binom{n-k+\lambda}{\lambda} (-\alpha\beta r^2)^\lambda A_{k-2\lambda} z^{n-k}$$

(7)

$$+ 2 \sum_{\lambda=1}^{t} (-\alpha\beta r^2)^\lambda A_{n-2\lambda} + A_n,$$

$$s=[k/2],\ t=[n/2],\ r>0,\ A_k = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha^{k-\nu} (\beta r^2)^\nu a_{k-\nu} a_{n-\nu};\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

односно нула полинома

$$R_{2n}(z, r, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{s} \binom{n-k+2\lambda}{\lambda} (\alpha\beta r^2)^\lambda a_{k-2\lambda} [\alpha^{n-k} z^{2n-k} + (\beta r^2)^{n-k} z^k]$$

(8)

$$+ \sum_{\lambda=0}^{t} \binom{2\lambda}{\lambda} (\alpha\beta r^2)^\lambda a_{n-2\lambda} z^n,$$

$$s = [k/2], \quad t = [n/2].$$

Тиме добивамо могућност да на основу познатог распореда нула полинома (7) или (8) за одређене вриједности параметара α, β и r одредимо распоред нула полинома $P_n(\zeta)$ и обрнуто.

У вези с тим доказујемо да вриједе ставови:

СТАВ 3.3. *Полином* $P_n(\zeta)$ *има*

1° *онолико нула на кругу* $(C) \equiv \zeta = re^{\theta i}$, *колико полином* $Q_n(z, r, {}^1/_2, {}^1/_2)$ *има реалних нула у интервалу* $[-r, r]$;

2° *онолико нула на елипси* $(E) \equiv \zeta = \alpha re^{\theta i} + \beta re^{-\theta i}$, $(|\alpha| \neq |\beta|)$, *колико полином* $R_{2n}(z, r, \alpha, \beta)$ *има нула на кругу* (C);

3° *онолико нула на хиперболи* $(H) \equiv \zeta = \alpha t + \beta r^2/t$; $(\beta \neq \lambda\alpha$, $\lambda \gtreqless 0$; $-\infty < t < +\infty)$, *колико полином* $R_{2n}(z, r, \alpha, \beta)$ *има реалних нула.*

СТАВ 3.4. *Полином* $Q_n(z, r, \alpha, \beta)$ *има*

1° *онолико нула на елипси* (E), *колико укупно имају реалних нула полином* $Q_n(z, r, {}^1/_2, {}^1/_2)$ *у интервалу* $[-r, r]$, *и полином* $Q_n(z, r|\beta/\alpha|, {}^1/_2, {}^1/_2)$ *у интервалу* $[-r|\beta/\alpha|, r|\beta/\alpha|]$;

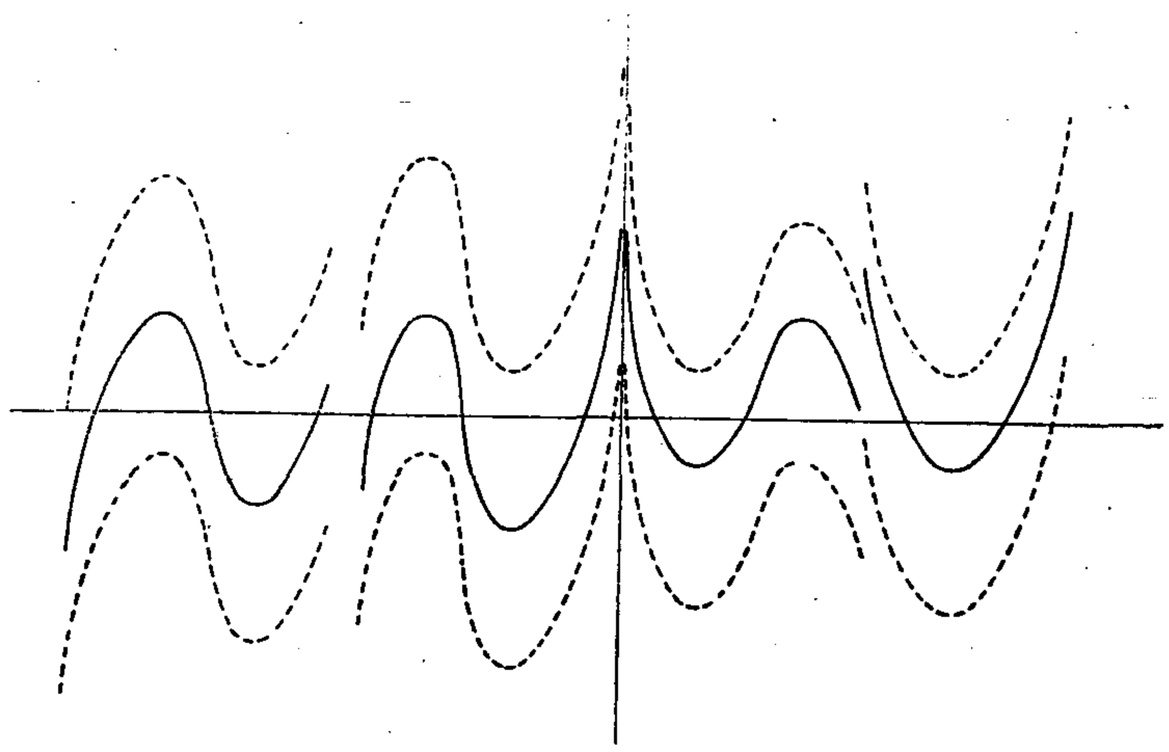
I. О РАСПОНУ ПОЛИНОМА

У овој глави је дефинисан распон полинома и изложени неки резултати који су, заједно са резултатима изложеним у глави II, први пут детаљније изложени у саопштењу [16, c].

1.1. *ДЕФИНИЦИЈА РАСПОНА И ЊЕГОВЕ ОСОБИНЕ.* (i) Нека је

$$R_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}-q, \quad a_0>0, \; a_k \gtreqless 0, \; q \gtreqless 0, \tag{1,1*}$$

полином реалне промјенљиве, чије су све нуле реалне и чији је граф, за општи случај, приказан на слици 2.



Слика 2

Очигледно је тада да је граф полинома

$$P_n(x)=R_n(x)+q=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \tag{1*,1}$$

подударан са графом полинома $R_n(x)$, да је „подигнут“ за $q>0$, а „спуштен“ за $q<0$, и да оба полинома, и $P_n(x)$ и $R_n(x)$, узимљу екстремне вриједности $P_n(\xi_\nu)$ и $R_n(\xi_\nu)$ за исте вриједности промјенљиве x

$$x_\nu=\xi_\nu \gtreqless 0, \quad \nu=1, 2, \ldots, n-1,$$

одређене једначином

$$P_n'(x)=R_n'(x)=0.$$

захваћају међу собом угао $\alpha=2\pi/n$, $(\alpha=\pi/n)$ или прамена зрака (S^*), који се добије афиним пресликавањем прамена (S).

Изузетно, нуле полинома $F_n(z, 1, k, 0, -k^n u, -ku, 0, \pi) = F_{n,6}(z, k, u)$, налазе се у пресјечним тачкама једног Аполонијевог круга и прамена кругова што пролазе кроз двије сталне тачке.

На крају главе IV показујемо да за полигоне нула полинома

$$F_{n,7} = z^n - \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} u^k v^{n-2k} z^k + (-u)^n, \quad \lambda=[n/2],$$

вриједи

СТАВ 4.3. *Ако над сваком страном полигона нула (F) или афино-пресликаног (F*) полигона нула полинома $F_{2m,7}$ конструишемо извана (изнутра) правилан $2m$-угао и спојимо центре два и два правилна $2m$-угла, конструисана над супротним странама полигона F (односно F*), тада су све тако добивене спојнице центара једнаке по дужини и сваке двије узастопне од њих захваћају међу собом угао $\alpha=\pi/m$.*

0.8. У глави V показујемо како се примјеном идентитета

$$u^m + v^m - (u+v)\ (u^{m-1} + v^{m-1}) + uv\ (u^{m-2} + v^{m-2}) \equiv 0,$$

односно примјеном полинома (1), могу формирати полиноми $P_{m^2}(z)$ (или полиноми $P_{2m^2}(z)$), чије се нуле

$$(P_{m^2}) \qquad z_{\lambda,\nu} = ue^{\frac{2\lambda\pi}{m}i} + ve^{\frac{2\nu\pi}{m}i} + we^{-2(\lambda+\nu)\frac{\pi}{m}i}$$

$$\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, m$$

$$(P_{2m^2}) \qquad z_{j,\lambda,\nu} = u_j e^{\frac{2\lambda\pi}{m}i} + v_j e^{-\frac{2\lambda\pi}{m}i} + w_j e^{\frac{2\nu\pi}{m}i} + W_j e^{-\frac{2\nu\pi}{m}i}, \quad j=1, 2,$$

могу алгебарски изразити помоћу коефицијената a_3, a_m и a_{2m} (односно помоћу коефицијената a_2, a_4, a_m и a_{2m}) тих полинома.

0.9. На крају напомињемо да смо у току цијелог рада настојали да останемо само у области елементарно-алгебарских операција и да добивене резултате непосредно геометриски интерпретирамо.

Тај елементарни поступак је основна карактеристика овог рада.

(iv) Доказ става 1.1. Ако у полиному (1,1) извршимо смјену

(1,4) $$z = a\,(z_0 + Ze^{\theta i})$$

добићемо полином

$$P_{n,1}(Z) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, Z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a^{n-k}\,(z_0 + Ze^{\theta i})^{n-k},$$

чији изводни полином

$$P'_{n,1}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\, a_k\, a^{n-k}\, e^{\theta i}\,(z_0 + Ze^{\theta i})^{n-1-k}$$

има нуле одређене релацијама

$$Z_\nu' = (\zeta_\nu / a - z_0)\, e^{-\theta i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Због тога је

$$P_{n,1}(Z_\nu') = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \zeta_\nu^{n-k} = P_n(\zeta_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

чиме је став 1.1 доказан.

1.2. *ПОМОЋНИ ПОЛИНОМ* $S_{n-1}(E)$. (i) Ради прегледнијег и једноставнијег изражавања и проучавања односа у вези са распоном (2), сваком датом полиному $P_n(z)$ аташирамо полином његових стационарних вриједности

(3) $$S_{n-1}(E) = \prod_{\nu=1}^{n=1} (E - E_\nu)$$

чије су нуле E_ν одређене релацијама

$$E_\nu = P_n(\zeta_\nu) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k\, \zeta_\nu^{n-k}, \quad P_n'(\zeta_\nu) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

За дати полином $P_n(z)$ полином (3) је један једини и могуће га је увјек формирати, без обзира на то да ли се могу или не могу појединачно израчунати нуле изводног полинома $P_n'(z)$.

Наиме, релацијама

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} E_\nu^\lambda = \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k\, \zeta_\nu^{n-k} \right)^\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n-1,$$

те Newton-овим и Waring-овим формулама [17, стр. 378 и стр. 460] коефицијенти полинома (3) су једнозначно одређени.

Очигледно је даље да полином (1*,1), за $n=2m+1$, има само једну реалну нулу, ако је

$$|q| > \max P_n(\xi_\nu) - \min P_n(\xi_\nu),$$

а да, за $n=2m$, има двије и само двије реалне нуле, ако је

$$q < \min P_n(\xi_\nu) - \max P_n(\xi_\nu),$$

односно, да нема ни једне реалне нуле, ако је

$$q > \max P_n(\xi_\nu) - \min P_n(\xi_\nu), \quad \nu=1,2,\ldots,n-1.$$

Разлика

(2*) $$R=\max P_n(\xi_\nu) - \min P_n(\xi_\nu) = \max R_n(\xi_\nu) - \min R_n(\xi_\nu)$$

је, дакле, карактеристична за полиноме (1,1*) и (1*,1) и назвали смо је р а с п о н о м тих полинома.

(ii) Дефиницијом распона (2*) обухваћени су само полиноми (1*,1) код којих су све вриједности $P_n(\xi_\nu)$ реалне, тј. код којих је

$$P_n(\xi_\nu) \gtreqless 0, \quad \nu=1,2,\ldots,n-1.$$

Проширујући ту дефиницију на полиноме са макаквим коефицијентима

(1,1) $$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}, \quad a_0 \neq 0,$$
$$P_n'(\zeta_\nu)=0, \quad \nu=1,2,\ldots,n-1,$$

р а с п о н полинома (1,1) дефинишемо релацијом

(2) $$R=\max |P_n(\zeta_\nu)| - \min |P_n(\zeta_\nu)|, \quad \nu=1,2,\ldots,n-1.$$

(iii) Величина распона (2*) једнака је величини (2), ако је

(1,2) $$\max P_n(\xi_\nu) \cdot \min P_n(\xi_\nu) \geqq 0.$$

Између тих двију вриједности постоји разлика само онда, кад је

(1,3) $$\max P_n(\xi_\nu) > 0, \quad \min P_n(\xi_\nu) < 0,$$

али се и овај случај, „подизањем“ или „спуштањем“ полинома $P_n(z)$, може свести на случај (1,2), без утицаја на величину распона (2*) и на структуру полинома $P_n(z)$. Због тога ће полиноми (1*,1) у даљем излагању бити увијек третирани само као специјалан случај полинома (1,1) и тек при коначном извођењу закључака биће вођено рачуна о специфичности случаја (1,3), односно о дефиницији (2*).

(ii) Ако се испитивање полинома (1,1) врши помоћу модуларне површине $P = |P_n(z)|$, кругове K, K_1 и K_2 треба замијенити равнима ε, ε_1 и ε_2, паралелним са равни комплексних бројева и удаљеним од те равни, респективно, за $E=r$, $E'=r'$; $E''=r''$, при чему су r, r' и r'' дати релацијама (1,5).

У том случају су стационарне тачке модуларне површине P распоређене и са једне и са друге стране равни ε, а распон полинома $P_n(z)$ једнак је међусобном растојању равни ε_1 и ε_2, односно, једнак је збиру растојања тих равни од равни ε.

(iii) Ако се претходна разматрања односе само на полиноме (1*,1) уз дефиницију распона (2*), тада мјесто кругова K, K_1 и K_2, односно мјесто равни ε, ε_1 и ε_2, треба узети праве $e=r$, $e_1=r'$ и $e_2=r''$, паралелне x – оси, а мјесто модуларне површине P треба узети граф полинома $P_n(z)$, односно, мјесто вриједности $E_\nu = |P_n(\zeta_\nu)|$ узети стационарне вриједности $\mathcal{E}_\nu = P_n(\zeta_\nu)$.

У овом случају је распон полинома једнак ширини пруге између правих e_1 и e_2.

1.4. *ПОЛИНОМИ $P_n(z)$ ЧИЈИ ЈЕ РАСПОН ЈЕДНАК НУЛИ.* (i) Ако не постављамо никакве посебне услове које полином (1,1) треба да задовољава, тада је најмањи могући распон што га тај полином може да има, очигледно, једнак нули. У том случају је

$$\max |P_n(\zeta_\nu)| = \min |P_n(\zeta_\nu)| = |P_n(\zeta_\nu)|,$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, n-1, \quad r' = r'' = r,$$

па можемо рећи:

СТАВ 1.2. *Полином $P_n(z)$ има распон једнак нули онда и само онда, кад све нуле њему ашаираног полинома $S_{n-1}(E)$ леже на једном кругу чији се центар налази у координатном почетку.*

(ii) За полиноме чији је распон једнак нули вриједе ставови 1.3 и 1.4.

Доказ става 1.3. Претпоставимо да све нуле полинома $P_n(z)$, чији је распон једнак нули, нису различите, већ да су двије од њих међусобно једнаке, на примјер, $z_2 = z_1$. Тада је $z_1 = \zeta_1$ такође нула изводног полинома $P_n'(z)$ па је

$$\mathcal{E}_1 = P_n(\zeta_1) = P_n(z_1) = 0$$

и, у вези са претпоставком става,

$$|P_n(\zeta_\nu)| = |P_n(\zeta_1)| = |P_n(z_1)| = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Одатле је

$$P_n(\zeta_\nu) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(ii) Из доказа става 1.1 слиједи непосредно

ЛЕМА 1.1. *Нуле полинома* (3) *су инваријантне у односу на ротацију и транслацију координатног система као и у односу на хомотетична пресликавања у равни комплексне промјенљиве z.*

ПОСЉЕДИЦА: *Полином* (3) *проширан полиному* $P_n(z)$ *не мијења се кад смјеном* (1,4) *полином* $P_n(z)$ *трансформишемо тако да његови коефицијенти буду*

$$a_0=1,\ a_1=0.$$

1.3. *ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РАСПОНА И РАСПОРЕД НУЛА ПОЛИНОМА* (3). (i) Нека су $K(0,r)$, $K_1(0,r')$ и $K_2(0,r'')$ три концентрична круга са центром у координатном почетку у равни промјенљиве E и нека су њихови радиуси дати релацијама

$$r'=\min|P_n(\zeta_\nu)|,\quad r''=\max|P_n(\zeta_\nu)|,$$

$$r=\frac{1}{n}\left(r^*+\sum_{\nu=1}^{n-1}|P_n(\zeta_\nu)|\right),\tag{1,5}$$

$$r^*=\begin{cases} r'' & \text{за } n=2m \\ r & \text{за } n=2m+1 \end{cases}.$$

Нека је даље

$$|P_n(\zeta_\nu)|-r=\rho_\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,n-1,$$

$$r^*-r=\rho^*,\quad r-r'=\rho_m,\quad r''-r=\rho_M.$$

Тада је

$$\rho^*+\sum_{\nu=1}^{n-1}\rho_\nu=0,$$

$$\rho^*=\begin{cases} \rho_M & \text{за } n=2m \\ 0 & \text{за } n=2m+1 \end{cases},\tag{1,6}$$

$$R=r''-r'=\rho_m+\rho_M.$$

Из релација (1,6), за општи случај, произлази:

a) Распон полинома $P_n(z)$ једнак је ширини кружног прстена (K_1,K_2) одређеног круговима K_1 и K_2;

b) Круг K се налази између кругова K_1 и K_2;

c) Нуле полинома (3) налазе се на круговима K_1 и K_2 и у кружном прстену (K_1,K_2), а распоређене су *унутар и ван круга* K, тако да је збир растојања од круга K оних нула које се налазе унутар тога круга једнак збиру (увећаном за ρ^*) растојања од круга K оних нула које се налазе ван њега.

има екстремне вриједности

$$\max Q_n(\zeta_\nu) = {}^1/_2(E_1^* - E_2^*) = E > 0,$$

$$\min Q_n(\zeta_\nu) = {}^1/_2(E_2^* - E_1^*) = -E < 0.$$

Како се, према (*) и (**), полином $P_n(z)$ може написати у облику

$$P_n(z) = (-1)^n a_0\left(Q_n(z) + {}^1/_2(E_1^* + E_2^*) + \frac{a_n}{(-1)^n a_0}\right) =$$

$$= (-1)^n a_0 (Q_n(z) + \alpha + \beta i);\ \alpha \gtreqless 0,\ \beta \gtreqless 0,$$

и како је, према претпоставци става,

$$|P_n(\zeta_j)| = |P_n(\zeta_k)|,\ j, k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

то је

$$|E + \alpha + \beta i| = |-E + \alpha + \beta i|,$$

$$|Q_n(\zeta_j) + \alpha + \beta i| = |Q_n(\zeta_k) + \alpha + \beta i| = |\pm E + \alpha + \beta i|.$$

Одатле је

$$\alpha = 0,\ Q_n(\zeta_j) = \pm E,\ j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(iii) Екстремне вриједности $Q_n(\zeta_j)$ и $Q_n(\zeta_{j+1})$ које одговарају двјема узастопним нулама ζ_j и ζ_{j+1} изводног полинома $P_n'(z)$ не могу бити једнаке. (Посљедица Rolle-овог става; било би $Q_n'(\theta) = 0$, $\zeta_j < \theta < \zeta_{j+1}$, што је немогуће). Због тога је

$$Q_n(\zeta_{j+1}) = -Q_n(\zeta_j),\ j = 1, 2, \ldots, n-2,$$

и, у вези с тим,

$$Q_n(\zeta_\nu) = -E,\ E_\nu = P_n(\zeta_\nu) = (-1)^n a_0(-E + \beta i),\ \nu = 1, 3, \ldots, 2m-1,$$

$$Q_n(\zeta_{m+\nu}) = E,\ E_{m+\nu} = P_n(\zeta_{m+\nu}) = (-1)^n a_0(E + \beta i),\ \nu = 2, 4, \ldots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

У овом случају, дакле, полином $S_{n-1}(E)$, који одговара полиному $P_n(z)$ има једну вишеструку нулу m-тог реда и једну вишеструку нулу $(n-m-1)$-ог реда, што је и требало доказати.

1.5. *НЕКИ ПОЛИНОМИ РЕЛАТИВНО НАЈМАЊЕГ РАСПОНА.* (i) У тачки 1.4 говорило се о полиномима који имају апсолутно најмањи распон. При томе се нису постављали никакви услови нити икаква ограничења у погледу полинома $P_n(z)$. Могу се, међутим, претходно поставити извјесни услови и тражити кад ће, уз испуњење тих услова, полином $P_n(z)$ имати најмањи могући распон.

Значи да су све нуле ζ_ν, $\nu=1, 2, \ldots, n-1$, изводног полинома $P_n'(z)$ такође нуле полинома $P_n(z)$. Због тога је

$$P_n(z)=a(z-z_1)P_n'(z),$$

а одатле је

$$a_k=(-1)^k\binom{n}{k}a_0 z_1^k,$$

одакле слиједи

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)^n.$$

Дакле, претпоставка да су двије нуле полинома $P_n(z)$ једнаке доводи да закључка да су све његове нуле једнаке.

Према томе, полином $P_n(z)$, чији је распон једнак нули, или уопште нема једнаких нула или су све његове нуле једнаке.

Тиме је став 1.3 доказан.

ПОСЉЕДИЦА: *Ако је распон полинома $P_n(z)$ једнак нули, а његов изводни полином $P_n'(z)$ има бар двије нуле различите, тада полином $P_n(z)$ има све нуле различите и бар двије од стационарних вриједности $E_\nu=P_n(\zeta_\nu)$, $\nu=1, 2, \ldots, n-1$, међусобно различите.*

(У противном случају би полином $Q_n(z)=P_n(z)-E$, $E=P_n(\zeta_\nu)$, $\nu=1, 2, \ldots, n-1$, чији је распон једнак нули, имао једну n-струку нулу, па би изводни полином $Q_n'(z)=P_n'(z)$ имао све нуле једнаке.)

Доказ става 1.4. (i) Имајући у виду лему 1.1 и посљедицу става 1.3, можемо увијек узети:

1° да се нуле ζ_ν изводног полинома

$$P_n'(z)=na_0\prod_{\nu=1}^{n-1}(z-\zeta_\nu)$$

налазе на реалној оси;

2° да су оне нумерисане тако да је $\zeta_1<\zeta_2<\ldots<\zeta_{n-1}$;

3° да полином

$$(*)\qquad P(z)=\frac{1}{(-1)^n a_0}(P_n(z)-a_n)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k z^{n-k},\quad b_0=(-1)^n,$$

има све коефицијенте b_k и све екстремне вриједности $E_\nu^*=P(\zeta_\nu)$, $k, \nu=1, 2, \ldots, n-1$, реалне;

4° да је $\max P(\zeta_\nu)\neq\min P(\zeta_\nu)$.

(ii) Нека је, дакле,

$$\max P(\zeta_\nu)=E_1^*,\quad \min P(\zeta_\nu)=E_2^*,\quad E_1^*>E_2^*.$$

Тада полином

$$(**)\qquad Q_n(z)=P(z)-{}^1/_3(E_1^*+E_2^*)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k z^{n-k}-{}^1/_2(E_1^*+E_2^*),$$

$$Q_n'(\zeta_\nu)=0,\quad \nu=1, 2, \ldots, n-1,$$

$n-m-1$ нула на другом концентричном кругу, чији се центар налази у координатном почетку.

Овим је став 1.5 доказан.

Напомена I. Полином $P_n(z)$, чији је распон једнак нули, можемо сматрати специјалним случајем, $(k=0, R=0)$, полинома најмањег распона у смислу става 1.5.

Напомена II. Поступак примјењен при доказивању става 1.5 очигледно вриједи и за случај полинома (1*, 1), уз дефиницију (2*).

У том случају је λ број стационарних тачака графа полинома (1*, 1), које се налазе испод праве e и чији је збир растојања од те праве сталан, тј.

$$\sum_{1}^{\lambda}[r - P_n(\zeta_\nu)] = -\sum_{1}^{\lambda}\rho_\nu = \rho^* + \sum_{\lambda+1}^{n-1}\rho_\nu = k = \text{const.} \tag{4*}$$

У вези с тим можемо тврдити да вриједи

СТАВ 1*.5. *Од свих полинома* (1*, 1) *датог степена* $n, n=2m$ *или* $n=2m+1$, *који задовољавају услов* (4*), *најмањи распон имају они полиноми, чији граф има* m *стационарних тачака на једној и* $n-m-1$ *стационарних тачака на другој правој, паралелној* x*-оси односно, чији одговарајући полином* $S_{n-1}(E)$ *има једну вишеструку нулу* m*-тог реда и једну вишеструку нулу* $(n-m-1)$*-ог реда.*

На крају, у вези са ставом 1.5, доказаћемо да вриједи

ЛЕМА 1.2. *Полиноми* $P_n(z)$, $(n=2m$ *или* $n=2m+1)$, *који имају најмањи распон у смислу става* 1.5 *и чији изводни полиноми имају све нуле различите, имају*

или m *двоструких нула (и евентуално једну једноструку нулу),*

или $m-1$ *двоструку нулу и двије једноструке нуле,*

или све нуле једноструке.

(i) Ако су, наиме, све нуле полинома $P_n(z)$ различите, лема је задовољена.

(ii) Ако полином $P_n(z)$ има вишеструких нула, тада, због једнострукости нула изводног полинома, те нуле могу бити *највише двоструке.*

Претпоставимо, на примјер, да је $z_2=z_1$. Тада је $\zeta_1=z_1$ такође нула изводног полинома $P_n'(z)$, па, као и код доказа става 1.3, из

$$|P_n(\zeta_\nu)| = |P_n(\zeta_1)| = |P_n(z_1)| = 0 \tag{1,8}$$

имамо

$$P_n(\zeta_\nu)=0,\ \nu=1,2,\ldots,m \text{ или } \nu=1,2,\ldots,m-1.$$

Значи, ако полином $P_n(z)$, који задовољава услове ове леме, има једну двоструку нулу, он их онда има или m или $m-1$, што

Један такав, врло једноставан услов, може се поставити у вези са релацијом (1,6), као што то показује релација (4) у тачки (ii).

(ii) Нека је $\lambda, (0<\lambda<n-1)$, број оних нула полинома (3) које се налазе унутар круга $K(0,r)$ и нека збир њихових растојања од круга K има сталну вриједност k, тј. нека је

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda}(r-|P_n(\zeta_\nu)|)=-\sum_{\nu=1}^{\lambda}\rho_\nu=\rho^*+\sum_{\lambda+1}^{n-1}\rho_\nu=k=\text{const.} \tag{4}$$

Доказаћемо да у овом случају вриједи став 1.5.

Очигледно је, наиме, да за све нуле $E_\nu, \nu=1,2,\ldots,\lambda$, полинома $S_{n-1}(E)$, које се налазе у унутрашњем дијелу $(K_1 K)$ кружног прстена (K_1, K_2), вриједе односи

$$\rho_\nu=|E_\nu|-r=r_\nu-\rho_m, \quad r_\nu\geqslant 0, \quad \nu=1,2,\ldots,\lambda,$$

а да за све нуле $E_\nu, \nu=\lambda+1,\lambda+2,\ldots,n-1$, које се налазе у вањском дијелу тога кружног прстена, вриједе односи

$$\rho_\nu=|E_\nu|-r=\rho_M-r_\nu; \quad r_\nu\geqslant 0; \quad \nu=\lambda+1,\ \lambda+2,\ldots,n-1.$$

Замјењујући ове вриједности у (4) налазимо да је

$$\rho_m=\frac{k}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\lambda}r_\nu; \quad \rho_M=\frac{k}{2m-\lambda}+\frac{1}{2m-\lambda}\sum_{\lambda+1}^{n-1}r_\nu$$

и да је, према томе,

$$R=\frac{2mk}{\lambda(2m-\lambda)}+\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{\lambda}r_\nu+\frac{1}{2m-\lambda}\sum_{\lambda+1}^{n-1}r_\nu.$$

Сви чланови са десне стране ове једнакости су позитивни. Из тога произлази да распон R има најмању могућу вриједност онда кад сваки од тих чланова појединачно има најмању могућу вриједност, тј. кад је

$$\lambda=m, \quad r_\nu=0, \quad \nu=1,2,\ldots,n-1.$$

У вези с тим имамо

$$\rho_\nu=-\rho_m=-\frac{k}{m}; \quad |E_\nu|=r-\frac{k}{m}; \quad \nu=1,2,\ldots,m;$$

$$\rho_{m+\nu}=\rho_M=\frac{k}{m}; \quad |E_{m+\nu}|=r+\frac{k}{m}; \quad \nu=1,2,\ldots,n-m-1; \tag{1,7}$$

$$R=\frac{2k}{m}.$$

Значи, уз услов (4), полином $P_n(z)$ има најмањи распон онда, кад њему одговарајући полином $S_{n-1}(E)$ има m нула на једном и

II. О ЈЕДНОЈ КЛАСИ ПОЛИНОМА НАЈМАЊЕГ РАСПОНА

У првој глави смо доказали да сваком датом полиному $P_n(z)$ одговара један и само један потпуно одређен полином $S_{n-1}(E)$, или што је исто, један и само један потпуно одређен распоред нула полинома $S_{n-1}(E)$.

Обрнуто тврђење, у општем случају, не вриједи. Једном датом распореду нула полинома $S_{n-1}(E)$ одговара више полинома $P_n(z)$, различитих по структури њихових коефицијената. Број тих полинома зависи од степена полинома $S_{n-1}(E)$.

Постоје, међутим, и такви распореди нула полинома $S_{n-1}(E)$, којима уз одређене услове, као на примјер уз услове става 2.1, одговарају полиноми $P_n(z)$, чији су коефицијенти *потпуно и једнозначно* одређени.

Излагања у овој глави односе се управо на тај случај и на испитивање особина полинома облика (1).

2.1. *ДОКАЗ СТАВА* 2.1. За полиноме облика (1), односно за релације

$$a_{2k+1}=0, \quad k=1,2,\ldots,m-1;$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}p^{2k}, \quad k=0,1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right]; \tag{2,1}$$

којима су одређени коефицијенти тих полинома, везане су двије познате особине, које ћемо овдје формулисати као помоћне ставове 2.1 и 2.2, потребне за извођење доказа става 2.1.

ЛЕМА 2.1. *За полиноме*

$$U_m(z)=\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k\frac{m}{m-k}\binom{m-k}{k}p^{2k}z^{m-2k};\ \lambda=[m/2], \tag{2,2}$$

$$m=1,2,3,\ldots$$

$$V_m(z)=\frac{1}{m}U'_m(z)=\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\binom{m-1-k}{k}p^{2k}z^{m-1-2k};\ \nu=\left[\frac{m-1}{2}\right], \tag{2,3}$$

вриједи рекурентна формула

$$U_{m+1}=z\,U_m-p^2\,U_{m-1}, \quad U_0=2, \quad U_1=z;$$

$$V_{m+1}=z\,V_m-p^2\,V_{m-1}, \quad V_0=0, \quad V_1=1. \tag{2,4}$$

ЛЕМА 2.2 *Полиноми* (2,2) *и* (2,3) *могу се написати у облику*

$$U_m(z)=\left(\frac{z}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}z^2-p^2}\right)^m+\left(\frac{z}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}z^2-p^2}\right)^m, \tag{2,2*}$$

$$V_m(z)=\left[\left(\frac{z}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}z^2-p^2}\right)^m-\left(\frac{z}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}z^2-p^2}\right)^m\right](z^2-4p^2)^{-1/2}, \tag{2,3*}$$

$$m=1,2,3,\ldots$$

зависи од степена полинома и од тога којој од двију група вриједности (1,7) припала $|E_1|=|P_n(\zeta_1)|$.

Наиме, ако је $n=2m+1$, полином $P_n(z)$ има m двоструких нула и још једну нулу $z=z'$.

Ако је $n=2m$, полином $P_n(z)$ има или m двоструких нула или $m-1$ двоструку нулу и још двије нуле: $z=z'$ и $z=z''$.

(iii) Нула z' (односно нула z'') не може бити нула изводног полинома $P_n'(z)$.

Наиме, нула z' (z'') не може бити једнака некој од нула ζ_ν, $\nu=1,2,\ldots,m$, $(m-1)$, које задовољавају релацију (1,8), јер би у том случају полином $P_n(z)$ имамо троструких нула, што је у противрјечности са тврђењем у почетку тачке (ii).

Исто тако, нула z' (z'') не може бити једнака ни некој од осталих нула изводног полинома $P_n'(z)$, јер би тада било и

$$|P_n(\zeta_{m+\nu})|=|P_n(z')|=0\,; \quad \nu=(0),1,2,\ldots,n-m-1,$$

па би полином $P_n(z)$ имао распон једнак нули и, као посљедица тога (став 1.3), изводни полином $P_n'(z)$ би имао све нуле једнаке, што је опет у супротности са условима леме.

Мора, дакле, бити

$$P_n'(z')\neq 0 \quad \text{и} \quad P_n'(z'')\neq 0 \quad \therefore \quad z'\neq z''.$$

Овим је лема 1.2 доказана.

ПОСЉЕДИЦА: *Полиноми $P_n(z)$ који задовољавају услове леме 1.2 и имају вишеструких нула, могу се написати у облику*

$$P_n(z)=a_0(z-z')\prod_{\nu=1}^{m}(z-\zeta_\nu)^2 \quad \text{за} \quad n=2m+1; \tag{1,9}$$

$$P_n(z)=\begin{cases} a_0\prod\limits_{\nu=1}^{m}(z-\zeta_\nu)^2 \\ a_0(z-z')(z-z'')\prod\limits_{\nu=m+1}^{2m-1}(z-\zeta_\nu)^2 \end{cases} \quad \text{за} \quad n=2m$$

$$z'\neq z''\neq\zeta_j\neq z', \quad j=1,2,\ldots,n-1. \tag{1,10}$$

и формирајмо полиноме

$$(2,9)\quad \begin{aligned} &U_n(z)=P_n(z)-q=\prod_{j=1}^{n}(z-z_j) \quad \therefore \quad U_n'(z)=P_n'(z)=n\prod_{\nu=1}^{n-1}(z-\zeta_\nu),\\ &U_{2n}=U_n^2-\rho^2 \quad \therefore \quad U_{2n}'=2U_n U_n'=2n\prod_{j=1}^{n}(z-z)\prod_{\nu=1}^{n-1}(z-\zeta_\nu). \end{aligned}$$

Како је

$$U_n(\zeta_\nu)=E_1-q=\rho,\quad U_n(\zeta_{m+\nu})=E_2-q=-\rho,$$
$$\nu=1,2,\ldots,m;\ (n-m-1)$$

то $U_n(z)$ има распон једнак нули. Као последица тога и једнострукости нула изводног полинома $U_n'(z)$ (последица става 1.3), произлази да су све нуле полинома $U_n(z)$ различите, тј.

$$z_j \neq z_k \neq \zeta_\nu;\ j, k, (\nu)=1,2,\ldots,n,(n-1).$$

Даље је

$$U_{2n}'(z_j)=0,\quad U_{2n}(z_j)=-\rho^2,\quad U_{2n}'(\zeta_\nu)=0,\quad U_{2n}(\zeta_\nu)=0.$$
$$(j=1,2,\ldots,n)\qquad (\nu=1,2,\ldots,n-1)$$

То значи да је полином $U_{2n}(z)$ полином најмањег распона у смислу става 1.5 и да има $n-1$ двоструку нулу, па се, на основу посљедице леме 1.2, може написати у облику

$$U_{2n}(z)=(z-z')(z-z'')\prod_{\nu=1}^{n-1}(z-\zeta_\nu)^2,$$
$$z'\neq z''\neq\zeta_\nu\neq z'.$$

При томе је, због (2,6),

$$z'+z''+2\sum_{\nu=1}^{n-1}\zeta_\nu=0.$$

Одатле је, обзиром на (1,10) и (2,7),

$$z'+z''=0,\qquad z'=-z''\neq 0.$$

Ставимо ли да је $z'=2p\neq 0$, полиноме U_{2n} и U_{2n}' можемо коначно написати у облику

$$(2,10)\quad \begin{aligned} &n^2U_{2n}=(z^2-4p^2)(P_n')^2,\\ &n^2U_{2n}'=2z(P_n')^2+2(z^2-4p^2)P_n'P_n''. \end{aligned}$$

(iii) Упоређујући међу собом (2,9) и (2,10) налазимо да морају истовремено да постоје идентитети

$$(2,11)\quad \begin{aligned} &n^2(P_n-q)\equiv zP_n'+(z^2-4p^2)P_n'', && (U_{2n}')\\ &n^2(P_n-q)^2-n^2\rho^2\equiv(z^2-4p^2)(P_n')^2, && (U_{2n}) \end{aligned}$$

Доказ леме 2.1 Како је

$$\frac{m}{m-k}\binom{m-k}{k}+\frac{m-1}{m-k}\binom{m-k}{k-1}=\frac{m+1}{m+1-k}\binom{m+1-k}{k},$$

$$\binom{m-1-k}{k-1}+\binom{m-1-k}{k}=\binom{m-k}{k},$$

то множењем U_m и V_m са z, а U_{m-1} и V_{m-1} са p^2 и одузимањем другог израза од првог добијамо непосредно рекурентну формулу (2,4).

Доказ леме 2.2. Релације (2,2*) и (2,3*) очигледно вриједе за $m=1$ и $m=2$. Претпостављајући да вриједе за $m-1$ и за m из рекурентних формула (2,4) произилази да вриједе и за $m+1$.

Наиме, ако ради краћег писања ставимо да је

$$z+(z^2-4p^2)^{1/2}=2u,\quad z-(z^2-4p^2)^{1/2}=2v,$$

$$z=u+v,\quad (z^2-4p^2)^{1/2}=u-v,\quad p^2=uv, \tag{2,5}$$

тада из (2,4) имамо

$$U_{m+1}=(u+v)\ (u^m+v^m)-uv\,(u^{m-1}+v^{m-1})=u^{m+1}+v^{m+1},$$

$$(u-v)\ V_{m+1}=(u+v)\ (u^m-v^m)-uv\,(u^{m-1}-v^{m-1})=u^{m+1}-v^{m+1},$$

што је и требало доказати.

Доказ става 2.1. 1° (i) Водећи рачуна о последици леме 1.1 можемо увијек узети да су коефицијенти полинома $P_n(z)$

$$a_0=1,\quad a_1=0. \tag{2,6}$$

Према томе, за нуле ζ_ν, $\nu=1,2,\ldots,n-1$, изводног полинома $P_n'(z)$ вриједи релација

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\zeta_\nu=0\,. \tag{2,7}$$

(ii) Из услова става произлази даље да је

$$P_n(\zeta_\nu)=E_1\neq E_2=P_n(\zeta_{m+\nu}),\quad \nu=1,2,\ldots,m;\ (n-m-1).$$

У вези с тим ставимо да је

$$E_1+E_2=2q,\quad E_1-E_2=2\rho\neq 0 \tag{2,8}$$

које се добију рјешавањем система једначина

$$(2,15) \qquad u^n + v^n + q = 0, \quad uv = p^2 = -\frac{a}{n}.$$

(ii) Из релације (5) закључујемо да се нуле полинома (1) налазе на елипси $(E) \equiv z = ue^{\theta i} + ve^{-\theta i}$, тј. на елипси, чији се фокуси налазе у тачкама $\zeta'_{1,2} = \pm 2\sqrt{uv} = \pm 2p$, а чије су полуосе одређене релацијама $b_{1,2} = |u| \pm |v|$.

За $|u| = |v|$, елипса (E) дегенерише у отсјечак $[-2p, 2p]$, унутар кога се, у том случају, налазе и нуле (5) полинома (1).

Овим је и тврђење 2^0 става 2.1 доказано.

3^0 На основу леме 2.2 изводни полином

$$(1') \qquad P_n'(z) = n \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n-1-k}{k} (-p^2)^k z^{n-1-2k}, \quad \nu = \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

можемо написати у облику (2,3*), тј. $P_n'(z) = nV_n(z)$. Стављајући да је $V_n(z) = 0$ добијамо

$$\left(\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} z^2 - p^2}\right) e^{\frac{\nu\pi}{n} i} = \left(\frac{z}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} z^2 - p^2}\right) e^{-\frac{\nu\pi}{n} i},$$

одакле следи

$$z^2 = 4p^2 \cos^2 \frac{\nu\pi}{n}$$

а одатле

$$(6) \qquad \zeta_\nu = 2p \cos \frac{\nu\pi}{n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Релација (6) показује да се све нуле изводног полинома (1′) налазе на једној правој.

Овим је доказ става 2.1 завршен.

Напомена: Водећи рачуна о релацијама

$$\cos \frac{2m-\nu}{2m+1} \pi = -\cos \frac{\nu+1}{2m+1} \pi,$$

$$\cos \frac{m+\nu}{2m} \pi = -\cos \frac{m-\nu}{2m} \pi,$$

из (6) имамо

$$(6) \qquad \begin{gathered} \zeta_\nu = \pm 2p \cos \frac{\nu\pi}{n}, \\ \nu = 1, 2, \ldots, m \text{ за } n = 2m+1; \\ \nu = 1, 2, \ldots, m-1, \ \zeta_m = 0 \text{ за } n = 2m. \end{gathered}$$

и да на основу тога, поред осталих, морају истовремено да буду задовољене релације

$$(2,12)\qquad \begin{gathered} n^2 a_k - (n-k)^2 a_k = (n-k+1)\,(n-k+2)\,(-4p^2)\,a_{k-2}, \\ (k=2,3,\ldots,n-1) \\ n^2(a_n - q) = -8p^2 a_{n-2},\quad n^2(a_n-q)^2 - n^2\rho^2 = -4p^2 a^2_{n-1}. \end{gathered}$$

Из прве од ових релација имамо

$$a_k = -\frac{4\,(n-k+1)\,(n-k+2)}{k\,(2n-k)}\,p^2\,a_{k-2}.$$

Одатле, у вези са (2,6), имамо (2,1).

Из друге од релација (2,12) имамо

$$(2,13)\qquad a_n = \begin{cases} q & \text{за } n=2m+1, \\ q+2\,(-1)^m\,p^{2m} & \text{за } n=2m, \end{cases}$$

а из последње од њих имамо

$$(2,14)\qquad \rho^2 = 4p^{2n},\quad \rho = \pm\,2p^n.$$

(iv) Непосредном замјеном вриједности (2,1) и (2,13) у (2,11), и водећи рачуна о леми 2.2, налазимо да су оба идентитета (2,11) задовољена.

Према томе, тражени полином има заиста облик

$$(1)\qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(-p^2)^k\,z^{n-2k} + q,\quad \lambda = [n/2].$$

(v) Релације (2,12), из којих смо израчунали коефицијенте a_k, $k=2,3,\ldots,n$, линеарне су у односу на те коефицијенте. Значи да су (2,1) и (2,13) једине вриједности које истовремено задовољавају и релације (2,12) и идентитете (2,11).

Овим је тврђење 1° става 2,1 доказано.

2° (i) На основу леме 2.2 и релација (2,5) полином (1) се може написати у облику

$$P_n(u+v) = u^n + v^n + q.$$

У вези с тим налазимо да су нуле полинома (1) одређене релацијама

$$(5)\qquad z_\nu = u\,e^{\frac{2\nu\pi}{n}i} + v\,e^{-\frac{2\nu\pi}{n}i} = u_\nu + v_\nu,\qquad \nu = 1,2,\ldots,n,$$

$$\left(u = \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \left(-\frac{a}{n}\right)^n}},\ v = \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \left(-\frac{a}{n}\right)^n}}\right)$$

па се полином (1) може писати у облику

$$P_n(z)=P_n(xe^{\varphi i})=$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}|p|^{2k}x^{n-2k}\pm\frac{i}{\lambda}(\lambda^2-1)|p^n|\right]e^{n\varphi i}=$$

$$=\left[[Q_n(x)\pm\frac{i}{\lambda}(\lambda^2-1)|p^n|\right]e^{n\varphi i},\qquad \nu=[n/2].$$

Због тога је за све тачке интервала $(-2p,2p)$

$$|P_n(z)|^2=Q_n^2(x)+\frac{(\lambda^2-1)^2}{\lambda^2}|p|^{2n}\leqslant$$

$$\leqslant 4|p|^{2n}+\frac{(\lambda^2-1)^2}{\lambda^2}|p|^{2n}=\frac{(\lambda^2+1)^2}{\lambda^2}|p^{2n}|=r^2,$$

одакле слиједи

$$|P_n(z)|\leqslant r.$$

Како је и

$$|P_n(\pm 2p)|=|q\pm p^n|=|E_{\cdot\cdot 2}|=r,$$

то можемо тврдити:

Полином (1), чији је распон једнак нули, има унутар интервала $[-2p, 2p]$ отклон од нуле

$$E=r=|u^n|+|v^n|=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}|p^n|. \tag{2,19}$$

Доказ става 2.2. Из (2,19) имамо

$$E=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}|p^n|=\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda}|p^n|+2|p^n|.$$

Из овог израза је очигледно да, за дато p, отклон E има најмању могућу вриједност онда када је $\lambda=1$, тј. кад је

$$u^n=-v^n\ \therefore\ u^n+v^n=-q=0.$$

Овим је став 2.2 доказан.

2.3. *ПОЛИНОМИ* (1) *СА РЕАЛНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА.* Нека је

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\lambda}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(-p^2)^k x^{n-2k}+q \tag{1*}$$

$$(p>0,\ q\gtreqless 0,\ \lambda=[n/2])$$

полином датог степена n ($n=2m$ или $2m+1$), чији су сви коефицијенти реални и чије су екстремне вриједности дате релацијама

$$\begin{aligned} P_n(\zeta_\nu)&=E_1=q-2p^n,\quad \nu=1,2,\ldots,m,\\ P_n(\zeta_{m+\nu})&=E_2=q+2p^n,\quad \nu=1,2,\ldots,n-m-1.\end{aligned} \tag{2,20}$$

Закључак: Нуле изводног полинома (1′) налазе се на дужој оси елипсе (E), између њених фокуса, и симетрично су распоређене у односу на центар те елипсе.

2.2. *ПОЛИНОМИ* (1) *ЧИЈИ ЈЕ РАСПОН ЈЕДНАК НУЛИ. ОТКЛОН ОД НУЛЕ.* Како је, обзиром на (2,8), (2,14) и (2,15)

$$P_n(\zeta_\nu) = E_{1,2} = q \pm 2p^n = -(\sqrt{u^n} \pm \sqrt{v^n})^2,$$

то се распон полинома (1) може изразити релацијом

$$(2,16)\quad R = \left| |\sqrt{u^n} + \sqrt{v^n}|^2 - |\sqrt{u^n} - \sqrt{v^n}|^2 \right| = 4\,|\sqrt{u^n v^n}\cos\psi| = 4|p^n|\,|\cos\psi|$$

у којој је ψ угао између потега бројева $\sqrt{u^n}$ и $\sqrt{v^n}$.

У вези с тим, слиједећа лема је скоро очигледна:

ЛЕМА 2.3. *Да би распон полинома* (1) *био једнак нули потребно је и довољно да u^n и v^n буду супротног знака.*

Доказ. Како је $p \neq 0$, то, према (2,16), распон R може бити једнак нули само кад је $\psi = \pm\pi/2$, тј. кад је

$$(2,17)\qquad \sqrt{u^n} = \pm\, i\,\lambda\sqrt{v^n},\quad \lambda > 0.$$

Одатле је

$$(2,18)\qquad u^n = -\lambda^2 v^n \quad \therefore \quad u^n + \lambda^2 v^n = 0.$$

Обрнуто, ако постоји (2,18), постојаће и (2,17), па је (2,18) потребан и довољан услов да распон полинома (1) буде једнак нули.

ПОСЉЕДИЦА: *Ако полином* (1) *има распон једнак нули, тада нуле њему аташираног полинома $S_{n\,1}(E)$ леже на кругу $K(0, r)$, чији је радиус r дат релацијом*

$$r = {}^1/_2\,(|E_1| + |E_2|) = |u^n| + |v^n| = (\lambda^2+1)\,|v^n| = \frac{1}{\lambda}(\lambda^2+1)\,|p^n|.$$

Полином (1), чији је распон једнак нули, задовољава услове става 1.4, па се, након ротације координатног система и довођења интервала $[-2p, 2p]$ до поклапања са реалном осом, може написати у облику полинома $Q_n(z) + \beta i$, гдје је $Q_n(z)$ полином са реалним коефицијентима и особинама, наведеним при извођењу доказа става 1.4.

Заиста, у овом случају је

$$q = -u^n - v^n = (\lambda^2 - 1)\,v^n = \pm\frac{i}{\lambda}(\lambda^2-1)\,p^n = \pm\frac{i}{\lambda}(\lambda^2-1)\,|p^n|\,e^{n\varphi i},$$

$$\lambda > 0,\quad p = |p|\,e^{\varphi i},$$

Нека је

$$z_k = u_k + v_k = re^{\varphi i}, \quad r > 0,$$

једна нула полинома (1) и нека је

$$\beta = \frac{1}{r} v_k e^{-\varphi i} \qquad \left(\because \alpha = \frac{1}{r} u_k e^{-\varphi i}\right)$$

карактеристична константа датог перспективно-афиног пресликавања.

Тада ће у овом пресликавању врховима

$$\zeta_\lambda = re^{\frac{2\lambda\pi}{n} i}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

правилног полигона N одговарати врхови полигона N'

$$z_\lambda = \left(u_k e^{\frac{2\lambda\pi}{n} i} + v_k e^{-\frac{2\lambda\pi}{n} i}\right) e^{-\varphi i}.$$

Ако полигон N' ротирамо око координатног почетка за угао φ, врхови

$$(N'') \qquad z_\lambda e^{\varphi i} = ue^{\frac{2(k+\lambda)}{n}\pi i} + ve^{-\frac{2(k+\lambda)}{n}\pi i}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

тога полигона ће се у новом положају (N'') очигледно поклапати се врховима (5) полигона нула полинома (1).

Овим је став 2.3 доказан.

(ii) Доказ става 2.4. Означимо са

$$t_\nu = {}^1/_2 (z_{\nu+1} + z_\nu)$$

средине страна b_ν полигона нула полинома (1), $\nu = 1, 2, \ldots, n$, респективно. Имаћемо

$$b_\nu = 2i \left(ue^{\frac{2\nu+1}{n}\pi i} - ve^{-\frac{2\nu+1}{n}\pi i}\right) \sin\frac{\pi}{n},$$

$$t_\nu = \left(ue^{\frac{2\nu+1}{n}\pi i} + ve^{-\frac{2\nu+1}{n}\pi i}\right) \cos\frac{\pi}{n},$$

Одатле, послије замјене

$$u e^{\frac{\pi}{n} i} \cos\frac{\pi}{n} = u_0, \quad v e^{-\frac{\pi}{n} i} \cos\frac{\pi}{n} = v_0$$

и множења b_ν са $\frac{i}{2}$ ctg π/n, добијамо

$$(2{,}21) \qquad \begin{aligned} u_{0\nu} &= t_\nu - \frac{i}{2} b_\nu \operatorname{ctg} \pi/n = 2u_0 e^{\frac{2\nu\pi}{n} i}, \\ v_{0\nu} &= t_\nu + \frac{i}{2} b_\nu \operatorname{ctg} \pi/n = 2v_0 e^{-\frac{2\nu\pi}{n} i}. \end{aligned}$$

Тада је, по дефиницији (2*), распон полинома (1*) одређен релацијом

$$R = E_2 - E_1 = 4p^n.$$

У овом случају су праве e, e_1 и e_2 одређене релацијама

$$e = {}^1/_2 (E_1 + E_2) = q, \quad e_1 = E_1 = q - 2p^n, \quad e_2 = E_2 = q + 2p^n.$$

Праве e_1 и e_2 додирују граф полинома (1*) у тачкама $\xi_\nu = 2p \cos \nu\pi/n$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, а сијеку га у тачкама

$$x_{1,2} = \pm 2p.$$

У вези са тим можемо тврдити:

Унутар цијелог интервала $[-2p, 2p]$ граф полинома (1*) се ни у једној својој тачки не удаљује од праве $e = q$ више од половине распона тога полинома.

Другим ријечима речено, отклон полинома (1*) од праве $e = q$, унутар интервала $[-2p, 2p]$ једнак је

$$E = 2p^n.$$

Напомена: (i) У случају полинома (1*), између збира (4*) и интервала $[-2p, 2p]$ постоји узајамно једнозначна зависност. Наиме, збир удаљености од праве $e = q$ екстремних тачака (2,20), које се налазе испод те праве, једнак је

$$k = 2mp^n, \quad p > 0. \tag{4**}$$

Одатле је очигледно да сваком датом интервалу $[-2p, 2p]$ одговара једна и само једна вриједност збира (4**) и обрнуто.

(ii) Како је распон полинома (1*) за дато k у датим условима најмањи могући, то је у истим условима и отклон овог полинома од праве $e = q$ унутар интервала $[-2p, 2p]$ најмањи могући.

У вези са ставом 2.1, можемо тврдити да су полиноми (1*) једини полиноми реалне промењљиве који имају ту особину.

2.4. *НЕКЕ ГЕОМЕТРИСКЕ ОСОБИНЕ ПОЛИГОНА НУЛА ПОЛИНОМА* (1). (i) Доказ става 2.3. Ако се оса афиности поклапа са реалном осом, перспективно-афино пресликавање тачака ζ у тачке z комплексне равни дато је релацијом

$$z = \zeta + \beta (\bar{\zeta} - \zeta),$$

у којој је β карактеристична константа пресликавања.

Ову релацију можемо написати у облику

$$z = \alpha\zeta + \beta\bar{\zeta}$$

уз допунску једнакост

$$\alpha + \beta = 1.$$

Одатле је

$$(t_\nu - 2\sqrt{u_0 v_0})^{1/2} (t_\nu + 2\sqrt{u_0 v_0})^{1/2} = (t_\nu - 2\sqrt{uv}\cos \pi/n)^{1/2} (t_\nu + 2\sqrt{uv}\cos \pi/n)^{1/2}$$
$$= \pm \frac{i}{2} b_\nu \operatorname{ctg} \pi/n = \rho_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

што је и требало доказати.

Доказ става 2.7. Нека су

$$\rho_\nu' = z_\nu + 2\sqrt{uv}, \quad \rho_\nu'' = z_\nu - 2\sqrt{uv}$$

потези, који врх $z_\nu = u_\nu + v_\nu$ спајају са фокусима ζ_1' и ζ_2'. Тада је

$$\rho_\nu' \rho_\nu'' = (u_\nu - v_\nu)^2,$$

па је

$$\left.\begin{aligned} 2u_\nu &= z_\nu + \sqrt{\rho_\nu' \rho_\nu''} = 2ue^{\frac{2\nu\pi}{n} i}, \\ 2v_\nu &= z_\nu - \sqrt{\rho_\nu' \rho_\nu''} = 2ve^{-\frac{2\nu\pi}{n} i}, \end{aligned}\right. \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

чиме је став 2.7 доказан.

Доказ става 2.8. Нека су

$$t_{k\nu} = {}^1/_2 (z_{k+\nu} + z_\nu)$$

средине дужи $b_{k\nu}$, а

$$\rho_{k\nu}' = t_{k\nu} + 2\sqrt{uv}\cos k\pi/n, \quad \rho_{k\nu}'' = t_{k\nu} - 2\sqrt{uv}\cos k\pi/n$$

потези који спајају тачке $t_{k\nu}$ са паровима тачака $\zeta_{1,2}^{(k)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$, респективно.

Тада имамо

$$b_{k\nu} = 2i\left(ue^{\frac{2\nu+k}{n}\pi i} - ve^{-\frac{2\nu+k}{n}\pi i}\right) \sin k\pi/n,$$

$$t_{k\nu} = \left(ue^{\frac{2\nu+k}{n}} + ve^{-\frac{2\nu+k}{n}\pi i}\right) \cos k\pi/n = u_{k\nu} + v_{k\nu},$$

$$u_{k\nu} \cdot v_{k\nu} = uv \cos^2 k\pi/n,$$

$$(t_{k\nu} + 2\sqrt{u_{k\nu} v_{k\nu}})^{1/2} (t_{k\nu} - 2\sqrt{u_{k\nu} v_{k\nu}})^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\rho_{k\nu}' \rho_{k\nu}''} = \left(ue^{\frac{2\nu+k}{n}\pi i} - ve^{-\frac{2\nu+k}{n}\pi i}\right) \cos k\pi/n,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Из друге од ових релација је очигледно да тачке $t_{k\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, леже на елипси (E_k), $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$, респективно, док из

Овим је став 2.4, очигледно, доказан.

Поред особина изражених ставовима 2.3 и 2.4 доказаћемо још и особине изражене слиједећим ставовима:

СТАВ 2.5. *Парови правих што спајају тежиште полигона нула полинома* (1) *са средиштем једног „вањског“ и средиштем „унутрашњег“ правилног n-угла, конструисаног над истом страном полигона нула, одређују по један угао, такав да се симетрале n тако одређених углова поклапају са дужом осом елипсе, описане око полигона нула.*

СТАВ 2.6. *Радиус круга уписаног у правилан n-угао, конструисан над страном* b_ν *полигона нула полинома* (1), *подудара се и по правцу и по величини са геометријском средином потега који спајају средину те стране са „крајњим“ нулама* $\zeta_{1,2}^{(1)} = \pm 2\sqrt{uv}\cos\pi/n$ *изводног полинома* (1′).

СТАВ 2.7. *Ако у сваком врху полигона нула полинома* (1) *конструишемо и са једне и са друге стране врха геометријску средину потега који тај врх спајају са фокусима* $\zeta_{1,2}' = \pm 2\sqrt{uv}$ *елипсе, описане око полигона нула, тада крајеви „вањских“ геометријских средина образују један, а крајеви „унутрашњих“ геометријских средина други правилан n-угао.*

Тежиште и једног и другог тако добијеног n-угла поклапа се са тежиштем полигона нула полинома (1).

СТАВ 2.8. *Парови симетрично распоређених нула* $\zeta_{1,2}^{(k)} = \pm 2\sqrt{uv}\cos k\pi/n$ *изводног полинома* (1′) *фокуси су коаксијалних и хомотетичних елипса*

$$(E_k) \equiv z = u\, e^{\theta i}\cos k\pi/n + v\, e^{-\theta i}\cos k\pi/n\,,$$

које дужи

$$b_{k\nu} = z_{k+\nu} - z_\nu\,,\ \nu = 1, 2, \ldots, n,\ (z_{n+\lambda} = z_\lambda),\ k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

респективно, додирују у њиховим срединама.

Доказ става 2.5. Међусобним множењем израза (2,21) добијамо

$$u_{0\nu}\, v_{0\nu} = 4u_0\, v_0 = 4uv\cos^2\pi/n\,.$$

Одатле је

$$\sqrt{u_{0\nu}\, v_{0\nu}} = \pm 2\sqrt{uv}\cos\pi/n = \text{const.}\,,\qquad \nu = 1, 2, \ldots, n\,,$$

што доказује да је тврђење става 2.5 тачно.

Доказ става 2.6. Међусобним множењем израза (2,21) добије се такође

$$t_\nu^2 - 4u_0\, v_0 = -\,{}^1/_4\, b_\nu^2\,\mathrm{ctg}^2\,\pi/n.$$

III. О НЕКИМ АФИНО-ПРЕСЛИКАНИМ ПОЛИНОМИМА

3.1. *О РАСПОРЕДУ НУЛА ПОЛИНОМА* $Q_{km}(z,p,p_1,q,q_1)$. Нека је дат полином

$$Q_{km}(z,\ldots,q_1) = \tag{3,1}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{s} \frac{k}{k-\lambda}\binom{k-\lambda}{\lambda}(-p_1^2)^\lambda \left[\sum_{\nu=0}^{t} \frac{m}{m-\nu}\binom{m-\nu}{\nu}(-p^2)^\nu z^{m-2\nu}+q\right]^{k-2\lambda}+q_1;$$

$$k,m=1,2,3,\ldots;\quad s=[k/2];\quad t=[m/2].$$

(i) Ако је

$$q=0,\quad p_1=p^m \quad \text{или} \quad q=0,\ k=2,$$

полиноми (3,1) припадају класи полинома (1).

Наиме, према леми 2.2 и релацијама (2,5), у том случају је

$$Q_{km}=(^1/_2\,U_m+\sqrt{^1/_4\,U_m^2-p^{2m}})^k+(^1/_2\,U_m-\sqrt{^1/_4\,U_m^2-p^{2m}})^k+q_1,$$

$$U_m=(z/2+\sqrt{^1/_4\,z^2-p^2})^m+(z/2-\sqrt{^1/_4\,z^2-p^2})^m=u^m+v^m.$$

Поред тога је

$$(z/2+\sqrt{^1/_4\,z^2-p^2})^m(z/2-\sqrt{^1/_4\,z^2-p^2})^m=u^m v^m=p^{2m},$$

па је

$$^1/_2\,U_m+\sqrt{^1/_4\,U_m^2-p^{2m}}=u^m=(z/2+\sqrt{^1/_4\,z^2-p^2})^m,$$

$$^1/_2\,U_m-\sqrt{^1/_4\,U_m^2-p^{2m}}=v^m=(z/2-\sqrt{^1/_4\,z^2-p^2})^m.$$

У вези с тим је онда

$$Q_{km}(z,p,p^m,0,q_1)=$$

$$=u^{km}+v^{km}+q_1=\sum_{\lambda=0}^{\nu}\frac{km}{km-\lambda}\binom{km-\lambda}{\lambda}(-p^2)^\lambda z^{km-2\lambda}+q_1,\quad \nu=[km/2],$$

односно

$$Q_{2m}(z,p,p_1,0,q_2)=$$

$$=U_m^2-2p_1^2+q_1=\sum_{\lambda=0}^{m}\frac{2m}{2m-\lambda}\binom{2m-\lambda}{\lambda}(-p^2)^\lambda z^{2m-2\lambda}-2p^{2m}-2p_1^2+q_1^*,$$

што је и требало доказати.

У овом специјалном случају су, дакле, нуле полинома (3,1) распоређене или на једној правој или на једној елипси.

(ii) У општем случају, међутим, за полиноме (3,1) вриједи став 3.1.

прве и последње произлази да се симетрала угла што га међу собом захваћају потези $\rho'_{k\nu}$ и $\rho''_{k\nu}$ поклапа са симетралом дужи $b_{k\nu}$, $k=1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$, $\nu=1,2,\ldots,n$.

Другим ријечима речено, праве $b_{k\nu}$ су тангенте на елипсе (E_k) са додиром у тачкама $t_{k\nu}$, $k=1,2,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$, $\nu=1,2,\ldots,n$, респективно, што је и требало доказати.

ПОСЉЕДИЦА става 2.8: *Крива $p-1$ класе, о којој говори став 0.2, у случају полинома* (1) *састављена је из m елипса кад је $n=2m+1$, а из $m-1$ елипсе и једне тачке, центра тих елипса, кад је $n=2m$.*

Напомена: (i) Сви претходни ставови вриједе и онда, кад се „врхови“ полигона нула полинома (1) налазе на једној правој.

(ii) Специјално, ти ставови вриједе и за *сваки троугао*, као за полигон нула неког полинома (1) трећег степена, и за *сваки паралелограм*, као за полигон нула неког полинома (1) четвртог степена.

2.5. *КОНСТРУКЦИЈА НУЛА ПОЛИНОМА* (1) *И НУЛА ПОЛИНОМА* (1'). Геометријске особине полигона нула полинома (1), изражене ставовима 2.4 — 2.8, омогућују да се, са оноликом тачношћу са коликом је тачношћу могуће конструисати одговарајући правилан полигон, геометријским путем одреди положај свих нула полинома (1) и свих нула изводног полинома (1') кад је познат положај тачака у којима се налазе:

1° двије нуле z_ν и $z_{k+\nu}$ (k познато) и тежиште полинома (1);

2° двије симетрично распоређене нуле $\zeta_1^{(k)}$ и $\zeta_2^{(k)}$ (k познато) изводног полинома (1') и једна нула полинома (1);

3° двије симетрично распоређене нуле $\zeta_1^{(k)}$ и $\zeta_2^{(k)}$ изводног полинома (1') и средина једне дужи $b_{k\nu}$ (k познато).

Напомена: (i) Очигледно је да се мјесто нула изводног полинома (1') као полазни елементи за извођење конструкције у наведеним случајевима могу узети и нуле $\zeta''_{1,2}=\pm\sqrt{2uv:(n-1)}$ изводног полинома $(n-2)$-ог реда.

(ii) Конструкција остаје иста и онда, кад се све нуле полинома (1) налазе на једној правој.

У том случају су тачке $u_{0\nu}$ и $v_{0\nu}$, $\nu=1,2,\ldots,n$, респективно, симетрично распоређене у односу на праву (ζ_1', ζ_2') и све се налазе на једном истом кругу, који ту праву сијече у дијаметрално распоређеним тачкама $\zeta_1^{(1)}$ и $\zeta_2^{(1)}$.

Таква конструкција, за $n=3$, приказана је у [16, a; стр. 171].

При томе, без ограничења опћенитости, можемо узети да се реална оса поклапа са заједничком дужом осом елипса

$$(E_j) \equiv z = u_j e^{-\theta i} + v_j e^{-\theta i}, \quad j = 0, 1, 2,$$

или, друкчије речено, можемо увијек узети да је

$$p > 0$$

и да је, према томе,

$$u_j^m = \rho_{j1} e^{i\alpha_j}, \quad v_j^m = \rho_{j2} e^{-i\alpha_j}, \quad \rho_{jk} > 0, \quad \rho_{j1} \cdot \rho_{j2} = p^{2m}; \quad j = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2.$$

(ii) У вези са претходним можемо тврдити да су, изузев случајева

$$|u_0| + |v_0| > |u_1| + |v_1| \geqslant |u_2| + |v_2|,$$

$$|u_0| + |v_0| = |u_1| + |v_1| > |u_2| + |v_2|,$$

сви остали случајеви

$$1^0 \quad |u_1| + |v_1| > |u_2| + |v_2| > |u_0| + |v_0| \geqslant 2p,$$

$$2^0 \quad |u_1| + |v_1| > |u_2| + |v_2| = |u_0| + |v_0| \geqslant 2p,$$

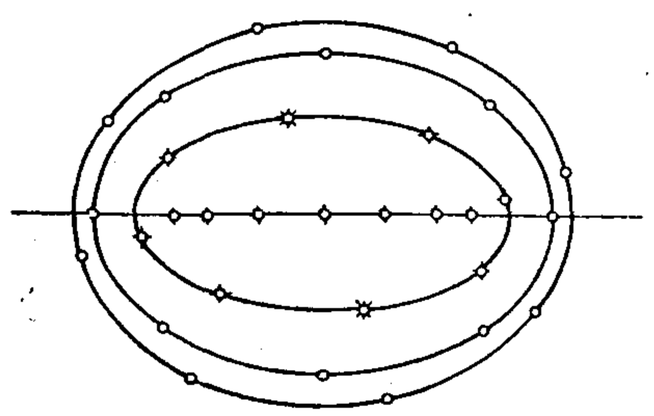
$$3^0 \quad |u_1| + |v_1| = |u_2| + |v_2| > |u_0| + |v_0| \geqslant 2p,$$

$$4^0 \quad |u_1| + |v_1| > |u_0| + |v_0| > |u_2| + |v_2| \geqslant 2p,$$

$$5^0 \quad |u_1| + |v_1| = |u_2| + |v_2| = |u_0| + |v_0| \geqslant 2p,$$

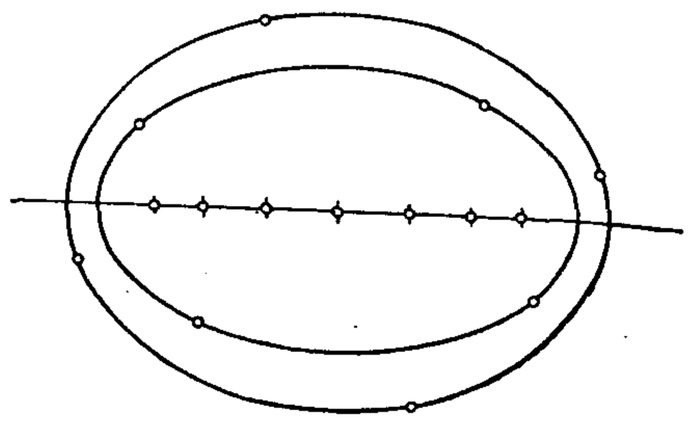
у међусобном распореду елипса E_0, E_1 и E_2 могући.

Случајеви $1^0, 2^0, 3^0$ и 4^0 приказани су сликама 3, 4, 5 и 6, респективно, на којима су нуле изводних полинома означене са $-\overset{|}{\underset{|}{\circ}}-$.



$m=8,\ p=1,\ q=-2i,\ r=47-4i\sqrt{51}$

Сл. 3a



$m=4,\ p=1,\ q=-1/2,\ r=\frac{17}{4}+5i\sqrt{2}$

Сл. 3b

У случају 5^0 су елипсе E_0, E_1 и E_2 подударне, а полином Q_{2m} има: a) m двоструких нула, кад је $|u_1| \neq |v_1|$; b) све нуле реалне, кад је $|u_1| = |v_1|$, тј. кад елипсе E_0, E_1 и E_2 дегенеришу у отсјечак $[-2p, 2p]$.

Доказ става 3.1. Из

$$Q_{km}=0, \quad Q'_{km}=0,$$

имамо

$$U_{m,1\lambda}+q=u_{1\lambda}^m+v_{1\lambda}^m+q=$$

$$=\sqrt[k]{-\frac{q_1}{2}+\sqrt{\frac{q_1^2}{4}-p_1^{2k}}\,e^{\frac{2\lambda\pi}{k}i}}+\sqrt[k]{-\frac{q_1}{2}-\sqrt{\frac{q_1^2}{4}-p_1^{2k}}\,e^{-\frac{2\lambda\pi}{k}i}}$$

$$u_{1\lambda}\cdot v_{1\lambda}=p^2, \quad \lambda=1,2,\ldots,k,$$

$$U_{m,0\lambda}+q=u_{0\lambda}^m+v_{0\lambda}^m+q=2p_1\cos\lambda\pi/k, \quad u_{0\lambda}\,v_{0\lambda}=p^2, \quad \lambda=1,2,\ldots,k-1,$$

$$U'_m=0.$$

Одатле је

$$(3,2)\qquad \begin{aligned} z_{1,\lambda\nu}&=u_{1\lambda}e^{\frac{2\nu\pi}{m}i}+v_{1\lambda}e^{-\frac{2\nu\pi}{m}i}, && \lambda=1,2,\ldots,k;\\ & && \nu=1,2,\ldots,m,\\ z_{0,\lambda\nu}&=u_{0\lambda}e^{\frac{2\nu\pi}{m}i}+v_{0\lambda}e^{-\frac{2\nu\pi}{m}i}, && \lambda=1,2,\ldots,k-1;\\ z_\lambda&=2p\cos\lambda\pi/m, && \lambda=1,2,\ldots,m-1. \end{aligned}$$

Релацијама (3,2) став 3.1 је доказан.

(iii) У извесним специјалним случајевима поједине од елипса $E_{1\lambda}$ и $E_{0\lambda}$ могу да буду и међусобно подударне, као што је то случај под (i), у коме су све елипсе $E_{1\lambda}$ подударне и у ком све елипсе $E_{0\lambda}$ дегенеришу у отсечак $[-2p, 2p]$.

Ради илустрације могућих случајева у међусобном распореду елипса $E_{1\lambda}$ и $E_{0\lambda}$ задржаћемо се кратко на полиномима

$$Q_{2m}=[U_m+q]^2-2p_1^2+q_1, \quad q\neq 0, \quad m=1\,2,3,\ldots$$

При томе ћемо елипсе на којима се налазе нуле полинома Q_{2m} означити са E_1 и E_2, а елипсу на којој се налазе нуле изводног полинома Q'_{2m} са E_0.

3.1.1. *О МЕЂУСОБНОМ РАСПОРЕДУ НУЛА ПОЛИНОМА* Q_{2m}.

(i) У овом случају релације (3,2) можемо написати у облику

$$\begin{aligned} z_{j\nu}&=u_je^{\frac{2\nu\pi}{m}i}+v_je^{-\frac{2\nu\pi}{m}i}, && j=0,1,2,\\ & && \nu=1,2,\ldots,m,\\ z_\lambda&=2p\cos\frac{\lambda\pi}{m}, && \lambda=1,2,\ldots,m-1. \end{aligned}$$

Како је $u_j\,v_j=p^2$, то је

$$|u_j|+|v_j|\geqq 2|p|,$$

одакле слиједи

$$\begin{aligned} |u_j|&\neq|v_j| \quad \text{за} \quad |u_j|+|v_j|>2|p|,\\ |u_j|&=|v_j| \quad \text{за} \quad |u_j|+|v_j|=2|p|, \end{aligned} \qquad j=0,1,2.$$

Доказ. Водећи рачуна о условима овог става и релацији $u_j v_j = p^2 > 0$ $(j=0, 1, 2)$, имамо

$$|u_2| = |u_1| = u, \quad |v_2| = |v_1| = v, \quad u + v > 2p,$$

$$u_1 = ue^{\alpha i}, \quad v_1 = ve^{-\alpha i} \quad u_2 = ue^{\beta i}, \quad v_2 = ve^{-\beta i},$$

$$\left.\begin{aligned} z_{1\nu} &= ue^{(\alpha+\frac{2\nu\pi}{m})i} + ve^{-(\alpha+\frac{2\nu\pi}{m})i}, \\ z_{2\nu} &= ue^{(\beta+\frac{2\nu\pi}{m})i} + ve^{-(\beta+\frac{2\nu\pi}{m})i}, \end{aligned}\right. \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m$$

$$e^{2m\alpha i} \neq e^{2m\beta i}, \quad \alpha - \beta = \delta \neq k\pi/m, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Претходне релације показују да су у овом случају све нуле полинома Q_{2m} међусобно различите и да се све налазе на једној истој елипси.

Другим речима речено, полигон нула овог полинома је перспективно-афина слика једног тетивног $2m$-угла. Шта више, из релација

$$\zeta_{1,\nu} = re^{(\alpha+\frac{2\nu\pi}{m})i}, \quad \zeta_{2,\nu} = re^{(\beta+\frac{2\nu\pi}{m})i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

којима су одређени врхови тога $2m$-угла, и релација

$$\left.\begin{aligned} \arg \zeta_{1,\nu} - \arg \zeta_{2,\nu} &= \alpha - \beta = \delta = \text{const.}, \\ \arg \zeta_{1,\nu} - \arg \zeta_{2,\nu-1} &= \delta + 2\pi/m = \text{const.}, \end{aligned}\right. \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

произлази, да је тај тетевни $2m$-угао полуправилан.

Овим је став 3.2 доказан.

3.2. *ДОКАЗИ СТАВОВА* 3.3 – 3.5.

3.2.1. За извођење доказа ових ставова потребни су нам помоћни ставови 3.1—3.5.

ЛЕМА 3.1 *Ако је*

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k U_{n-k} + A_n = \tag{3,3}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{n-k}{n-k-\lambda} \binom{n-k-\lambda}{\lambda} (-p^2)^\lambda z^{n-k-2\lambda} + A_n \equiv \sum_{k=0}^{n} B_k z^{n-k}, \quad \nu = \left[\frac{n-k}{2}\right],$$

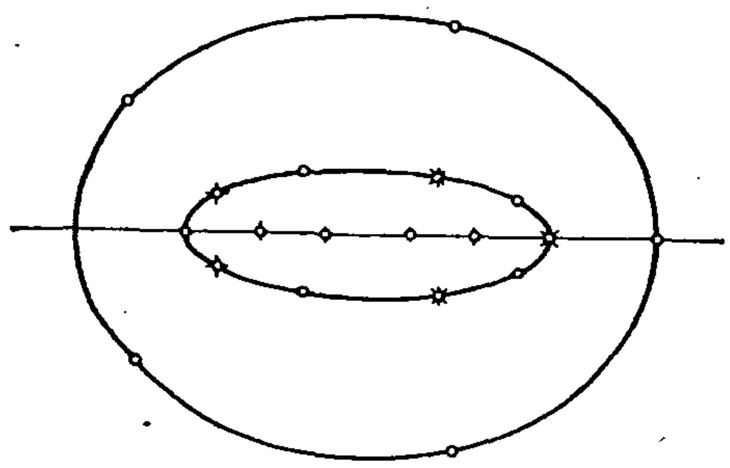
тада између коефицијената A_k и B_k постоје односи

$$1^\circ \ (3,4) \quad B_k = \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{n-k+2\lambda}{n-k+\lambda} \binom{n-k+\lambda}{\lambda} (-p^2)^\lambda A_{k-2\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$B_n = 2 \sum_{\lambda=1}^{t} (-p^2)^\lambda A_{n-2\lambda} + A_n, \quad s = [k/2], \quad t = [n/2];$$

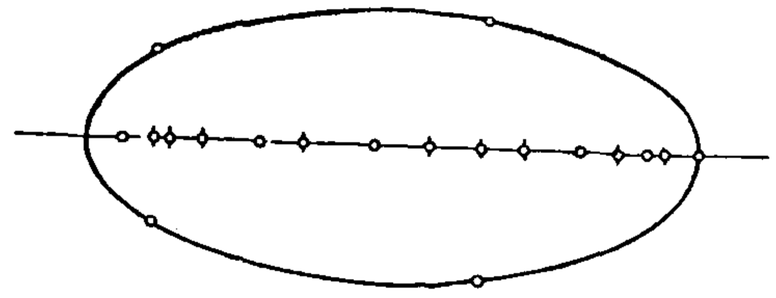
(iii) Доказаћемо да у вези са случајем под 3° вриједи

СТАВ 3.2. *Ако је* $p > 0$, $|u_2| = |u_1| \neq |v_1|$ *и* $u_2^{2m} \neq u_1^{2m}$, *полигони нула полинома* Q_{2m} *су перспективно-афине слике полуправилних* $2m$*-углова**.



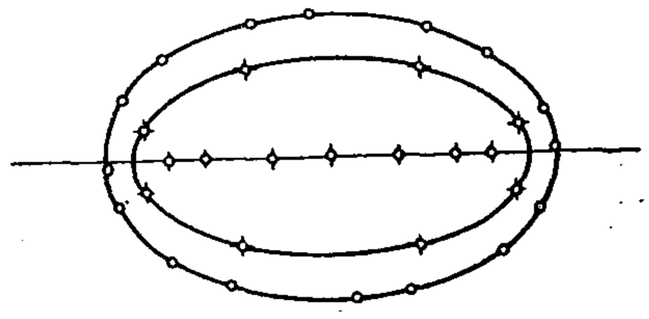
$m=5,\ p=2,\ q=-35,\ r=4q^2$

Сл. 4a



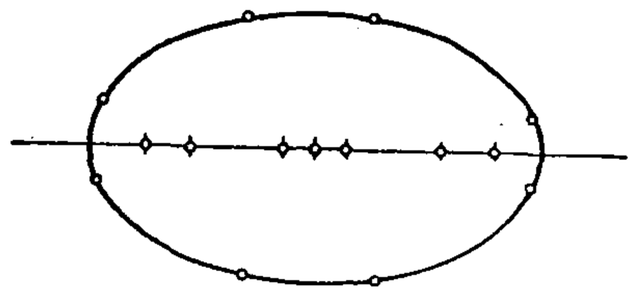
$m=5,\ p=1,\ q=-1\ \ r=4q^2$

Сл. 4b



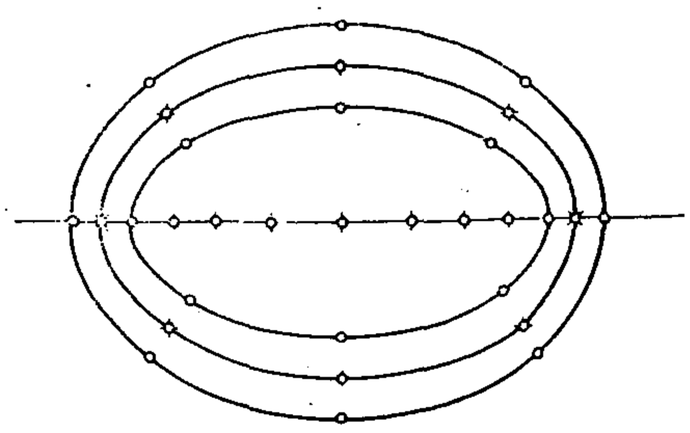
$m=8,\ p=1,\ q=-6,\ r=6$

Сл. 5a



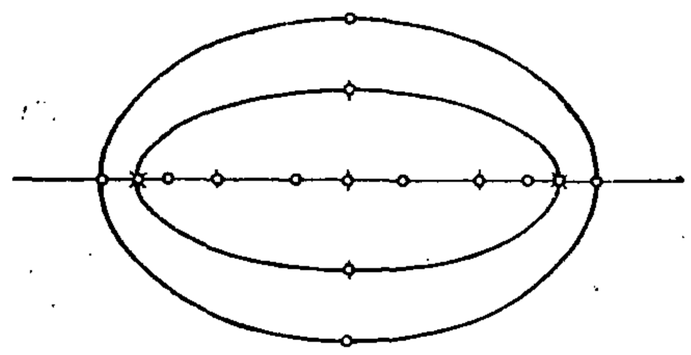
$m=4,\ p=1\ \ q=\frac{7}{2},\ r=\frac{36}{25}$

Сл. 5b



$m=8\ \ q=-4,\ p=r=1$

Сл. 6a



$m=4,\ q=-4,\ p=1,\ r=9.$

Сл. 6b

* Полуправилним полигоном називљемо полигон чији су сви унутрашњи углови међусобно једнаки и чије су сваке двије стране, што се надовезују на крајеве једне исте стране, међусобно једнаке и различите од стране на коју су надовезане.

2° (i) Водећи рачуна о лемми 2.2 и о релацијама (2,5) идентитет (3,3) можемо написати у облику

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k\,[u^{n-k}+(p^2\,u^{-1})^{n-k}]+A_n\equiv\sum_{k=0}^{n} B_k\,(u+p^2\,u^{-1})^{n-k}\,. \tag{3,7}$$

Послије развијања заграда на десној страни овог идентитета добијимо

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k\left\{\sum_{\lambda=0}^{h}\binom{n-k}{\lambda}p^{2\lambda}\,[u^{n-k-2\lambda}+(p^2\,u^{-1})^{n-k-2\lambda}]\right\}+\sum_{\lambda=0}^{t}\binom{2\lambda}{\lambda}p^{2\lambda}\,B_{n-2\lambda};$$

$$h=\left[\frac{n-1-k}{2}\right],\ t=[n/2]. \tag{3,7*}$$

Одатле је, очигледно,

$$A_0=B_0,\ \ A_n=\sum_{\lambda=0}^{t}\binom{2\lambda}{\lambda}p^{2\lambda}\,B_{n-2\lambda}\,.$$

Имајући даље и у овом случају у виду да су експоненти у угластим заградама уз коефицијент B_k или сви парни или сви непарни и групишући заједно све заграде са истим експонентом $n-k$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, респективно, налазимо да из сваког од збирова

$$\sum_{\lambda=0}^{j}\binom{n-(k-2\nu)}{\lambda}p^{2\lambda}\,B_{k-2\lambda}\,[u^{n-(k-2\nu)-2\lambda}+(p^2\,u^{-1})^{n-(k-2\nu)-2\lambda}]\,,$$

$$\nu=0, 1, 2, \ldots, [k/2],\quad j=[{}^1/_2\,(n-1-k+2\nu)]\,,$$

треба узети управо онај члан, код којег је $\nu=\lambda$. У вези с тим можемо писати

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k\,[u^{n-k}+(p^2\,u^{-1})^{n-k}]+A_n\equiv \tag{3,8}$$

$$\equiv\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\lambda=0}^{s}\binom{n-k+2\lambda}{\lambda}p^{2\lambda}\,B_{k-2\lambda}\,[u^{n-k}+(p^2\,u^{-1})^{n-k}]+\sum_{\lambda=0}^{t}\binom{2\lambda}{\lambda}p^{2\lambda}\,B_{n-2\lambda}$$

одакле онда слиједи (3,5).

(ii) Обрнуто, ако у идентитету (3,8), на десној страни, групишемо заједно све заграде уз које стоји исти коефицијент $B_{k'}$,

$$k-2\lambda=k',\quad k'=0, \ldots, n-1,$$

респективно,

$$k=k',\ k'+2, \ldots,\ k'+2\left[\frac{n-1-k'}{2}\right],\ \ \lambda=0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1-k'}{2}\right],$$

2° (3,5) $$A_k = \sum_{\lambda=0}^{s} \binom{n-k+2\lambda}{\lambda} p^{2\lambda} B_{k-2\lambda}, \quad k=0, 1, \ldots n,$$

и обрнуто.

Доказ. 1° (i) Имајући у виду да су експоненти потенција $z^{n-k-2\lambda}$ уз које стоји коефицијент A_k, или сви парни или сви непарни, сагласно разлици $n-k$, и групишући на лијевој страни идентитета (3,3) заједно све чланове са z^{n-k} ($k=0, 1, 2, \ldots, n$, респективно), налазимо да коефицијент B_k, поред коефицијента A_k, садржи још само коефицијенте $A_{k-2\nu}$, $\nu=1, 2, \ldots, [k/2]$, од којих се сваки налази уз одговарајући полином $U_{n-(k-2\nu)}$, односно уз онај члан

$$\frac{n-(k-2\nu)}{n-(k-2\nu)-\lambda} \binom{n-k+2\nu-\lambda}{\lambda} (-p^2)^\lambda z^{n-(k-2\nu)-2\lambda}$$

тога полинома, чији је експонент $n-(k-2\nu)-2\lambda=n-k$. Очигледно је то члан код којег је $\nu=\lambda$, па као последицу тога имамо (3,4).

(ii) Обрнуто, ако је

(3,6) $$\sum_{k=0}^{n} B_k z^{n-k} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{n-k+2\lambda}{n-k+\lambda} \binom{n-k+\lambda}{\lambda} (-p^2)^\lambda A_{k-2\lambda} z^{n-k} + \\ + 2 \sum_{\lambda=1}^{t} (-p^2)^\lambda A_{n-2\lambda} + A_n,$$

тада можемо писати

$$\sum_{k=0}^{n} B_k z^{n-k} \equiv \\ \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{n-(k-2\lambda)}{n-(k-2\lambda)-\lambda} \binom{n-(k-2\lambda)-\lambda}{\lambda} \cdot (-p^2)^\lambda A_{k-2\lambda} z^{n-(k-2\lambda)-2\lambda} \\ + 2 \sum_{\lambda=1}^{t} (-p^2)^\lambda A_{n-2\lambda} + A_n.$$

Групишући на десној страни овог идентитета заједно све чланове уз које стоји исти коефицијент A_k, тј. групишући све оне чланове за које је

$$k-2\lambda=k', \quad k'=0, 1, 2, \ldots, n,$$

тј.,

$$k=k', k'+2, \ldots, k'+2\left[\frac{n-k'}{2}\right], \quad \lambda=0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-k'}{2}\right],$$

и изостављајући цртицу у индексу k', добијамо лијеву страну идентитета (3,3).

одакле следи

$$C_{n+k}=(ab)^k A_{n-k}, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

и обрнуто.

У вези стим можемо писати

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k [u^{n-k}+(abu^{-1})^{n-k}]+A_n=u^{-n} \sum_{k=0}^{2n} C_k u^{2n-k}.$$

Обзиром на структуру коефицијената C_k (видјети, на пр. [20]; стр. 26), имамо даље

$$u^{-n} \sum_{k=0}^{2n} C_k u^{2n-k}=u^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu u^{n-\nu} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu u^{n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} a^\nu a_\nu u^{n-\nu} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} b^\nu a_{n-\nu} u^{-\nu}=a^n P_n(a^{-1} u) \cdot P_n(bu^{-1}).$$

Овим је лема 3.3 доказана.

ПОСЉЕДИЦА: *Свакој нули* $\zeta=\eta$ *полинома* $P_n(\zeta)$ *одговара једна и само једна нула* $z=\alpha\eta+\beta r^2\eta^{-1}$ *полинома* (7).

Наиме, из

$$Q_n(z, r, \alpha, \beta) = \alpha^n P_n(\alpha^{-1} u) \cdot P_n(\beta r^2 u^{-1}) = 0$$

имамо или

$$P_n(\alpha^{-1}[z/2 + \sqrt{z^2/4-\alpha\beta r^2}]) = 0,$$

или

$$P_n(\alpha^{-1}[z/2 - \sqrt{z^2/4-\alpha\beta r^2}]) = 0,$$

одакле је

$$\alpha^{-1}(z/2 \pm \sqrt{z^2/4-\alpha\beta r^2})=\eta,$$

тј.

$$z = \alpha\eta + \beta r^2 \eta^{-1}.$$

ЛЕМА 3.4. *Нека су* a *и* b *константе датог пресликавања*

$$z = a\zeta + b\zeta^{-1} \tag{3,10}$$

и нека је

$$z_0= a\eta + b\eta^{-1}$$

тачка, у којој се пресликавањем (3,10) *пресликала тачка* $\zeta=\eta$.

Постоји још једна и само једна точка $\zeta=b(a\eta)^{-1}$, *која се пресликавањем* (3,10) *пресликава у тачку* z_0.

Доказ. Из $z=z_0$ имамо

$$a\zeta + b\zeta^{-1} = a\eta + b\eta^{-1},$$

тј.

$$(\zeta-\eta)(a-b\zeta^{-1}\eta^{-1}) = 0.$$

Одатле је очигледно да су $\zeta=\eta$ и $\zeta=a^{-1}b\eta^{-1}$ једине тачке које се пресликавањем (3,10) пресликавају у тачку z_0.

и изоставимо цртицу у индексу k', добићемо да је десна страна (3,8) идентична са (3,7*) односно да је идентична са десном страном (3,7).

Овим је лема 3.1 у потпуности доказана.

ПОСЉЕДИЦА: *Полиноми* (7) *и* (8) *могу се написати у облику*

$$Q_n(z, r, \alpha, \beta) \equiv \sum_{k=0}^{n} B_k z^{n-k} \equiv \tag{7*}$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left[\left(\tfrac{1}{2} z + \sqrt{\tfrac{1}{4} z^2 - \alpha \beta r^2}\right)^{n-k} + \left(\tfrac{1}{2} z - \sqrt{\tfrac{1}{4} z^2 - \alpha \beta r^2}\right)^{n-k}\right] + A_n,$$

$$R_{2n}(z, r, \alpha, \beta) \equiv z^n \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k (\alpha z + \beta r^2 z^{-1})^{n-k}. \tag{8*}$$

$$(u = \alpha z,\ p^2 = \alpha \beta r^2)$$

ЛЕМА 3.2. *Ако је* $z_1 = \eta$ *нула полинома* (8) *тада је и* $z_2 = \alpha^{-1} \beta r^2 \eta^{-1}$ *такође нула тога полинома. При томе, сваком пару нула* z_1 *и* z_2 *полинома* (8) *одговара једна и само једна нула* $\zeta = \alpha \eta + \beta r^2 \eta^{-1}$ *полинома* $P_n(\zeta)$ *и обрнуто.*

Тврђење ове леме слиједи непосредно из (8*).

ЛЕМА 3.3. *Ако је*

$$P_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^{n-k},\ a_0 a_n \neq 0;\ A_k = \sum_{\nu=0}^{k} a^{k-\nu} b^{\nu} a_{k-\nu} a_{n-\nu}; k = 0, 1, \ldots, n,$$

тада је

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k \left[u^{n-k} + (a b u^{-1})^{n-k}\right] + A_n \equiv a^n P_n(a^{-1} u).\ P_n(b u^{-1}). \tag{3,9}$$

Доказ. Ставимо да је

$$a_0 = p_0,\ a_n = q_0,$$

$$a^{\nu} a_{\nu} = p_{\nu},\ b^{\nu} a_{n-\nu} = q_{\nu},\ p_{n+\nu} = q_{n+\nu} = 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

$$C_k = \sum_{\nu=0}^{k} q_{\nu} p_{k-\nu},\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2n.$$

Имаћемо

$$C_k = \sum_{\nu=0}^{k} b^{\nu} a_{n-\nu} a^{k-\nu} a_{k-\nu} = A_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$C_{n+k} = \sum_{\nu=0}^{n+k} q_{\nu} p_{n+k-\nu} = \sum_{\nu=k}^{n} q_{\nu} p_{n+k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-k} q_{k+\nu} p_{n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-k} b^{k+\nu} a_{n-k-\nu} a^{n-\nu} a_{n-\nu},$$

леме 3.5 круг $(C_1) \equiv (C_2)$ је једино геометријско место тачака које се у овом случају пресликава у отсјечак $[-r, r]$.

Другим ријечима речено, у овом случају се на отсјечак $[-r, r]$ пресликавају само и једино оне нуле полинома $P_n(\zeta)$, које се налазе на кругу $\zeta = re^{\theta i}$.

Овим је прво тврђење става 3.3 доказано.

Друго и треће тврђење тога става произлазе непосредно из посљедице 4 леме 3.4.

(ii) Доказ става 3.4. Као и у претходном случају, полином (7) има онолико нула на елипси (E), колико полином $P_n(\zeta)$ има укупно нула на круговима (C_1) и (C_2) и онолико нула на хиперболи (H), колико полином $P_n(\zeta)$ има укупно нула на правим линијама $\zeta = t$ и $\zeta = \beta r^2 (\alpha t)^{-1}$ $(-\infty < t < +\infty)$.

1° Према ставу 3.3, на кругу (C_1) се налази онолико нула полинома $P_n(\zeta)$, колико полином $Q_n(z, r, {}^1/_2, {}^1/_2)$ има реалних нула у интервалу $[-r, r]$.

Према том истом ставу, на кругу (C_2) се налази онолико нула полинома $P_n(\zeta)$, колико полином $Q_n(z, r\,|\beta/\alpha|, {}^1/_2, {}^1/_2)$ има реалних нула у интервалу $[-r\,|\beta/\alpha|, r\,|\beta/\alpha|]$.

Овим је прво тврђење става доказано.

2° Будући да је

$$P_n(\alpha^{-1}\beta r^2 t^{-1}) = (\alpha t)^{-n} \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k (\beta r^2)^{n-k} t^k = (\alpha t)^{-n} P_n(t),$$

то је очигледно да полином $P_n(\zeta)$ има онолико нула на правој $\zeta = \alpha^{-1}\beta r^2 t^{-1}$, колико полином $P_n(t)$ има реалних нула.

Овим је став 3.4 у цијелости доказан.

(iii) Доказ става 3.5. У случају кад су испуњени услови става све нуле полинома (7) се налазе на елипси (E), а нуле полинома $P_n(\zeta)$ се налазе или све на кругу (C_1) или све на кругу (C_2). Према леми 3.5, и у једном и у другом случају постоји афино пресликавање којим се полигон нула полинома $P_n(\zeta)$ пресликава у полигон нула полинома (7). Другим ријечима речено, у оба ова случаја је полином (7) афина слика полинома $P_n(\zeta)$, што је и требало доказати.

Напомена. (i) Полином $Q_n(z, r, {}^1/_2, {}^1/_2)$ који испуњава услове става 3.5 је ортогонална пројекција полинома $P_n(\zeta)$ на реалну осу.

(ii) Ако полином $P_n(\zeta)$ има све нуле реалне и распоређене у интервалу $[-r, r]$, тада полином $R_{2n}(z, r, {}^1/_2, {}^1/_2)$ има све нуле на кругу $\zeta = re^{\theta i}$.

У том случају је полином $P_{2n}(\zeta) = P_n^2(\zeta)$ ортогонална пројекција полинома $R_{2n}(z, r, {}^1/_2, {}^1/_2)$ на реалну осу.

ПОСЉЕДИЦА 1. *Ако тачке* ζ *припадају једном одређеном геометријском мјесту тачака* $\zeta=\eta$, *тада се то геометријско мјесто и геометријско мјесто тачака* $\zeta=a^{-1}b\eta^{-1}$ *пресликавањем* (3.10) *пресликавају на једно исто геометријско мјесто тачака*

$$z = a\eta + b\eta^{-1}. \tag{3,11}$$

Геометријска мјеста $\zeta=\eta$ и $\zeta=a^{-1}b\eta^{-1}$ су једина два геометријска мјеста која се пресликавањем (3,10) пресликавају на (3,11).

ПОСЉЕДИЦА 2. *Полином* (7) *има онолико нула на кривој линији* $z=\alpha\eta+\beta r^2\eta^{-1}$ *колико полином* $P_n(\zeta)$ *има укупно нула на кривим линнјама* $\zeta=\eta$ *и* $\zeta=\alpha^{-1}\beta r^2\eta^{-1}$.

ПОСЉЕДИЦА 3. *Сваки пар нула* ζ_1 *и* ζ_2 *полинома* $P_n(\zeta)$, *између којих постоји релација* $\zeta_1\zeta_2=\alpha^{-1}\beta r^2$, *пресликава се у једну двоструку нулу полинома* (7).

ПОСЉЕДИЦА 4. *Полином* $P_n(\zeta)$ *има онолико нула на кривој линији* $\zeta=\alpha\eta+\beta r^2\eta^{-1}$ *колико полином* (8) *има нула на кривој линији* $z=\eta$, *односно на кривој линији* $z=\alpha^{-1}\beta r^2\eta^{-1}$.

ЛЕМА 3.5. *Постоје два афина пресликавања од којих једно пресликава круг* $(C_1)\equiv\zeta=re^{\theta i}$ *а друго круг* $(C_2)\equiv\zeta=\alpha^{-1}\beta re^{-\theta i}$ *на једну исту елипсу.* $(E)\equiv z=\alpha re^{\theta i}+\beta re^{-\theta i}$, *на коју се оба та круга пресликавају пресликавањем* (3,10).

Доказ. Да се кругови (C_1) и (C_2) пресликавањем (3,10) пресликавају на елипсу (E) слиједи из посљедице 1 леме 3,4. Шта више, кругови (C_1) и (C_2) су једина геометријска мјеста која се пресликавањем (3,10) пресликавају на елипсу (E).

Круг (C_1) се пресликава на елипсу (E) и афиним пресликавањем чије су константе α и β, тј.

$$z=\alpha\zeta+\beta\bar{\zeta}=\alpha re^{\theta i}+\beta re^{-\theta i}.$$

На исту елипсу се круг (C_2) пресликава афиним пресликавањем чије су константе $\alpha_1=\alpha$ и $\beta_1=\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1}$, тј.

$$z=\alpha_1\zeta+\beta_1\bar{\zeta}=\alpha\cdot\alpha^{-1}\beta re^{-\theta i}+\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}^{-1}\cdot\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}re^{\theta i}=\alpha re^{\theta i}+\beta re^{-\theta i}.$$

Тиме је ова лема доказана.

ПОСЉЕДИЦА. *Пресликавањем* (3,10), *за* $\alpha=\beta$, *само и једино се тачке круга* $(C_1)\equiv(C_2)$ *пресликавају на отсјечак* $[-2\alpha r, 2\alpha r]$, *у који, у овом случају, дегенерише елипса* (E).

3.2.2. (i) Доказ става 3.3. На основу посљедице 2 леме 3.4, полином (7) има на елипси (E) онолико нула, колико полином $P_n(\zeta)$ има укупно нула на круговима (C_1) и (C_2).

За $\alpha=\beta={}^1/_2$ елипса (E) дегенерише у отсјечак $[-r, r]$, а кругови (C_1) и (C_2) постају међусобно подударни. Према посљедици

Ако параметру θ дамо неку одређену вриједност, на пример, $n\theta=\pi+\alpha$, израз (4,03) прелази у алгебарску једначину mn-тог степена по z

$$\sum_{k=0}^{\lambda} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}\left[-f_1(z)\,f_2(z)\right]^k [f_0(z)]^{n-2k}+f_1^n(z)\,e^{\alpha i}+f_2^n(z)\,e^{-\alpha i}=0$$

чији коефицијенти не зависе од θ.

Основна карактеристика полинома са лијеве стране знака једнакости

$$F_{mn}(z)=\sum_{k=0}^{\lambda} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}\left[-f_1(z)\,f_2(z)\right]^k [f_0(z)]^{n-2k}+ \tag{4,06}$$
$$+f_1^n(z)\,e^{\alpha i}+f_2^n(z)\,e^{-\alpha i}$$

је очигледно та, да су њихове нуле одређене релацијама

$$f_0(z)=f_1(z)\,e^{\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\nu+1}{n}\pi\right)}+f_2(z)\,e^{-\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\nu+1}{n}\pi\right)i} \tag{4,07}$$

и да, према томе, све нуле неког од тих полинома припадају једном истом геометријском мјесту, чија једначина има облик

$$f_0(z)=f_1(z)\,e^{\theta i}+f_2(z)\,e^{-\theta i}. \tag{4,08}$$

4.02. У овој глави говоримо о распореду нула (4.07) у случају кад су $f_j(z)$, $j=0, 1, 2$, полиноми првог степена по z, тј. говоримо о распореду нула

$$z_\nu=-\frac{q_0-q_1\,e^{\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\nu+1}{n}\pi\right)i}-q_2 e^{-\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\nu+1}{n}\pi\right)i}}{p_0-p_1\,e^{\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\nu+1}{n}\pi\right)i}-p_2 e^{-\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\nu+1}{n}\pi\right)i}},\quad \nu=1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

полинома

$$F_n(z, p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2, \alpha)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(p_1 z+q_1)^k (p_2 z+q_2)^k (p_0 z+q_0)^{n-2k}+$$
$$+(p_1 z+q_1)^n e^{\alpha i}+(p_2 z+q_2)^n e^{-\alpha i},\quad \lambda=[n/2],$$

чији су коефицијенти функције највише шест параметара p_j и q_j, $j=0, 1, 2$.

При томе ћемо се нешто детаљније задржати на неколико специјалних случајева полинома F_n, који одговарају посебним вриједностима паметара p_j и q_j, изабраним тако да се добије најуобичајенији облик једначине геометријског мјеста, којем припадају нуле тих полинома.

IV. О ПОЛИНОМИМА ЧИЈЕ НУЛЕ ИМАЈУ ИЗВЈЕСТАН ПРАВИЛАН РАСПОРЕД НА РАЗНИМ КОНУСНИМ ПРЕСЈЕЦИМА И НА НЕКИМ ДРУГИМ КРИВИМ ЛИНИЈАМА

4.0. Особине полинома (1), изражене лемама 2.1 и 2.2, као и остале особине и односи који из тога произлазе, само су специјалан случај односа везаних за идентитет

$$(4,0)\qquad \begin{aligned}&[{}^1/_2\,(u+v)+\sqrt{{}^1/_4\,(u+v)^2-uv}]^n+\\&\quad+[{}^1/_2\,(u+v)-\sqrt{{}^1/_4\,(u+v)^2-uv}]^n=u^n+v^n\end{aligned}$$

који има много општије значење од оног које је томе идентитету дато у вези са полиномима (1).

Наиме, нека су A_1 и A_2 два макаква алгебарска израза, чији је збир (идентички или условно) једнак A, тј. нека је

$$(4,01)\qquad A_1+A_2=A.$$

Тада је очигледно

$$A_1={}^1/_2\,A+\sqrt{{}^1/_4\,A^2-A_1A_2},\quad A_2={}^1/_2\,A-\sqrt{{}^1/_4\,A^2-A_1A_2}$$

и, према томе, увијек је

$$(4,02)\qquad ({}^1/_2\,A+\sqrt{{}^1/_4\,A^2-A_1A_3})^n+({}^1/_2\,A-\sqrt{{}^1/_4\,A^2-A_1A_2})^n=A_1^n+A_2^n.$$

Из (4,02) имамо онда

$$(4,03)\qquad \sum_{k=0}^{\lambda}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(-A_1A_2)^kA^{n-2k}=A_1^n+A_2^n,\ \lambda=[n/2].$$

Поред тога је

$$(4,04)\qquad (A_1+A_2)(A_1^m+A_2^m)\equiv A_1^{m+1}+A_2^{m+1}+A_1A_2(A_1^{m-1}+A_2^{m-1}),$$

па, кад ради краћег писања ставимо да је

$$A_1^m+A_2^m=U_m,\quad U_1=A,\quad m=0,1,2,\ldots$$

имамо рекурентну формулу

$$(4,05)\qquad U_{m+1}=AU_m-A_1A_2U_{m-1},\quad m=1,2,3,\ldots$$

У вези са (4,01) изрази (4,02), (4,03) и (4,05) претстављају, дакле, један исти идентитет, написан на три различита начина.

4.01. Претпоставимо сада да је

$$A=f_0(z),\quad A_1=f_1(z)\,e^{\theta l},\quad A_2=f_2(z)\,e^{-\theta l},$$

гдје су $f_j(z)$, $j=0,1,2$, полиноми m-тог степена по z, чији коефицијенти не зависе од параметра θ.

Ако услов (4,2) није испуњен, једначина (4,1) је једначина неке од уникурзалних кривих линија трећег или четвртог реда. Примјер: F_{10} $(z, 2, 0, 2, -5i, -2i, -i, 0)$, слика 7.

Дискусија о томе, коју од кривих линија у свим могућим случајевима преставља једначина (4,1), односно једначина

$$z = \frac{a_0 + 2a_1 t + a_2 t^2}{r_0 + 2r_1 t + r_2 t^2}, \tag{4,1*}$$

која се добија из (4,1) смјеном $\operatorname{tg} \theta/2 = t$, детаљно је извршена у [5, стр. 71—99] па је овде нећемо изводити у њеном најопштијем облику.

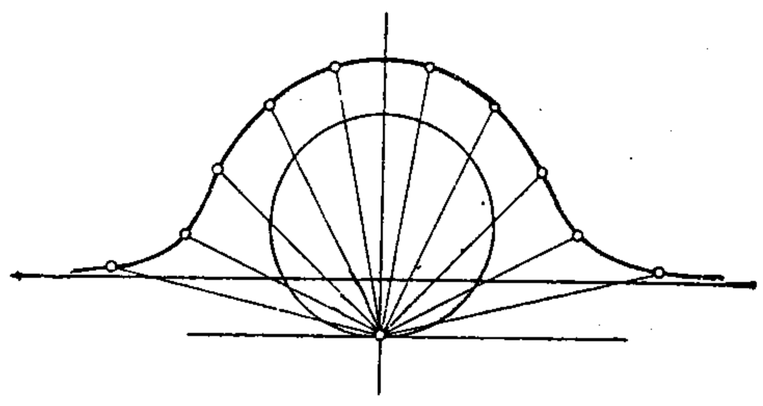
4.2. *НЕКИ СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ ПОЛИНОМА* F_n. Ради једноставнијег извођења дискусије у примјерима који ће слиједити, изузев два последња, претпостављамо да је $u > 0$, $v \geqq 0$, $k \gtrless 0$.

4.2.1. Полиноми $F_n(z, 1, k, k, o, u, v, \pi) = F_{n,1}(z, k, u, v)$. Нуле ових полинома

$$z_\nu = \frac{ue^{\frac{2\nu\pi}{n} i} + ve^{-\frac{2\nu\pi}{n} i}}{1 - 2k \cos \frac{2\nu\pi}{n}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

налазе се на конусном пресјеку

$$z = \frac{ue^{\theta i} + ve^{-\theta i}}{1 - 2k \cos \theta}. \tag{4,5*}$$



Сл. 7

За $v = 0$, једначина (4,5*) прелази у једначину

$$z = \frac{ue^{\theta i}}{1 - 2k \cos \theta}. \tag{4,5}$$

На основу тога можемо рећи:

1° Нуле полинома $F_{n,1}$ за $v = 0$, налазе се у пресјечним тачкама конусног пресјека (4,5) и правилног прамена зрака (S)*, чији се центар налази у једном од фокуса конусног пресјека (4,5).

---

* Коначан број (n) зрака, што припадају мноштву зрака једног прамена и од којих сваке двије узастопне зраке захваћају међу собом угао $\alpha = 2\pi/n$, $(\alpha = \pi/n)$, називљемо правилан прамен (правилан полупрамен) зрака.

Напомена: Ако су

$$f_j(z) = l_j z^4 + m_j z^3 + n_j z^2 + p_j z + q_j, \quad j = 0, 1, 2,$$

полиноми највише четвртог степена по z, тада је очигледно да су коефицијенти полинома (4,06) функције највише 15 параметара

$$l_j,\ m_j,\ n_j,\ p_j,\ q_j; \quad j = 0, 1, 2, \tag{4,09}$$

и да се све нуле ма ког од тих полинома могу алгебарски изразити помоћу онолико његових датих нула (подразумијевајући при том да је дата и вриједност ν која свакој од датих нула одговара у (4,07)), колико има неодређених односа параметара (4,09) према једном од њих.

У овом раду, међутим, неће бити неких детаљнијих разматрања у том смислу.

4.1. *ДОКАЗ СТАВА* 4.1. Из (9) закључујемо да нуле полинома F_n припадају геометријском мјесту чија је једначина

$$z = -\frac{q_0 - q_1 e^{\theta i} - q_2 e^{-\theta i}}{p_0 - p_1 e^{\theta i} - p_2 e^{-\theta i}}. \tag{4,1}$$

Ако је

$$p_0 \gtreqless 0, \quad p_2 = \overline{p}_1, \tag{4.2}$$

једначина (4,1) је једначина конусних пресјека. Ако је поред тога још $p_2 = \overline{p}_1 \neq 0$, једначина (4,1) је једначина конусних пресјека, који се добијају пројективним пресликавањем круга

$$\zeta = re^{\theta i}. \tag{4,3}$$

Заиста, у овом случају је $e^{\theta i} = \zeta/r$, $e^{-\theta i} = \overline{\zeta}/r$, па замјеном ових вриједности у (4,1) добијамо

$$z = -\frac{q_0 r - q_1 \zeta - q_2 \overline{\zeta}}{p_0 r - p_1 \zeta - \overline{p}_1 \overline{\zeta}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \overline{\zeta}}{\beta_0 + \beta_1 \zeta + \overline{\beta}_1 \overline{\zeta}}; \quad \beta_0 \gtreqless 0. \tag{4,4}$$

Релације (4,4) показују да су тачке (4,1) пројективне слике тачака (4,3), односно да су нуле (9) пројективне слике врхова

$$\zeta_\nu = re^{\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\nu+1}{n}\pi\right) i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

једног правилног n-угла.

Овим је став 4.1 доказан.

Напомена: Према томе да ли је $p_0^2 - 4p_1 p_2 \gtreqless 0$, једначина (4,1) је, респективно, једначина елипсе, параболе или хиперболе.

4.2.4. Полиноми $F_n(z, -2, 0, 2, 2u, u, u, n\pi) = F_{n,4}(z, u)$. Геометријско мјесто нула ових полинома је цисоида, чија је једначина

$$z = u\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}e^{\varphi i}, \quad (2\varphi = \theta). \tag{4,8}$$

И у овом случају се, дакле, нуле

$$z_\nu = u\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{\nu\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{\nu\pi}{n}\right)}e^{\left(\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{\nu\pi}{n}\right)i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

налазе у пресјечним тачкама геометријског мјеста којем припадају и једног правилног полупрамена зрака (чији се центар налази у координатном почетку).

4.2.5. Полиноми $F_n(z, 1, 0, -1, 0, u, u, n\pi) = F_{n,5}(z, u)$. Нуле ових полинома

$$z_\nu = u\frac{\cos\left(\frac{n+1}{n}\pi + \frac{2\nu\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{\nu\pi}{n}\right)}e^{\left(\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{\nu\pi}{n}\right)i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

налазе се у пресјечним тачкама строфоиде

$$z = u\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}e^{\varphi i}, \quad (2\varphi = \theta) \tag{4,9}$$

и истог полупрамена зрака као и у случају полинома $F_{n,4}$.

4.2.6. Полиноми $F_n(z, 1, k, 0, -k^n u, -ku, 0, \pi) = F_{n,6}(z, k, u)$; $k \neq 1$. (i) Ови полиноми се могу написати у облику

$$F_{n,6} = \sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}(k^{\lambda n} - k^n)u^\lambda z^{n-\lambda}.$$

Њихове нуле

$$z_\nu = \frac{k^n u - kue^{\frac{2\nu\pi}{n}i}}{1 - ke^{\frac{2\nu\pi}{n}i}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

2° Нуле полинома $F_{n,1}$, у општем случају, налазе се у пресјечним тачкама конусног пресјека (4,5*) и прамена зрака (S^*), који се добију афиним пресликавањем конусног пресјека (4,5) и правилног прамена (S).

4.2.2. Полиноми $F_n(z, 0, 1, 1, 2u, -v, v, [n/2]\pi) = F_{n,2}(z, u, v)$.

Нуле

$$z_\nu = \frac{u}{\cos\left(\frac{2\nu+1}{n}\pi + \left[\frac{n}{2}\right]\frac{\pi}{n}\right)} + iv\operatorname{tg}\left(\frac{2\nu+1}{n}\pi + \left[\frac{n}{2}\right]\frac{\pi}{n}\right),$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n,$$

ових полинома налазе се на хиперболи

$$z = \frac{u}{\cos\theta} + iv\operatorname{tg}\theta. \tag{4,6}$$

Како последњи израз можемо написати у облику

$$z = -u + 2\cos\frac{\theta}{2}\cos^{-1}\theta\left(\frac{u+v}{2}e^{i\theta/2} + \frac{u-v}{2}e^{-i\theta/2}\right)$$

то можемо рећи:

Нуле полинома $F_{n,2}$ налазе се на пресјеку хиперболе (4,6) и афино пресликаног правилног полупрамена зрака, чији се центар налази у тачки $z_0 = -u$.

При томе, због фактора $\cos\theta/2\cos^{-1}\theta$, зраке у другој и четвртој четвртини полупрамена треба узети у супротном смјеру.

4.2.3. Полиноми $F_n(z, 2, 1, 1, -4u, 4u, 0, 0) = F_{n,3}(z, u)$. Нуле ових полинома

$$z_\nu = \frac{2u\cos\frac{2\nu+1}{2n}\pi}{\sin^2\frac{2\nu+1}{2n}\pi}\, e^{\frac{2\nu+1}{2n}\pi i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

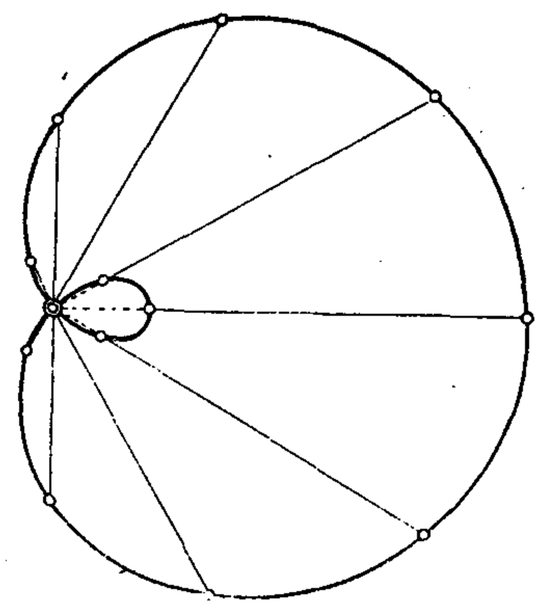
налазе се у пресјечним тачкама параболе

$$z = 2u\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}e^{\varphi i}, \quad (2\varphi = \theta) \tag{4,7}$$

и правилног полупрамена зрака, чији се центар налази у тјемену те параболе.

Том смјеном нуле (4,11*) прелазе у нуле полинома $F_{n,7}$

(4,11) $$z = ue^{\frac{4\nu\pi}{n}i} + ve^{\frac{2\nu\pi}{n}i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$



Сл. 9

а једначина (4,12) у једначину

(4,13) $$z = ue^{2\theta i} + ve^{\theta i}$$

Можемо, дакле, рећи да је геометријско мјесто нула (4,11) кружна циклоида (4,13) (слика 9).

4.2.7.1. *НЕКЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСОБИНЕ ПОЛИГОНА НУЛА ПОЛИНОМА $F_{n,7}$*

Познате геометријске особине кривих линија (4,12), односно (4,13), омогућују врло једноставну конструкцију нула полинома $F_{n,7}$.

Те особине су углавном садржане у ставу 4.2.

Поред њих, ставом 4.3 су изражене неке мање познате особине, везане за полигоне нула полинома $F_{n,7}$.

(i) Можемо увијек узети да је

(4,14) $$u = kve^{\alpha i}, \quad k > 0.$$

У вези с тим вриједи

СТАВ 4.2. 1° *Нуле полинома $F_{n,7}$ налазе се у пресјечним тачкама криве* (4,13) *и правилног прамена зрака*

(4,15) $$\zeta^{(\nu)} = -ue^{-2\alpha i} + tve^{\frac{2\nu\pi}{n}i}, \quad t \gtreqless 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

2° *Нула z_ν полинома $F_{n,7}$ налази се на пресјеку зраке $\zeta^{(\nu)}$ прамена* (4,15) *и тангенте T_ν повучене на круг $\zeta = ue^{-2\alpha i} + ve^{\theta i}$ у тачки*

$$\xi_\nu = ue^{-2\alpha i} + ve^{\frac{2\nu\pi}{n}i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

респективно.

3° *Нула z_ν полинома $F_{n,7}$ симетрична је тачки $z_0 = -ue^{-2\alpha i}$ у односу на тангенту b_ν, повучену на круг $\zeta = {}^1/_2\, ve^{\theta i}$ у тачки*

$$\xi^{(\nu)} = {}^1/_2\, ve^{\frac{2\nu\pi}{n}i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

респективно.

Доказ. Водећи рачуна о (4,11) и (4,14) имамо

$$z_\nu + ue^{-2\alpha i} = \left[1 + 2k\cos\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right)\right] ve^{\frac{2\nu\pi}{n}i},$$

налазе се у пресјечним тачкама Аполонијевог круга

(4,10) $$z=\frac{v-kue^{\theta i}}{1-ke^{\theta i}}$$

и прамена кругова што пролазе кроз тачке u и $v=k^n u$.

(ii) Изводни полиноми полинома $F_{n,6}$ припадају такође класи $F_{r,6}$. Наиме, из

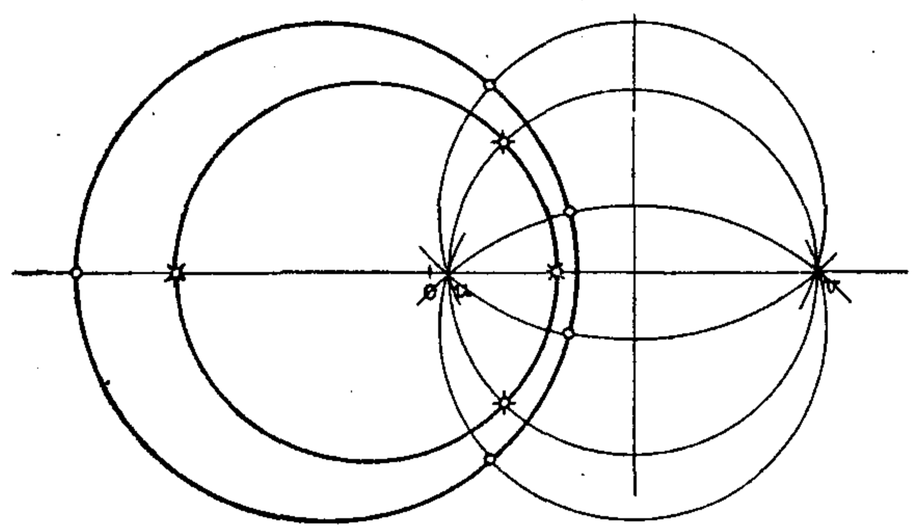
$$F_{n,6}'=\sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda(n-\lambda)\binom{n}{\lambda}(k^{\lambda n}-k^n)\,u^\lambda z^{n-1-\lambda}=$$

$$=n\cdot\sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda\binom{n-1}{\lambda}\left(k^{\frac{n(n-1)\lambda}{n-1}}-k^{\frac{n(n-1)}{n-1}}\right)u^\lambda z^{n-1-\lambda}$$

слиједи

$$\frac{1}{n}F_{n,6}'(z,k,u)=F_{n-1,6}\left(z,k^{\frac{n}{n-1}},u\right).$$

(Примјер: $F_{5,6}(z,2,1)$; слика 8).



Сл. 8

4.2.7 *ПОЛИНОМИ* $F_n(z,0,0,1,v,-u,0,\pi)=-F_{n,7}(z,u,v)$. Полиноми

$$F_{n,7}=z^n-\sum_{k=0}^{\lambda}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}u^k v^{n-2k}z^k+(-u)^n,\quad \lambda=[n/2],$$

су уствари полиноми $F_{n,7}^*=-F_n(z,0,0,1,v,-u,-u,\pi)$ чије нуле

(4,11*) $$z_\nu=\left(v+2u\cos\frac{2\nu\pi}{n}\right)e^{\frac{2\nu\pi}{n}i},\quad \nu=1,2,\ldots,n,$$

леже на Паскаловом пужу

(4,12) $$z=(v+2u\cos\theta)\,e^{\theta i}.$$

Наиме, смјеном $z=Z+u$ полиноми $F_{n,7}^*$ прелазе у полиноме $F_{n,7}$.

Аналогно томе је

$$B_\nu = \frac{1}{2}(\zeta_{\nu+1}+\zeta_\nu) + \frac{i}{2}(\zeta_{\nu+1}-\zeta_\nu)\, ctg\, \frac{\pi}{n} =$$

$$= \frac{i}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\zeta_{\nu+1}e^{-\frac{\pi}{n}i} - \zeta_\nu e^{\frac{\pi}{n}i}\right) =$$

$$= -\alpha u e^{\frac{2\nu+1}{m}\pi i} + \beta\bar{u}\left(1+2\cos\frac{\pi}{m}\right)e^{-\frac{2\nu+1}{m}\pi i} + 2\beta\bar{v}\cos\frac{\pi}{2m}\, e^{-\frac{2\nu+1}{2m}\pi i},$$

$$B_{m+\nu} = -\alpha u e^{\frac{2\nu+1}{m}\pi i} + \beta\bar{u}\left(1+2\cos\frac{\pi}{m}\right)e^{-\frac{2\nu+1}{m}\pi i} - 2\beta\bar{v}\cos\frac{\pi}{2m}\, e^{-\frac{2\nu+1}{2m}\pi i},$$

одакле слиједи

$$b_\nu = B_\nu - B_{m+\nu} = 4\beta\bar{v}\cos\frac{\pi}{2m}\, e^{-\frac{2\nu+1}{2m}\pi i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

што је и требало доказати.

(iii) Обзиром на то да постоји афино пресликавање, које дати четвероугао $ABCD$ пресликава у четвероугао $A'B'C'D'$, тако да средине страна четвороугла $A'B'C'D'$ образују квадрат и да постоји афино пресликавање које дати троугао ABC пресликава у истокрачан правоугли троугао $A'B'C'$ са правим углом у врху изабраном по вољи, можемо тврдити:

1° Сваки четвероугао је или полигон нула или афина слика полигона нула неког полинома $F_{4,7}$.

2° Сваки троугао, чији један врх (изабран по вољи) сматрамо двоструком тачком, је или полигон нула или афина слика полигона нула неког полинома $F_{4,7}$, који има једну двоструку нулу.

ПОСЉЕДИЦА 1. *Ако над сваком страном ма ког четвероугла конструишемо извана (изнутра) квадрат, тада су дужи које спајају центре два и два квадрата, конструисана над супротним странама четвероугла, једнаке и међусобно нормалне.*

ПОСЉЕДИЦА 2. *Ако над сваком страном ма ког троугла конструишемо извана (изнутра) квадрат, тада је дуж која спаја један врх троугла са центром квадрата конструисаног над супротном страном троугла једнака дужи која спаја центре два друга квадрата и нормална је на ту дуж.*

Посљедице 1 и 2 вриједе и онда, кад се „врхови“ A, B, C и D налазе на једној правој.

Напомена: Из претходног произлази да је и други дио Bellati-јевог теорема [18] само специјалан случај једне особине, коју имају сви полигони нула полинома $F_{2m,7}$, као и афине слике тих полигона.

$$z_\nu - ue^{-2\alpha i} = ve^{\frac{2\nu\pi}{n} i} + 2ki\,ve^{\frac{2\nu\pi}{n} i} \sin\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right),$$

одакле слиједи

1° $$z_\nu = -ue^{-2\alpha i} + \left[1 + 2k\cos\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right)\right] ve^{\frac{2\nu\pi}{n} i};$$

2° $$z_\nu = ue^{-2\alpha i} + ve^{\frac{2\nu\pi}{n} i} + 2ki\,ve^{\frac{2\nu\pi}{n} i} \sin\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right);$$

3° $$\begin{cases} z_\nu = \left[\frac{1}{2} + ki\sin\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}\left[1 + 2k\cos\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right)\right]\right] ve^{\frac{2\nu\pi}{n} i}; \\ -ue^{-2\alpha i} = \left[\frac{1}{2} + ki\sin\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right) - \frac{1}{2}\left[1 + 2k\cos\left(\alpha + \frac{2\nu\pi}{n}\right)\right]\right] ve^{\frac{2\nu\pi}{n} i}; \end{cases}$$

што је требало доказати.

Напомена: У вези са тврђењем 3° овог става видјети такођер [8b, стр. 140].

(ii) Доказ става 4.3.

Нека су $\zeta_\nu = \alpha z_\nu + \beta \bar{z}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, тачке у које се нуле (4,11) пресликавају афиним пресликавањем чије су константе α и β; нека су, даље, $s_\nu = \zeta_{\nu+1} - \zeta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2m$; $\zeta_{2m+1} = \zeta_1$, стране афино пресликаног полигона нула полинома $F_{2m,7}$ и нека је A_ν (B_ν), центар правилног $2m$ - угла, конструисаног извана (изнутра) над страном s_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, респективно.

Тада имамо:

$$A_\nu = \frac{1}{2}(\zeta_{\nu+1} + \zeta_\nu) - \frac{i}{2}(\zeta_{\nu+1} - \zeta_\nu)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} =$$

$$= -\frac{i}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\zeta_{\nu+1} e^{\frac{\pi}{n} i} - \zeta_\nu e^{-\frac{\pi}{n} i}\right) =$$

$$= \alpha u\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{m}\right) e^{\frac{2\nu+1}{m}\pi i} + 2\alpha v\cos\frac{\pi}{2m} e^{\frac{2\nu+1}{2m}\pi i} - \beta\bar{u}e^{-\frac{2\nu+1}{m}\pi i},$$

$$A_{m+\nu} = \alpha u\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{m}\right) e^{\frac{2\nu+1}{m}\pi i} - 2\alpha v\cos\frac{\pi}{2m} e^{\frac{2\nu+1}{2m}\pi i} - \beta\bar{u}e^{-\frac{2\nu+1}{m}\pi i},$$

одакле слиједи

$$a_\nu = A_\nu - A_{m+\nu} = 4\alpha v\cos\frac{\pi}{2m} e^{\frac{2\nu+1}{2m}\pi i}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

из (5,03) имамо

$$(5,05)\ \sum(-1)^{\lambda+\nu}\frac{m(m-\lambda-2\nu-1)!}{\lambda!\,\nu!\,(m-2\lambda-3\nu)!}\,b_2^{\lambda}\,b_3^{\nu}\,z^{m-2\lambda-3\nu}=u^m+v^m+w^m=\sigma_m$$

$$(5,06)\ \sum\frac{m(m-\lambda-2\nu-1)!}{\lambda!\,\nu!\,(m-2\lambda-3\nu)!}\,b_2^{m-2\lambda-3\nu}\,b_3^{\lambda+2\nu}\,z^{\lambda}=u^mv^m+u^mw^m+v^mw^m=q_m$$

Елиминацијом b_2 из (5,05) и (5,06) добија се полином по z, чији се сви коефицијенти могу изразити помоћу b_3, σ_m и q_m, односно полином, чији су сви остали коефицијенти функције коефицијената a_3, a_m и a_{2m}.

У овом случају се израчунавање величина u^m, v^m и w^m своди на рјешавање једне кубне једначине.

5.02. До претходних и њима сличних полинома, како за $k=3$ тако и за $k=4$, може се доћи и примјеном идентитета (4,04).

У овој глави показујемо како се примјеном идентитета (4,04) на случај $k=3$ долази до полинома $P_{m^2}(z)$, чији су сви коефицијенти цијеле функције коефицијената a_3, a_m и a_{2m} и чије се све нуле могу алгебарски изразити помоћу тих коефицијената.

5.1. Нека је дат полином

$$(5,1)\qquad P_{m^2}(z)=$$

$$\prod_{\lambda=1}^{m}\left[\sum_{k=0}^{s}\frac{m}{m-k}\binom{m-k}{k}\left(-vwe^{-\frac{2\lambda\pi}{m}i}\right)^k\left(z-ue^{\frac{2\lambda\pi}{m}i}\right)^{m-2k}-(v^m+w^m)\right],$$

$$m=1,2,3,\ldots;\quad s=[m/2].$$

(i) На основу (4,06) и (4,07), из $P_{m^2}(z)=0$, имамо

$$\left(z-ue^{\frac{2\lambda\pi}{m}i}\right)_{\nu}=ve^{\frac{2\nu\pi}{m}i}+we^{-\frac{2\lambda\pi}{m}i}\cdot e^{-\frac{2\nu\pi}{m}i},$$

па су нуле полинома (5,1) очигледно дате релацијама

$$(5,2)\qquad z_{\lambda,\nu}=ue^{\frac{2\lambda\pi}{m}i}+ve^{\frac{2\nu\pi}{m}i}+we^{-2(\lambda+\nu)\frac{\pi}{m}i},\quad \lambda,\nu=1,2,\ldots,m.$$

(ii) Уочимо у идентитету (видјети, на примјер, [13; стр. 53])

$$\left(ue^{\frac{2\lambda\pi}{m}i}+ve^{\frac{2\nu\pi}{m}i}+we^{-2(\lambda+\nu)\frac{\pi}{m}i}\right)^k=\sum k!\,\frac{u^{p_1}v^{p_2}w^{p_3}}{p_1!\,p_2!\,p_3!}\,e^{2[(p_1-p_3)\lambda+(p_2-p_3)\nu]\frac{\pi}{m}i},$$

$$p_1+p_2+p_3=k,$$

одређене вриједности експонената p_1, p_2 и p_3

$$p_1=k'+k_1,\ p_2=k''+k_1,\ p_3=k_1$$

V. О ПОЛИНОМИМА $P_{m^2}(z)$

5.0. Идентитет (4,04) и рекурентна формула (4,05) су само специјалан случај ($k=2$), идентитета

$$\sum_{j=1}^{k} u_j \cdot \sum_{j=1}^{k} u_j^{n-1} \equiv \tag{5,01}$$
$$\equiv \sum_{j=1}^{k} u_j^n + \sum u_1 u_2 \cdot \sum_{j=1}^{k} u_j^{n-2} - \sum u_1 u_2 u_3 \cdot \sum_{j=1}^{k} u_j^{n-3} + \cdots$$

односно, рекурентне формуле

$$U_n(u) = u\, U_{n-1}(u) - \sum_{j=1}^{k} p_j\, U_{n-j}(u); \quad k=2, 3, 4, \ldots$$
$$U_0 = k, \; U_1 = u, \; U_2 = u^2 - 2p_2; \tag{5,02}$$
$$U_\lambda = u\, U_{\lambda-1} - \sum_{j=2}^{\lambda-1} p_j\, U_{\lambda-j} - \lambda\, p_\lambda; \quad \lambda = 3, 4, \ldots, k-1$$

која се добије из (5,01), кад ставимо да је

$$\sum_{j=1}^{k} U_j^m = U_m(u); \quad \sum u_1 u_2 \ldots u_\lambda = (-1)^\lambda p_\lambda; \quad -p_1 = u;$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad \lambda = 1, 2, \ldots, k$$

и која је очигледно идентична са Newton-овом формулом за збир m-тих потенција корије́на једне алгебарске једначине k-тог степена

$$\sum_{j=0}^{k} p_j\, u^{k-j} = 0; \quad p_0 = 1, \; U_m = s_m; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Други облик овог идентитета је Waring-ова формула

$$S_k = k \sum (-1)^{k_1+k_2+\ldots k_j} \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_j-1)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_j!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_j^{k_j}. \tag{5,03}$$

(У трећем облику, који је аналоган облику (4,02), идентитет (5,01) се може написати још само за $k=3$ и $k=4$, док за $k>4$ то више није могуће.)

5.0.1. Постоји могућност да се, и у неким случајевима $k>2$, примјеном идентитета (5,01), односно (5,03), формирају полиноми чије нуле имају облик

$$z_\nu = \sum_{j=1}^{k} u_j\, e^{\frac{2\nu j \pi}{m} i} \tag{5,04}$$

при чему се u_j, $j=1, 2, \ldots, k$, могу алгебарски изразити помоћу коефицијената тих полинома.

Тако, на примјер, за $k=3$, стављајући једном

$$u_1 = u, \; u_2 = v, \; u_3 = w, \; u+v+w = z, \; uv+uw+vw = b_2 \; uvw = -b_3,$$

а други пут

$$u_1 = uv, \; u_2 = uw, \; u_3 = vw \; \therefore \; u_1+u_2+u_3 = b_2, \; \Sigma u_1 u_2 = -b_3 z, \; u_1 u_2 u_3 = b_3^2,$$

(iv) Како се (5,5) за сваку вриједност k_2 и k_3 може изразити помоћу симетричних функција

$$u^m + v^m + w^m = \sigma_m\,, \quad u^m v^m + u^m w^m + v^m w^w = q_m\,, \quad u^m v^m w^m = a^m\,,$$

то се, водећи рачуна о релацији [17, стр. 460]

$$a_j = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_j}\, S_1^{\lambda_1} S_2^{\lambda_2} \cdots S_j^{\lambda_j}}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} 3^{\lambda_3} \ldots j^{\lambda_j}\, \lambda_1!\, \lambda_2! \ldots \lambda_j!}\,, \tag{5,7}$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + j\lambda_j = j\,,$$

сви коефицијенти полинома (5,1) очигледно могу изразити помоћу тих истих симетричних функција.

(v) Из релација (5,6) и (5,7) имамо

$$s_3 = 6m^2 uvw, \quad a_3 = -2m^2 uvw = q \quad \text{за} \quad m \neq 3,$$

и

$$s_m = m^2 \sigma_m + m^2 \varepsilon \frac{m!}{(l)^3} (uvw)^l, \quad -m\sigma_m = a_m - \varepsilon n_1(l)(uvw)^l = p,$$

$$s_{2m} = m^2 \sigma_{2m} + m^2 \binom{2m}{m} q_m + \varepsilon m^2 (2m)!\,(uvw)^l \left[\frac{\sigma_m}{(l!)^2 (4l)!} + \frac{(uvw)^l}{[(2l)!]^3}\right]$$

$$\binom{m}{2} \sigma_m^2 + \left[m - \frac{m}{2}\binom{2m}{m}\right] q_m = a_{2m} - \varepsilon (uvw)^l \left[n_2(l)\sigma_m + n_3(l)(uvw)^l\right] = r$$

гдје је

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad m = 3l\,, \\ 0 & \text{за} \quad m \neq 3l\,. \end{cases}$$

Одатле је

$$u^m v^m + u_m w^m + v^m w^m = \frac{r - \dfrac{m-1}{2m} p^2}{m - \dfrac{m}{2}\dbinom{2m}{m}}\,, \tag{5,8}$$

$$u^m + v^m + w^m = -\frac{p}{m}\,, \quad uvw = -\frac{q}{2m^2}\,,$$

што је и требало доказати.

Напомена: за $m=2$, релације (5,2) и (5,8) дају нуле полинома

$$P_4(z) = z^4 + pz^2 + qz + r\,.$$

за које је

$$(5,3)\qquad k!\,\frac{u^{p_r}\,v^{p_s}\,w^{p_t}}{p_1!\,p_2!\,p_3!}=a_{rst};$$

r	1	1	2	2	3	3
s	2	3	3	1	1	2
t	3	2	1	3	2	1

и формирајмо збир

$$S\,(p_r, p_s, p_t)=\sum_{\lambda=1}^{m}\ \sum_{\nu=1}^{m} a_{rst}\ \ e^{2[(p_r-p_t)\lambda+(p_s-p_t)\nu]\frac{\pi}{m}i}\,.$$

Биће

$$S\,(p_r, p_s, p_t)=a_{rst}\sum_{\lambda=1}^{m} e^{2(p_r-p_t)\frac{\lambda\pi}{m}i}\cdot\sum_{\nu=1}^{m} e^{2(p_s-p_t)\frac{\nu\pi}{m}i}=$$

$$=a_{rst}\,\frac{e^{2(p_r-p_t)\pi i}-1}{e^{2(p_r-p_t)\frac{\pi}{m}i}-1}\cdot\frac{e^{2(p_s-p_t)\pi i}-1}{e^{2(p_s-p_t)\frac{\pi}{m}i}-1}\,.$$

одакле слиједи

$$(5,4)\qquad S\,(p_r, p_s, p_t)=\begin{cases}0 & \text{за}\quad k'\neq mk_2\ \text{или}\ k''\neq mk_3\,;\\ m^2\,a_{rst} & \text{за}\quad k'=mk_2,\quad k''=mk_3\,.\end{cases},$$

(iii) Ако ради краћег писања ставимо даље да је

$$(5,5)\qquad \begin{aligned}&u^{mk_2}v^{mk_3}+u^{mk_2}w^{mk_3}+u^{mk_3}v^{mk_2}+u^{mk_3}w^{mk_2}+v^{mk_2}w^{mk_3}+v^{mk_3}w^{mk_2}=\\&=\sum u^{mk_2}v^{mk_3}\,,\end{aligned}$$

тада ћемо, у вези са (5,3) и (5,4), имати

$$S_k=\sum_{1}^{m^2} z^k_{\lambda,\nu}=m^2\sum a_{rst}=m^2k!\sum(uvw)^{k_1}\sum\frac{u^{mk_2}v^{mk_3}}{k_1!\,(k_1+mk_2)!\,(k_1+mk_3)!}\,,$$

$$(5,6)\qquad 3\,k_1+mk_2+mk_3=k,$$

$$S_k=0\quad\text{за}\quad k\neq 3k_1+mk_2+mk_3.$$

При томе, због структуре израза (5,5), од вриједности

$$k_2=\alpha,\ k_3=\beta\ \text{и}\ k_2=\beta,\ k_3=\alpha$$

треба узети само први пар.

$$u_2 v_2 = w_1 W_1 = w W = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

могу алгебарски изразити помоћу коефицијената a_2, a_4, a_m и a_{2m} тих полинома.

(ii) Интересантно је упоредити релације (*) са релацијама [7; стр. 116 и стр. 123] и извући закључке који се тим упоређењем неопходно намећу.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер, Н. И. — Лекции по теории аппроксимации, Москва—Лењинград, 1947.

[2] Anghelutza, Th. — Sur le nombre des racines d'une équation algébrique, dont les parties imaginaires sont positives, *Bull. Sci. Math.* (2), **74** (1950), 130 – 138.

[3] Bauer, G. — Verlesungen über Algebra, 2. Aufl., Leipzig—Berlin, 1910.

[4] Билимович, А. – Элементарное построение Штеинерового еллипса. *Известия Киевского Универзитета „Св. Владимира"*, **43** (1903).

[5] Deaux, R. — Introduction à la Géométrie des nombres complexes, Bruxelles, 1947.

[6] Dieudonné, J. — La théorie analytique des polynômes d'une variable, *Mémorial Sci. Math.*, **XCIII**, Paris 1938.

[7] Dolbnia, J. — Oeuvres mathématiques de —, Paris, 1913

[8] Karamata, J. – a) Sur la limite inférieure des modules des zéros des fonetions analytiques, *Publ. Acad. Royale Serbe*, **127** (1927), 103—117,

b) Kompleksan broj, Beograd, 1950.

_____ et Tomić M. — c) Considérations géométriques relatives aux polynômes et séries trigonométriques, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **2** (1948), 127—175.

[9] Marden, M. — The Geometry of the zeros of polynomial in a complex variable, New-York, 1949.

[10] Marković, D. — a) Sur la limite supérieure des modules des zéros des polynômes, *Publ. Math. Univ. Belgrade* **5—7** (1938), 36—47.

b) Sur quelques limites supérieures des modules des zéros d'un polunôme. *Mathematica Cluj* **15** (1939), 8—11.

c) Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme. *Publ. Inst-Math. Acad. Serbe Sci.* **2** (1948), 236—242.

5.2. *РАСПОРЕД НУЛА ПОЛИНОМА* $P_{m^2}(z)$. Ставимо да је

$$w e^{-\frac{2\lambda\pi}{m} i} = w_\lambda .$$

Тада релације (5,2) можемо написати у облику

$$z_{\lambda,\nu} = u e^{\frac{2\lambda\pi}{m} i} + v e^{\frac{2\nu\pi}{m} i} + w_\lambda e^{-\frac{2\nu\pi}{m} i} . \tag{5,2*}$$

Из овог израза је очигледно да су нуле полинома (5,1) распоређене тако, да се по m нула тога полинома налази на свакој од m подударнух елипса (E_λ)

$$(E_\lambda) \equiv z = u e^{\frac{2\lambda\pi}{m} i} + v e^{\theta i} + w_\lambda e^{-\theta i}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, m,$$

чије су полуосе дате релацијама $b_{1,2} = |v| \pm |w|$, чији центри образују правилан m - угао $\zeta_\lambda = u e^{\frac{2\lambda\pi}{m} i}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m$, а чији се фокуси $\zeta_{1,2}^{(\lambda)}$ налазе у тачкама

$$\zeta_{1,2}^{(\lambda)} = u e^{\frac{2\lambda\pi}{m} i} \pm 2\sqrt{vw}\, e^{-\frac{\lambda\pi}{m} i}, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, m.$$

Напомена: (i) Аналогним се поступком може показати да се, на примјер, и нуле

$$z_{j,\lambda,\nu} = u_j e^{\frac{2\lambda\pi}{m} i} + v_j e^{-\frac{2\lambda\pi}{m} i} + w_j e^{\frac{2\nu\pi}{m} i} + W_j e^{-\frac{2\nu\pi}{m} i},$$
$$j = 1, 2; \quad \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, m$$

и сви коефицијенти полинома

$$P_{2m^2}(z) = \prod_{j=1}^{2} \prod_{k=1}^{m} \Bigg[\sum_{l=0}^{\lambda} (-1)^l \frac{m}{m-l} \binom{m-l}{l} \left(u_j + w_j e^{\frac{2k\pi}{m} i}\right)^l \left(v_j + W_j e^{-\frac{2k\pi}{m} i}\right)^l z^{m-2l} -$$
$$- \left(u_j + w_j e^{\frac{2k\pi}{m} i}\right)^m - \left(v_j + W_j e^{-\frac{2k\pi}{m} i}\right)^m \Bigg], \quad \lambda = [m/2];$$

$$u_1^m + v_1^m = u_2^m + v_2^m = u^m + v^m = \frac{1}{2}\sigma_m + \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_m^2 - p_m} ,$$

$$u_1 v_1 = w_2 W_2 = uv = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} ;$$

$$w_1^m + W_1^m = w_2^m + W_2^m = w^m + W^m = \frac{1}{2}\sigma_m - \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_m^2 - p_m} , \tag{*}$$

comme un cas spécial) et ceux-ci, alors, conduisent à l'identité (4,04), qui constitue la relation principale de ce travail.

En généralisant dans le sens algébrique et dans le sens géométrique la liaison entre l'identité (4,04), les polynomes (1) et les transformations affines ou projectives, on obtient des classes de polynomes, dont les zéros appartiennent à des lieux géométriques bien déterminés. On peut construire les zéros de ces polynomes avec la même exactitude, avec laquelle on peut construire les polygones réguliers correspondants.

2. On peut obtenir les polynomes (1) en étudiant les propriétés des polynomes (1,1) d'un autre point de vue. C'est la question que l'on étudie dans les chapitres I et II.

(i) Au chapitre I on donne d'abord, la définition (2) de l'envergure du polynome (1,1).

Puis, on associe au polynome (1,1) le polynome auxiliaire (3), dont les zéros sont les valeurs stationnaires du polynome (1,1).

Ensuite, on démontre les théorèmes 1.1 - 1.5 qui énoncent l'une des propriétés de l'envergure des polynomes et certaines propriétés des polynomes d'envergure nulle ou d'envrgure minimum.

(ii) Dans le chapitre II on étudie un cas particulier des polynomes d'envergure minimum dans le sens du théorème 1.5. On démontre que ce sont les polynomes (1) qui ont, dans ce cas, l'envergure minimum et qui sont les transformés des polynomes binômes (0,2) dans une affinité. Les propriétés de ces polynomes sont énoncées dans les théorèmes 2.1—2.8.

3. Dans le chapitre III on étudie la position des zéros des polynomes de la forme (0,3). Les théorèmes 3.3—3.5 traitent l'interdépendance des zéros des polynomes (1,1), (7) et (8) et montrent comment on peut déterminer le nombre de zéros de l'un d'eux, situés sur une circonférence, sur une ellipse ou sur une hyperbole donnée.

4. Les considérations dans le chapitre IV se rapportent aux polynômes dont les zéros, ayant une certaine répartition régulière dans le plan complexe, appartiennent aux coniques, aux quartiques unicursales bicirculaires ou aux cubiques unicursales circulaires.

Si les zéros d'un polynome F_n se trouvent sur une conique, ce polynome est le transformé projectif d'un polynome binôme (0,2).

5. Les zéros (5,2) des polunomes P_{m^2} (z), ou P_{2m^2} (z), dans le chapitre V, s'expriment algébriquement au moyen des coefficients a_3, a_m et a_{2m} (respectivement au moyen des coefficients a_2, a_4, a_m et a_{2m}) de ces polynomes.

Le polynome du degré 4 est un cas particulieur ($m=2$) des polynomes P_{m^2} (z).

[11] Обрешков, Н. — Обобщение теоремы Декарта о мнимых корнях. *ДАН СССР* **LXXXV**, № 3 (1952), 489—492.

[12] Parodi M. — a) Sur une méthode de détermination du domaine des zéros de certains polynômes récurrentes, *C. R. Paris* **234** (1952), 1123—1124.

b) Sur une méthode d'étude des polynômes récurrentes, *C. R. Paris* **236** (1953),

[13] Perron O. — Algebra I, 2. Aufl., Berlin—Leipzig, 1932.

[14] Petrović, M. — a) Théorème sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises à l'intérieur d'une circonférence donnée. *C. R. Paris* **129** (1899), 583—586, 873—875.

b) Remarque sur les zéros des séries de Taylor, *Bull. Soc. Math. France* **29** (1901), 303—312.

c) Sur une suite de fonctions rationelles rattachées aux équations algébriques, *Bull. Soc. Math. France* **36** (1918), 141—150.

d) Equations algébriques et transcendentes dépourvues de racines réelles, *Bull. Soc. Math. France* **41** (1913), 194—206.

[15] Popov, B. — Sur une équation algébrique proposée par Pitoiset, *Acad. royale de Belgique, Bull. Sci.* **XXXVII** (1) (1951) 17—19.

[16] Raljević, Š. — Međusobni raspored i konstrukcija nula polinoma trećeg stepena i nula njegovog izvodnog polinoma. *Zbornik radova Mat. Inst. SAN* **2** (1952), 167—172.

b) O jednoj pravoj i jednoj karakterističnoj duži u poligonima nula polinoma, *Zbornik radova Mat. Inst. SAN* **3** (1953), 89—94.

c) O primjeni afinog preslikavanja u analizi. *Glasnik SAN* **3** (1951), 215.

[17] Serret, J. A. — Cours d'Algèbre supérieure, I, 4. édit., Paris, 1877.

[18] Stipanić, E. — O jednoj geometrijskoj teoremi G. Bellati-a, *Nast. mat. i fiz. u sr. šk.* **1** (1953), 40—42.

[19] Tomić, M. — a) Généralisation et démonstration géométriques de certains théorèmes de Fejér et Kakeya, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **2** (1948), 146—156.

b) O trigonometrijskim zbirovima, *Zbornik radova Mat. Inst. SAN* **2** (1952), 13—52.

[20] Weber, H. — Lehrbuch der Algebra, I Band, 2. Aufl., Braunschweig, 1898.

SUR CERTAINES CLASSESS DE POLYNOMES ET SUR LA RÉPARTITION DE LEURS ZÉROS

par

Š. RALJEVIĆ

1. C'est l'interprétation géométrique des transformations linéaires (affines) qui eonduit à la classe de polynômes (1) bien connus, (à laquelle appartiennent les polynômes classiques de Tchébicheff

где је

$$u=F(k,\varphi),\qquad b=F\left(k',\,arc\sin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right),$$

$$i\,\Pi(u,bi)=u\left[\frac{\Theta'(b,k')}{\Theta(b,k')}+\frac{b\,\pi}{2\,FF'}-tn(b,k')\,dn(b,k')\right]+\frac{i}{2}\,ln\,\frac{\Theta(u-bi)}{\Theta(u+bi)}.$$

Величина $\Pi(n,k,\varphi)$ је реална, а ослобађање од имагинарног облика неће се извести баш на првом кораку; а и мало је вероватно да би се у примени помоћу оваквог обрасца добили сви подаци о посматраном објекту. Стога су, и поред свег савршенства теорије елиптичких функција, остала нерасветљена нека питања, нарочито она која се односе на елиптичке интеграле III врсте.

Међутим, показало се и то да није оправдано дати једној извесној форми елиптичких интеграла III врсте неку нарочиту предност, а с тим у вези и једно нарочито функционално обележје, јер су се нашле и многе друге равноправне форме. При истраживањима веза између „Тета" функција и елиптичких интеграла III врсте, редукције на Legendre-ов нормални тип изискивале су многа рачунања, често и врло компликована. И, на основи Jacobijева [11] става да се Legendre-ов нормални тип елиптичког интеграла III врсте, који садржи три аргумента, своди на функције у којима се појављују само два аргумента, ови интеграли би изгубили своју актуелност. Но, у великом броју случајева, нарочито у геометриским применама и када се ради о једноставнијим трансформацијама, узимање Legendre-ова типа за норму имало је своје оправдање, тим пре што се Legendre-ова метода одликује својим нарочито елементарним карактером. С друге стране, баш ове Legendre-ове методе инспирисале су Abel-а за његова класична открића.

Када се ово све узме у обзир, изгледа да и надаље могу бити актуелна испитивања елиптичких интеграла III врсте. Узимамајући неки други тип за норму, могуће је да би се уочиле још неке особине оваквих интеграла, које би биле корисне за примену.

Овај рад је један покушај такве врсте.

Изгледало ми је целисходно да поставим такав тип, који би био подесан за решавање неколико разнородних проблема наведених у овом раду.

Напоменуо бих, напослетку, да је један део резултата изложених у овој тези садржан у мојим раније објављеним радовима [6]. Овде сам те резултате уопштио и детаљније разрадио.

0.2. Предмет овог рада је испитивање једне линеарне комбинације нормалних елиптичких интеграла I и II врсте Legendreова типа

$$\Lambda(k,\psi)=EF(k',\psi)+FE(k',\psi)-FF(k',\psi),\tag{1}$$