Зборник радова С. А. Н. XLIII — Машемашички инсшишуш С. А. Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

БОГДАН БАЈШАНСКИ

О НУЛАМА ИЗВОДА РАЦИОНАЛНЕ ФУНКЦИЈЕ

Одређивање области у којима се налазе нуле извода једне класе рационалних функција.

У геометрији полинома класичан је Gauss-Lucas-ов став, који тврди да се нуле извода једног полинома налазе у најмањем конвексном полигону описаном око нула тог полинома. У овоме раду даје се следеће уопштење тога става за једну класу рационалних функција.

СТАВ. *Ако најмањи конвексан полигон описан око нула једне рационалне функције не задире у најмањи конвексан полигон описан око полова исте функције, тада се све нуле извода те функције налазе у двема областима, од којих се свака добива као полусенка контуре једног од поменутих полигона кад је контура другог извор светлости.*

Доказ. Нека су $z_i \ (i=1,2,\ldots,j)$ нуле и $p_i \ (i=1,2,\ldots k)$ полови рационалне функције $f(z)$. Тада је

$$f(z)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{j}(z-z_i)^{m_i}}{\prod\limits_{i=1}^{k}(z-p_i)^{n_i}}.$$

Узимајући логаритамски извод функције $f(z)$, одређивање области нула функције $f'(z)$ своди се на одређивање области нула функције

$$g(z)=\sum_{i=1}^{j}\frac{A_i}{z-a_i}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{A_i}{a_i-z}, \tag{1}$$

где су A_i позитивни бројеви.

Претпоставићемо да су област нула и област полова функције $f(z)$ раздвојене, односно да најмањи конвексан полигон P описан око тачака $a_i \ (i=1,2,\ldots j)$ не задире у аналоган полигон Q око тачака $a_i \ (i=j+1, j+2, \ldots n)$.

Нека је z нула функције $g(z)$. Ставимо

$$\xi_i = \begin{cases} \dfrac{1}{z - a_i}, & 1 \leqslant i \leqslant j \\ \dfrac{1}{a_i - z}, & j+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Тада из (1) следи да је

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i = 0,$$

па је 0 у унутрашњости најмањег конвексног полигона описаног око тачака ξ_i. Стога ће она бити и у унутрашњости најмањег конвексног полигона описаног око тачака $1/\xi_i$. Зато постоје позитивни бројеви B_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, такви да је

$$\sum_{i=1}^{n} B_i \frac{1}{\xi_i} = 0,$$

тј.

$$\sum_{i=1}^{j} B_i (z - a_i) - \sum_{i=j+1}^{n} B_i (z - a_i) = 0,$$

одакле следи

$$z\left(\sum_{i=1}^{j} B_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{j} B_i a_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i.$$

Не може бити

$$\sum_{i=1}^{j} B_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i = 0,$$

јер би тада на основу последње везе следило

$$\sum_{i=1}^{j} B_i a_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i = 0,$$

одакле би се добило

$$\frac{\sum_{i=1}^{j} B_i a_i}{\sum_{i=1}^{j} B_i} = \frac{\sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i}{\sum_{i=j+1}^{n} B_i}$$

а то би, због позитивности B_i, значило да постоји тачка која је истовремено унутрашња тачка и полигона P и полигона Q. Међутим, то противречи претпоставци да ти полигони не задиру један у други.

Стога се може написати

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{j} B_i a_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i}{\sum_{i=1}^{j} B_i - \sum_{i=j+1}^{n} B_i},$$

тј.

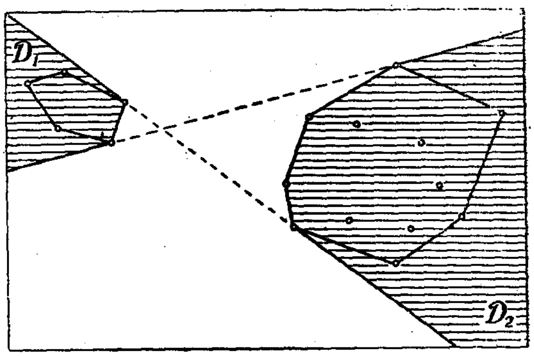
$$z = \frac{p z_1 - q z_2}{p - q},$$

где је

$$p = \sum_{i=1}^{j} B_i, \quad q = \sum_{i=j+1}^{n} B_i$$

$$z_1 = \frac{\sum_{i=1}^{j} B_i a_i}{\sum_{i=1}^{j} B_i}, \quad z_2 = \frac{\sum_{i=j+1}^{n} B_i a_i}{\sum_{i=j+1}^{n} B_i}.$$

Како су z_1 и z_2 унутрашње тачке полигона P и Q, то се свака нула функције $g(z)$ налази на правој која спаја неке две



Сл. 1

унутрашње тачке полигона P и Q, али ван дужи која спаја те две тачке. Дакле све нуле $g(z)$ су у двема областима, од којих је свака полусенка контуре једног полигона кад је контура другог извор светлости (области D_1 и D_2, шрафиране на цртежу). Тиме је став доказан.

П о с л е д и ц а. Ако се сви полови функције $g(z)$, дефинисане у (1), налазе на правој p, и ако најмањи интервал који садржи тачке a_i $(i = 1, 2, \dots j)$ не задире у најмањи интервал који садржи тачке a_i $(i = j+1,\ j+2, \ldots, n)$, тада се и све нуле функције $g(z)$ налазе на правој p. Специјално, када је права p реална оса, тада су све нуле функције $g(z)$ реалне.

Напомена. Не постоји став сличне природе кад полигони P и Q имају заједничку унутрашњу тачку. Тада се, наиме, може лако показати, резонујући као у доказу, само обрнутим путем, да се бројеви A_i могу одредити тако да добивена функција $g(z)$ има нулу у произвољној, унапред датој тачки z-равни.

(Саопштено на седници Мат. инст. 2-II-1955)

SUR LES ZÉROS DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

par

Bogdan Bajšanski

Dans cette note est démontré le théorème suivant:

Si les plus petits polygones convexes circonscrits autour des zéros ainsi que des pôles d'une fonction rationnelle n'empiètent pas l'un sur l'autre, alors tous les zéros de la dérivée de cette fonction se trouvent dans deux régions, chacune desquelles étant la pénombre d'un polygone lorsque l'autre est considéré comme une source de lumière.

On obtient ainsi une généralisation du théorème bien connu de Gauss-Lucas sur les zéros de la dérivée d'un polynôme.