Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

М. ПРВАНОВИЋ

О ЈЕДНОМ ПОЉУ ВЕКТОРА ДУЖ КРИВЕ ПОТПРОСТОРА РИМАНОВА ПРОСТОРА

У овом раду се успоставља и испитује релација између вектора $v^i = \frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk} \frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2} \frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} \frac{\delta x^i}{\delta s}$ криве C потпростора Риманова простора и вектора који одговара вектору v^i у околном простору.

1. *ОЗНАКЕ И ПОТРЕБНЕ ЈЕДНАКОСТИ.* Нека су y^α $(\alpha = 1,2,\ldots,m)$ координате а $a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ прва основна форма Риманова простора V_m. Нека је V_n потпростор простора V_m и нека су x^i $(i = 1,2,\ldots,n)$ координате а $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ прва основна форма тог потпростора.

Претпоставимо да су метрике простора V_m и V_n позитивно дефинитне. Тада имамо релације

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, y^\alpha{}_{,i}\, y^\beta{}_{,j}\,,$$

при чему запета испред индекса означава коваријантно диференцирање.

У току излагања латински индекси узимају вредности $1,2,\ldots,n$; први грчки индекси (α, β, γ) узимају вредности $1,2,\ldots,m$ а задњи грчки индекси (σ, τ) вредности од $n+1$ до m. Индекси испред којих се налази вертикална црта не означавају коваријантни или контраваријантни карактер величине, него служе за обележавање.

Ако са $N_{\sigma|}{}^\alpha$ обележимо систем од $m-n$ јединичних, узајамно ортогоналних, вектора простора V_m, нормалних на потпростор V_n, постоје једнакости

$$a_{\alpha\beta}\, N_{\sigma|}{}^\alpha\, N_{\tau|}{}^\beta = \delta^\sigma{}_\tau \tag{1.1}$$

$$a_{\alpha\beta}\, N_{\sigma|}{}^\alpha\, y^\beta{}_{,i} = 0. \tag{1.2}$$

Гаусове једначине потпростора V_n гласе ([1] с. 163, јед. 5)

$$y^\alpha{}_{;ij} = \sum_\sigma \Omega_{\sigma|ij}\, N_{\sigma|}{}^\alpha, \tag{1.3}$$

при чему су $\Omega_{\sigma|ij}$ компоненте тензора друге основне форме потпростора V_n, а тачка и запета (;) означава генералисано коваријантно диференцирање.

Генералисани коваријантни извод јединичног вектора нормале на потпростор дат је изразом ([1] с. 170, јед. 30)

$$N_{\sigma|}{}^{\alpha}{}_{;\,i} = -\,\Omega_{\sigma|ik}\,g^{kl}\,y^{\alpha}{}_{,\,l} + \sum_{\tau}\theta_{\tau\sigma|i}\,N_{\tau|}{}^{\alpha}, \tag{1.4}$$

где је

$$\theta_{\tau\sigma|i} = a_{\alpha\beta}\,N_{\sigma|}{}^{\alpha}{}_{;\,i}\,N_{\tau|}{}^{\beta} \equiv a_{\alpha\beta}\,N_{\tau|}{}^{\beta}\,N_{\sigma|}{}^{\alpha}{}_{,\,i} + [\mu\,\nu,\beta]_{\alpha}\,y^{\mu}{}_{,\,i}\,N_{\sigma|}{}^{\nu}\,N_{\tau|}{}^{\beta}.$$

Нека је $C: x^i = x^i(s)$ (s је лук) крива потпростора V_n. Обележимо са $\delta/\delta s$ апсолутно диференцирање дуж криве. Тада су

$$\frac{\delta x^i}{\delta s} = \frac{dx^i}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{\delta y^{\alpha}}{\delta s} = \frac{dy^{\alpha}}{ds} \tag{1.5}$$

компоненте јединичног вектора тангенте криве C респективно у односу на V_n и на V_m, а

$$\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{\delta^2 y^{\alpha}}{\delta s^2} = \frac{d^2y^{\alpha}}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\,\gamma \end{Bmatrix}\frac{dy^{\beta}}{ds}\frac{dy^{\gamma}}{ds} \tag{1.6}$$

су компоненте вектора прве кривине криве C у односу, респективно, на потпростор V_n и на околни простор V_m. Ови вектори су везани релацијом ([1] с. 164, јед. 12')

$$\frac{\delta^2 y^{\alpha}}{\delta s^2} = \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\,y^{\alpha}{}_{,\,i} + \sum_{\tau}\Omega_{\tau|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\,N_{\tau|}{}^{\alpha}. \tag{1.7}$$

Криве потпростора V_n Риманова простора V_m за које је, у свакој тачки, задовољен услов

$$a_{\alpha\beta}\,\frac{\delta q^{\alpha}}{\delta s}\,N_{\sigma|}{}^{\beta} = 0,$$

при чему је $q^{\alpha} = \dfrac{d^2y^{\alpha}}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\,\gamma \end{Bmatrix}\dfrac{dy^{\beta}}{ds}\dfrac{dy^{\gamma}}{ds}$, су Дарбуове линије потпростора V_n [3]. Диференцијалне једначине Дарбуових линија потпростора V_n су [3]

$$\begin{aligned} &\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{\partial\Omega_{\sigma|ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + 2\,\Omega_{\sigma|ij}\frac{d^2x^i}{ds^2}\frac{dx^j}{ds} + \\ &+ \sum_{\tau}\Omega_{\tau|mn}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

2. *ГЕОДЕЗИСКИ КРУГ.* Крива потпростора V_n чија је прва кривина константна, а друга једнака нули, зове се геодезиски круг. Из Френеових формула следи да су

$$\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}\frac{\delta x^i}{\delta s} = 0 \tag{2.1}$$

диференцијалне једначине ових кривих. У низу радова K. Yano [2] испитује ове криве простора и оне величине простора које су инваријантне у односу на коциркуларну трансформацију, тј. ону конформну трансформацију при којој се геодезиски круг трансформише у геодезиски круг. Између осталог он, дуж кривих за које услов (2.1) није задовољен, дефинише вектор чије су контраваријантне компоненте

$$\nu^i = \frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}\frac{\delta x^i}{\delta s}\,. \tag{2.2}$$

Компоненте вектора, који у околном простору V_m одговара вектору ν^i криве C, су

$$\mu^\alpha = \frac{\delta^3 y^\alpha}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma}\frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2}\frac{\delta x^\alpha}{\delta s}\,. \tag{2.3}$$

У овом раду успостављамо релацију између вектора μ^α и ν^i и испитујемо неке њене последице.

3. *РЕЛАЦИЈА ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА μ^α И ν^i КРИВЕ C, КОЈА ПРИПАДА ПОТПРОСТОРУ V_n.* Ако применимо генералисани коваријантни извод на једнакост (1.7), имамо

$$\left(\frac{\delta^2 y^\alpha}{\delta s^2}\right)_{;j} = \left(\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\right)_{;j} y^\alpha{}_{,i} + \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} y^\alpha{}_{;ij} + \sum_\tau \left(\Omega_{\tau|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right)_{;j} N_{\tau|}{}^\alpha +$$
$$+ \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} N_{\tau|}{}^\alpha{}_{;j}\,.$$

После замене величина $y^\alpha{}_{;ij}$ и $N_{\tau|}{}^\alpha{}_{;j}$ њиховим вредностима из (1.3) и (1.4), добивамо

$$\left(\frac{\delta^2 y^\alpha}{\delta s^2}\right)_{;j} = \left(\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\right)_{;j} y^\alpha{}_{,i} + \sum_\tau \Omega_{\tau|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} N_{\tau|}{}^\alpha + \sum_\tau \left(\Omega_{\tau|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right)_{;j} N_{\tau|}{}^\alpha +$$
$$+ \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\left(-\Omega_{\tau|ik} g^{kl} y^\alpha{}_{,l} + \sum_\sigma \theta_{\sigma\tau|j} N_{\sigma|}{}^\alpha\right),$$

или после множења са dx^j/ds и сумирања по j

$$
(3.1)\quad \begin{aligned}
\frac{\delta^3 y^\alpha}{\delta s^3} &= \frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} y^\alpha{}_{,i} - \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} g^{kl} y^\alpha{}_{,l} + \\
&+ \sum_\sigma \left[\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) + \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right] N_{\sigma|}{}^\alpha
\end{aligned}
$$

Ако са $e_{h|}{}^i$ обележимо компоненте јединичних вектора неке enuple потпростора V_n, где $h = 1, 2, \ldots, n$ означава вектор а $i = 1, 2, \ldots, n$ компоненту, онда је ([1] с. 46, јед. 27)

$$
g^{kl} = \sum_h e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l .
$$

Како ова једнакост не зависи од избора n узајамно ортогоналних вектора $e_{h|}{}^l$, то ћемо их изабрати тако да вектор са компонентама $e_{1|}{}^i$ буде тангентан на криву, тј.

$$
e_{1|}{}^i = \frac{dx^i}{ds} .
$$

Стога је

$$
(3.2)\quad \begin{aligned}
\sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} g^{kl} y^\alpha{}_{,l} &= \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} y^\alpha{}_{,l} + \\
&+ \sum_\tau \sum_h^{2,\ldots,n} \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk} e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} y^\alpha{}_{,l} .
\end{aligned}
$$

Из релације (1.7) следи

$$
\begin{aligned}
a_{\gamma\beta}\frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2} &= a_{\beta\gamma}\left[\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2} y^\beta{}_{,j} + \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} N_{\tau|}{}^\beta\right]\left[\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} y^\gamma{}_{,k} + \right. \\
&\left. + \sum_\sigma \Omega_{\sigma|lt}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^t}{ds} N_{\sigma|}{}^\gamma\right],
\end{aligned}
$$

одакле, с обзиром на (1.1) и (1.2), добивамо

$$
(3.3)\quad a_{\beta\gamma}\frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2} = g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} + \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|lt}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^t}{ds} .
$$

На основу (3.1), (3.2) и (3.3), можемо написати

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^3 y^\alpha}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma}\frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2}\frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2}\frac{\delta y^\alpha}{\delta s} &= \left(\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk}\frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2}\frac{\delta x^i}{\delta s}\right) y^\alpha{}_{,i} - \\
&- \sum_\tau \sum_h^{h=1,\dots,n} \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} y^\alpha{}_{,l} + \\
&+ \sum_\sigma \left[\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) + \right. \\
&\left. + \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right] N_{\sigma|}{}^\alpha .
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Једнакост (3.4) је тражена релација између вектора μ^α и ν^i криве C у односу, респективно, на околни простор V_m и на потпростор V_n.

Из релације (3.4), с обзиром на (1.8), следи:

1) *Ако је крива C геодезиски круг у односу на околни простор и у односу на потпростор, онда је она и Дарбуова линија потпростора и дуж ње је*

$$\sum_\tau \sum_h^{2,\dots,n} \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0 .$$

2) *Ако је крива C геодезиски круг у односу на околни простор, онда је она Дарбуова линија потпростора, а вектор ν^i криве C у односу на потпростор има вредност*

$$\nu^l = \sum_\tau \sum_h^{2,\dots,n} \Omega_{\tau|mn}\Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^k e_{h|}{}^l \frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds}, \tag{3.5}$$

тј. вектор чије су компоненте ν^i изражава се помоћу тензора друге основне форме потпростора V_n, и n јединичних, узајамно ортогоналних вектора од којих је један тангентан на криву C.

3) *Ако је крива C Дарбуова линија потпростора V_n и то у односу на сваку од $m-n$ нормала на потпростор, онда је вектор μ^α криве, у односу на околни простор, тангенцијалан на потпростор V_n.*

Другим речима:

Дуж Дарбуове линије потпростора V_n Риманова простора V_m, вектор μ^α криве је нормалан на нормали потпростора.

Заиста, ако релација (3.4) помножимо са $a_{\alpha\beta} N_{\rho|}{}^{\beta}$ и сумирамо по α, с обзиром на (1.1) и (1.2), добивамо

$$a_{\alpha\beta}\, \mu^{\alpha} N_{\rho|}{}^{\beta} = \Omega_{\rho|ij} \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} \frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\rho|mn} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds}\right) +$$

$$+ \sum_{\tau} \Omega_{\tau|mn}\, \theta_{\rho\tau|j} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^j}{ds}.$$

Према томе, кад је крива C Дарбуова линија потпростора V_n, задовољен је услов

$$a_{\alpha\beta}\, \mu^{\alpha} N_{\rho|}{}^{\beta} = 0. \tag{3.6}$$

4) Ако је потпростор V_n, потпростор неодређених линија кривине, онда је

$$\Omega_{\tau|ij} = \frac{\Omega_{\tau|}}{n} g_{ij}, \quad \Omega_{\tau|} = \Omega_{\tau|ij} g^{ij},$$

па је

$$\sum_{\tau} \sum_{h}^{2,\ldots,n} \Omega_{\tau|mn} \Omega_{\tau|jk}\, e_{h|}{}^{k} e_{h|}{}^{l} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^l}{ds} = \sum_{\tau} \sum_{h}^{2,\ldots,n} \left(\frac{\Omega_{\tau|}}{n}\right)^2 g_{jk}\, e_{h|}{}^{k} \frac{dx^j}{ds} e_{h|}{}^{l} = 0,$$

јер су, по претпоставци, јединични вектори $e_{h|}{}^{i}$ ($h = 2, \ldots, n$) нормални на тангенти криве. Стога се, у овом случају, релација (3.4) може написати у облику

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 y^{\alpha}}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma} \frac{\delta^2 y^{\beta}}{\delta s^2} \frac{\delta^2 y^{\gamma}}{\delta s^2} \frac{\delta y^{\alpha}}{\delta s} &= \left(\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk} \frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2} \frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} \frac{\delta x^i}{\delta s}\right) y^{\alpha}{}_{,i} + \\ + \sum_{\sigma} \left[\Omega_{\sigma|ij} \frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} \frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds}\right) \right. &+ \left. \sum_{\tau} \Omega_{\tau|mn}\, \theta_{\sigma\tau|j} \frac{dx^m}{ds} \frac{dx^n}{ds} \frac{dx^j}{ds}\right] N_{\sigma|}{}^{\alpha}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

тј.: *вектор μ^{α}, у односу на околни простор, криве C, која припада потпростору неодређених линија кривине, може се раставити на две компоненте: једну која је нормална на потпростор и другу која је тангенцијална на потпростор, а која је вектор ν^i, у односу на потпростор, криве C.*

5) Ако је потпростор V_n тотално геодезиски потпростор околна Риманова простора, тј. ако је

$$\Omega_{\tau|ij} = 0, \quad \text{за све} \quad \tau = m+1, \ldots, n$$

једначине (3.4) се своде на

$$\frac{\delta^3 y^{\alpha}}{\delta s^3} + a_{\beta\gamma} \frac{\delta^2 y^{\beta}}{\delta s^2} \frac{\delta^2 y^{\gamma}}{\delta s^2} \frac{\delta y^{\alpha}}{\delta s} = \left(\frac{\delta^3 x^i}{\delta s^3} + g_{jk} \frac{\delta^2 x^j}{\delta s^2} \frac{\delta^2 x^k}{\delta s^2} \frac{\delta x^i}{\delta s}\right) y^{\alpha}{}_{,i}$$

одакле следи:

за сваку криву тотално геодезиског потпростора Риманова простора, вектор μ^α криве, у односу на околни простор, једнак је вектору v^i криве, у односу на потпростор, кад се овај последњи посматра из околна простора; и

геодезиски круг тотално геодезиског потпростора је и геодезиски круг околна простора и обрнуто.

4. *ОДНОС ИЗМЕЂУ ВЕКТОРА μ^α И v^i КРИВЕ С, КАД КРИВА ПРИПАДА ПОТПРОСТОРУ НЕОДРЕЂЕНИХ ЛИНИЈА КРИВИНЕ.* — Задржимо се сада на случају кад је V_n потпростор неодређених линија кривине. Тада је, с обзиром на услов $\Omega_{\tau|ij} = \Omega_{\tau|}\, g_{ij}/n$

$$\Omega_{\sigma|ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\Omega_{\sigma|mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) + \sum_\tau \Omega_{\tau|mn}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\frac{dx^j}{ds} =$$

$$= \frac{\Omega_{\sigma|}}{n} g_{ij}\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2}\frac{\delta x^j}{\delta s} + \frac{d}{ds}\left(\frac{\Omega_{\sigma|}}{n} g_{ij}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\right) +$$

$$+ \sum_\tau \frac{\Omega_{\tau|}}{n} g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^j}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\Omega_{\sigma|}}{n}\right) + \sum_\tau \frac{\Omega_{\tau|}}{n}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^j}{ds}.$$

Стога се једначине (3.7) могу написати у облику

$$\mu^\alpha = v^i y^\alpha{}_{,i} + \sum_\sigma A_{\sigma|} N_{\sigma|}{}^\alpha,$$

где је

$$A_{\sigma|} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\Omega_{\sigma|}}{n}\right) + \sum_\tau \frac{\Omega_{\tau|}}{n}\,\theta_{\sigma\tau|j}\frac{dx^j}{ds},$$

или, ако ставимо

$$\sum_\sigma A_{\sigma|} N_{\sigma|}{}^\alpha = \xi^\alpha,$$

у облику

$$\mu^\alpha = v^i y^\alpha{}_{,i} + \xi^\alpha \tag{4.1}$$

Обележимо са w, v и D интензитете вектора μ^α, v^i и ξ^α, тј. ставимо

$$w^2 = a_{\alpha\beta}\,\mu^\alpha \mu^\beta, \quad v^2 = g_{ij}\, v^i v^j, \quad D^2 = a_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha \xi^\beta.$$

Тада из (4.1) следи да су, за криву која припада потпростору неодређених линија кривине, интензитети вектора μ^α, v^i и ξ^α, тј. величине w, v и D, везане релацијом

$$w^2 = v^2 + D^2, \tag{4.2}$$

па се, ако су две од њих дате, трећа увек може израчунати.

Једначине (4.1) се такође могу написати у облику

$$w\,\mu_0^\alpha = v\,\bar{\mu}_0^\alpha + D\,\xi_0^\alpha, \tag{4.3}$$

при чему су сада μ_0^α и ξ_0^α компоненте јединичног вектора у одговарајућим правцима а $\bar{\mu}_0^\alpha$ су компоненте јединичног вектора v^i, кад се овај посматра у односу на околни простор,

Ако са α обележимо угао који образују јединични вектори μ_0^α и ξ_0^α и једначине (4.3) помножимо са $a_{\alpha\beta}\,\xi_0^\beta$, добивамо

$$w\,a_{\alpha\beta}\,\mu_0^\alpha\,\xi_0^\beta = D\,a_{\alpha\beta}\,\xi_0^\alpha\,\xi_0^\beta,$$

тј.

$$w\,\cos\alpha = D. \tag{4.4}$$

Множењем једначина (4.3) са $a_{\alpha\beta}\,\bar{\mu}_0^\beta$ и сумирањем по α, добивимо

$$w\,a_{\alpha\beta}\,\mu_0^\alpha\,\bar{\mu}_0^\beta = v\,a_{\alpha\beta}\,\bar{\mu}_0^\alpha\,\bar{\mu}_0^\beta,$$

што, с обзиром да вектори μ^α, $\bar{\mu}^\alpha$ и ξ^α припадају истој дводимензионој геодезиској површини, можемо написати у облику

$$w\,\sin\alpha = v. \tag{4.5}$$

Релација (4.4) даје везу између интензитета вектора μ^α и ξ^α, а релација (4.5) везу између интензитета вектора μ^α и v^i.

Из једначина (3.7) следе теореме:

Ако је крива C, која припада потпростору неодређених линија кривина, геодезиски круг у односу на околни простор, онда је она и геодезиски круг у односу на потпростор и Дарбуова линија тог потпростора.

Ако је крива C, која припада потпростору неодређених линија кривина, геодезиски круг у односу на потпростор, онда је вектор μ^α *те криве, у односу на околни простор, нормалан на потпростор.*

Вактор v^i *криве C, која припада потпростору неодређених линија кривина, и која је Дарбуова линија потпростора у односу на сваку од* $m-n$ *нормала потпростора, посматран из околна простора, је вектор* μ^α *те криве.*

(Саопштено на седници Мат. инст. 2-III-1955)

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. E. Weatherburn — Riemannian geometry and the tensor calculus, Cambridge, 1950.

[2] K. Yano — Concircular Geometry I, II, III, IV. *Proc. Imper. Acad.* **16** (1940), str. 195—200, 354—360, 442—448, 505—511.

[3] M. Prvanovitch — Lignes de Darboux dans l'espace riemannien. *Bul. Sci. Math.* (2) t. **LXXVII** (1954).

A FIELD OF VECTORS ALONG A CURVE OF SUB-SPACE OF A RIEMANNIAN SPACE

by

Mileva Prvanovitch

Let V_n be a sub-space of a Riemannian space V_m, y^α the coordinates in V_m and x^i the coordinates in V_n. Latin indices take the values $1,2,\ldots,n$ and Greek ones $1,2,\ldots,m$ except τ, σ and ρ which take the values $n+1,\ldots,m$. (1. 6) are the components of the vectors of the first curvature, in respect to V_n and V_m, of the curve C, which belongs to the sub-space V_n. The curve C, whose first curvature is constant and the second is zero, is the geodesic circle of V_n. (2.1) are the differential equations of such curves. K. Yano [2] introduced the vector whose components v^i are given by the relation (2.2). This vector is equal to zero along the geodesic circle of V_n. (2.3) are the components of the vector μ^α, which corresponds, in the enveloping space V_m, to the vector v^i of curve C of sub-space V_n.

The object of this paper is to restitute and to investigate the equations (3.4). Those equations give the relation between the vector μ^α, in respect to the enveloping space V_n, and the vector v^i, in respect to the sub-space V_n, of the curve C of V_n.

Among the numerous consequences of the relation (3.4), we quote these:

If the curve C of V_n is the geodesic circle in respect to the enveloping space V_m, it is a Darboux line {[3]; eq. (1.8)} of the sub-space, and the vector v^i of C, in respect to the sub-space, has the value (3.5).

Along the Darboux line of the sub-space V_n, the vector μ^α of the curve satisfies the condition (3.6), i. e. it is normals of the sub-space V_n.

If the curve C of the sub-space with indeterminate lines of curvature is the Darboux line of the sub-space in respect of all m-n normals to the sub-space, the vector v^i of curve, observed in the enveloping space, is the vector μ^α of the curve.

The geodesic circle of the totally geodesic sub-space is the geodesic circle also of the enveloping space.

The magnitudes of the vectors μ^α, v^i and ξ^α of the curve C, which belongs to the sub- space with indeterminate linies of curvature, are bound by the relations (4.2), (4.4) and (4.5).

I4

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ

CORRIGENDA УЗ РАД „О ЈЕДНОЈ ПРАВОЈ И ЈЕДНОЈ КАРАКТЕРИСТИЧНОЈ ДУЖИ У ПОЛИГОНИМА НУЛА ПОЛИНОМА“*)

Приликом штампања, у уводу је омашком испуштена релација (10).

Наиме, почетак другог пасуса треба овако да гласи:

„Очигледно је да је Гаусово тежиште (3) полинома $P_n(z)$ идентично са геометријским тежиштем (4) само у случају кад је

$$p \sum_{\nu=1}^{p} m_\nu z_\nu = n \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu, \tag{10}$$

на пр., кад све нуле тога полинома имају исти ред вишеструкости, тј. кад је

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_p \geqslant 1.\text{“} \tag{10'}$$

Учињена омашка не утиче на тачност ставова 1 и 2.

*) Овај Зборник, књ. 3., стр. 90.

Штампа
ГРАФИЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ „АКАДЕМИЈА“
Београд, Космајска 28 — Телефони: 20-732 и 24-701. Штампано у 1.000 примерака ћирилицом. Формат 70×100. Садржи 9 штампаних табака. Завршено 10-IV-1955