Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

Б. СТАНКОВИЋ

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ СИНГУЛАРНИХ ИНТЕГРАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

— Т Е З А —

Увод

I. Решење интегралне једначине $\int_0^\infty e^{-sx} K_{\mu,\nu}(x,t)\,dx = s^\mu e^{-ts^\nu}$

II. Трансформација $P_\nu(\sigma, f)$

III. Решење хомогене интегралне једначине

$$f(x) = \lambda \int_0^\infty F_\nu(x/t^{1/\nu}) f(t) \frac{dt}{\nu t}$$

IV. Примена добивених резултата

V. Основне особине Wright-ових функција и функција које се правилно понашају.

У В О Д

1. Теорија интегралних једначина претставља релативно младу грану Математичке анализе. Истина, сматра се да је прву интегралну једначину решио још Abel 1826 године, али њихово систематско испитивање започело је тек радовима V. Volterra 1896 године и Fredholm-а 1900 године. Иако су ова два математичара радила на различитим класама једначина, које су по њима добиле и име, идеје су им у суштини исте. Почев од 1904 године Hilbert је у низу радова, заједно са својим ученицима, од којих су свакако најзначајнији E. Schmidt и H. Weyl, разрадио теорију интегралих једначина са симетричним језгрима. Ова имена су свакако најзначајнија у класичној теорији интегралних једначина. Даљи корак био је увођење Lebesgue-ова интеграла који омогућава да се у оквиру једне одређене класе функција поједноставе докази и реше још извесна питања која су остала отворена.

Оне интегралне једначине које се не покоравају условима класичне теорије називају се сингуларне. Треба напоменути да се у литератури, понекад, под сингуларном интегралном једначином подразумева једна много ужа класа интегралних једначина, наиме, код које се интеграл јавља као Cauchy-ева главна вредност. На

тим једначинама данас највише раде совјетски математичари. Према томе, да би било јасно, сингуларност има напред наведени смисао, а интеграли су у смислу Riemann-a.

Теориска разрада интегралних трансформација која је истовремено дала и теориску основу симболичком рачуну, омогућила је да се ове трансформације употребе за решавање најразноврснијих проблема математичке анализе, па и за решавање интегралних једначина. У пракси највише употребљавана, у различитим видовима, је свакако Laplace-ова и Fourier-ова трансформација. Оне омогућују не само да се добију сама решења, већ се може дискутовати и проблем јединствености и егзистенције.

Нас ће овде интересовати Laplace-ова трансформација. Низ појединачних случајева различитих интегралних једначина решавано је помоћу Laplace-ове трансформације, било чисто формално, симболичким рачуном, било да је вршена квалитативна интеграција. Али постоје и читаве класе интегралних једначина које се могу решавати Laplace-овом трансформацијом. Најпознатији облик такве интегралне једначине је свакако онај када се у њој јавља композиција облика

$$\int_0^x K(x-\tau) f(\tau) d\tau$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\tau) f(\tau) d\tau .$$

Таква интегрална једначина може се свести на обичну алгебарску. Методу за решавање ове последње једначине разрадио је Doetsch [5, c] употпуњујући резултате Bochner-a [4].

Исто тако је у литератури позната Wiener-Hopf-ова [20] метода за решавање хомогене интегралне једначине

$$f(x) = \lambda \int_0^{\infty} K(x-\tau) f(\tau) d\tau ,$$

која претпоставља да $K(x)$ тежи нули експоненцијалном брзином, када се x увећава по апсолутној вредности.

Најзад M. Parodi је у низу радова које је објединио касније у једну монографију [15], користећи се симболичким рачуном, сводио извесне интегралне једначине на функционалне и на тај начин неке и решио. Истина, симболички рачун не води рачуна о прецизности, тј. не даје услове под којима све то важи, али свакако ти његови радови претстављају допринос теорији инте-

гралних једначина. Забележимо још да Э. Я. Риекстыньш [17] напомиње сличне резултате А. М. Эфрос-а [6]; до ове књиге нисам могао да дођем.

M. Parodi је покушао да уведе и извесну систематичност, наиме, да укаже на класе интегралних једначина које се могу на овај начин интегралити. Он посматра интегралну једначину

$$f(x) + \lambda \int_0^\infty K(x,t)\, f(t)\, dt = g(x), \qquad (У, 1)$$

где $k(x,t)$ има особине да је

$$\int_0^\infty e^{-sx} K(x,t)\, dx = \rho(s)\, e^{-t\psi(s)}. \qquad (У, 2)$$

Ова се једначина, под извесним допунским условима, Laplace-овом трансформацијом своди на функционалну

$$\varphi(s) + \lambda \rho(s) \varphi[\psi(s)] = \gamma(s), \qquad (У, 3)$$

где су $\varphi(s)$ и $\gamma(s)$ Laplace-ове трансформације функције $f(x)$ односно $g(x)$. Али M. Parodi решава, углавном, оне случајеве када је $\psi[\psi(s)] = s$, тј. када итерација функције $\psi(s)$ даје аргуменат s и даље проширује на случајеве када k-та итерација функције $\psi(s)$ даје аргуменат s.

Он је такође покушао да да и аналитички израз за језгро $K(x,t)$ које задовољава интегралну једначину (У, 2). Ти његови резултати могли би се уобличити у следећи став:

СТАВ А. *Нека су задовољени следећи услови:*

1. $a(x)$ и $b(x)$ *су L-функције* *)

2. *Ред*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} t^i\, a(x) * \overline{b(x)}^i,$$

где је

$$a(x) * b(x) = \int_0^x a(x-\tau)\, b(\tau)\, d\tau,$$

$$a(x) * \overline{b(x)}^i = a(x) * \underbrace{b(x) * b(x) \ldots * b(x)}_{i \text{ пута}},$$

конвергира и може се трансформисати Laplace-овом трансформацијом члан по члан.

*) Види дефиницију L-функције G. Doetsch-a [5a].

3. $\rho(s)$ *и* $\psi(s)$ *везане су са* $a(x)$ *и* $b(x)$ *релацијама*

$$\rho(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, a(t)\, dt,$$

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt.$$

Тада је

$$K(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\, t^i\, a(x) * \overline{b(x)}^i \qquad (\text{У}, 4)$$

решење, и то једино, интегралне једначине (У, 2).

Услов 3. овог става прави велико ограничење, пошто захтева да $\rho(s)$ и $\psi(s)$ буду l-функције *), тако да и неке једначине које сам расправља нису обухваћене овим ставом.

Према томе, ту постоје два проблема. Први, како изгледа језгро интегралне једначине (У, 1) која допушта ову методу. Тај проблем је интересантан како са становишта теорије интегралних једначина тако и са становишта Laplace-ове трансформације. Други проблем, решити такву интегралну једначину.

У овом раду решавана су оба питања углавном за једну одређену класу интегралних једначина.

2. Прва глава овог рада односи се на први проблем, наиме, у њој се расправља један специјалан случај једначина (У, 2), када су $\rho(s)$ и $\psi(s)$ степени од s, тј. једначина

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, K(x,t)\, dt = s^\mu e^{-ts^\nu} \qquad (\text{У}, 5)$$

Показано је за које μ и ν ова једначина има решење у класи L-функција, решења су дата помоћу Wright-овог уопштења Bessel-ових функција и најзад из самог облика једначине (У, 5) следи и услов јединствености тог решења. Осим тога испитиване су, колико је потребно за даљи рад, и извесне особине решења једначине (У, 5), а која се односе на понашање у нули и за велике вредности аргумента, о нулама тих функција и неки одређени интеграли у којима фигуришу та решења. Нађене особине претстављају извесно проширење резултата H. Pollard-a, J. Mikušinskog и L. Wlodarskog.

*) Види дефиницију l-функције G. Doetsch-a [5a].

У другој глави дефинисана је извесна интегрална трансформација чије је језгро функција која задовољава интегралну једначину (У, 5) $o < \nu < 1$. Затим су дати ставови који се односе на конвергенцију, Laplace-ову трансформацију овако дефинисане интегралне трансформације као и ставови Abel-ове и Tauber-ове природе.

Користећи се методом M. Parodi-a, да се интегрална једначина сведе Laplace-овом трансформацијом на функционалну једначину, као и резултатима прве и друге главе, у трећој глави решава се једна класа хомогених интегралних једначина која не спада у оне које решавао M. Parodi, наиме код којих се итерацијом не може добити аргуменат s.

За ову класу интегралних једначина показано је да је спектар сопствених вредности континуиран, дати су услови егзистенције и јединствености решења, када ова припадају одређеној класи функција. Најзад, дата су и сама решења. Осим тога, у овој глави дато је и опште решење једног специјалног случаја Schröder-ове функционалне једначине, наиме једначине

$$\varphi(s) = \lambda\,\varphi(s^n),$$

на коју се своди посматрана хомогена интегрална једначина.

У четвртој глави дате су примене добивених резултата: прво, решен је један проблем из провођења топлоте, дате су неке интегралне везе за Wright-ове функције и најзад дата је и допуна за таблицу Laplace-ове трансформације.

На крају, у петој глави, изнесене су функције које претстављају Wright-ову генерализацију Bessel-ових функција као и основни резултати о функцијама које се правилно понашају. Ова глава треба да омогући лакше читање претходних.

I. РЕШЕЊЕ ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$\int_0^\infty e^{-sx} K_{\mu,\nu}(x,t)\,dx = s^{\mu} e^{-ts^{\nu}} \tag{1,1}$$

1.1. У уводу смо видели да се као први проблем поставља: решити интегралну једначину (У,2). Напоменули смо да је тај проблем захватио и M. Parodi, али да је то он радио чисто симболичким рачуном, да су претпоставке сувише јаке и најзад да је аналитички израз за решење непогодан у том смислу што се из њега тешко види веза са елементарним или већ познатим функцијама.

У овој глави расправљаћемо интегралну једначину (1,1) која претставља специјалан случај једначине (У, 2), наиме када су $\rho(s)$ и $\psi(s)$ степени од s и доказаћемо следећи став:

СТАВ 1.I. *Интегрална једначина (1,1) има решења у класи L-функција само за* $0<\nu<1$, *а* μ *макакво или* $\nu\leqslant 0$, $\mu<0$. *Једино решење за те вредности* ν *и* μ *је:*

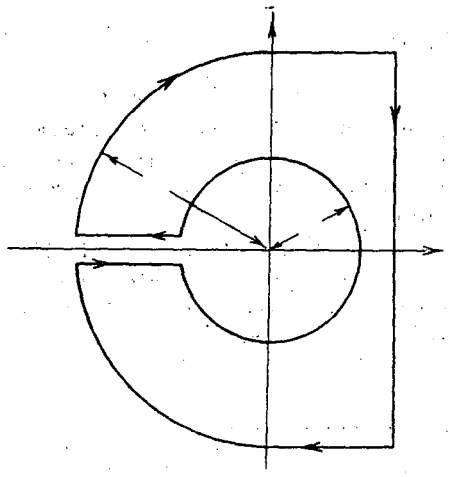
$$K_{\mu,\nu}(x,t)=x^{-\mu-1}\Phi(-\mu,-\nu;-tx^{-\nu}),$$

где је $\Phi(\beta,\rho;z)$ *Wright-ова генерализација Bessel-ове функције.*

Решења интегралне једначине (1,1) везана су, како се види, са Wright-овом генерализацијом Bessel-ових функција. Због тога смо у посебној глави (пета глава) изнели резултате о овим функцијама, па ћемо се у даљем раду на њих позивати.

Напоменимо да ћемо у даљем раду под s^ν сматрати само главну врдност.

Доказ става 1,I. Познато је, на основу понашања l-функције за велике вредности s, да мора бити $\nu<1$. Из истог разлога када је $\nu\leqslant 0$, мора да је и $\mu<0$. Према томе, интегрална једначина (1,1) може имати решење у класи L-функција само за $-\infty<\nu<1$.



Цртеж 1

Да би дошли и до самог решења једначине (1,1), пођимо од интеграла

$$\int_C s^\mu \exp(xs-s^\nu)\,ds=0, \qquad (1,2)$$

где је C контура са цртежа 1. Параметри μ и ν који улазе у овај интегаал могу узимати следеће вредности:

1. $0<\nu<1$, а μ макакво,
2. $\nu<0$ и $\mu<0$.

Интеграл (1,2) једнак је нули, пошто је подинтегрална функција регуларна у области коју затвара контура. Сем тога, подинтегрална функција на горњој и доњој четвртини круга тежи нули када $R\to\infty$, тј.

$$\lim_{R\to\infty} R^\mu e^{\mu\theta i}e^{xRe^{\theta i}-R^\nu e^{\nu\theta i}}\to 0,$$

а исто тако је и

$$\lim_{R\to\infty}(\xi\pm Ri)^\mu e^{x(\xi\pm Ri)-(\xi\pm Ri)^\nu}\to 0,\quad 0\leqslant\xi\leqslant x_0,$$

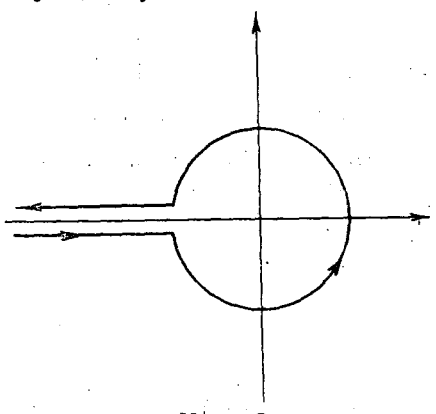
све под претпоставком да ν и μ узимају вредности под 1. или 2.

На основу познатог става ([5,а] страна 224) и интеграли дуж одговарајућих контура једнаки су нули, па је

$$\int_{C'} s^{\mu} e^{xs-s^{\nu}}\, ds =$$

$$= \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} s^{\mu} e^{xs-s^{\nu}}\, ds, \quad (1,3)$$

где је C' дато на цртежу 2. Како је $s^{\mu} e^{-s^{\nu}}$ за посматране ν и μ l-функција, то нађена релација (1,3) даје инверзију Laplace-овог интеграла из једначине (1,1) за $t = 1$, па је



Цртеж 2

$$K_{\mu,\nu}(x,1) = \int_{C'} s_{\mu}\, e^{xs-s^{\nu}}\, ds.$$

Извршимо у овом интегралу смену $xs = u$, $ds = du/x$ и добићемо

$$K_{\mu,\nu}(x,1) = x^{-\mu-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} u^{\mu} \exp\left(u - \frac{u^{\nu}}{t^{\nu}}\right) du =$$

$$= x^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu, -\nu; -x^{-\nu}),$$

где $\Phi(\beta, \rho; z)$ претставља Wright-ову генерализацију Bessel-ове функције (види (5,2) и (5,5)).

Да би добили $K_{\mu,\nu}(x,t)$, користићемо се познатом везом за Laplace-ов интеграл, наиме: *ако је*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \varphi(s),$$

тада је

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t/a)\, dt = a\,\varphi(as).$$

У нашем случају добивамо да је

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} x^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu, -\nu; -t/x^{\nu})\, dx = s^{\mu} e^{-ts^{\nu}},$$

па је

$$K_{\mu,\nu}(x,t) = x^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu,-\nu;-tx^{-\nu}).$$

Јединственост нађеног решења следи из јединствености инверзије Laplace-овог интеграла.

Тиме је доказан став 1,I.

Примедба 1. Напоменимо да се решење једначине (1,1) када је $\nu<0$, $\mu<0$ може добити на основу става А. Наиме, у том случају $\rho(s)$ и $\psi(s)$ су l-функције

$$\rho(s) = s^{\mu} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,\frac{x^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)}\,dx, \quad \mu<0,$$

$$\psi(s) = s^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,\frac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}\,dx, \quad \nu<0,$$

па је $a(x) = \dfrac{x^{-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)}$, а $b(x) = \dfrac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}$ и $a(x) * \overline{b(x)}^{i} = \dfrac{x^{-\mu-\nu i-1}}{\Gamma(-\mu-\nu i)}$.

Решење је тада дато редом:

$$K_{\mu,\nu}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(i+1)}\,t^i\,\frac{x^{-\mu-1}\,x^{-\nu i}}{\Gamma(-\mu-\nu i)}$$

$$= x^{-\mu-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-tx^{-\nu})^i}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(-\mu-\nu i)}$$

$$= x^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu,-\nu;-tx^{-\nu});$$

(види (5,1)).

Када је $\nu>0$ резултати M. Parodi-a не могу се искористити јер тада $\psi(s) = s^{\nu}$ није l-функција.

Овај став А, који обухвата резултате M. Parodi-a, може се нешто уопштити.

СТАВ Б. *Нека су задовољени следећи услови:*

1. *Дат је низ функција* $f_i(t)$ *и то такав да је*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f_i(t)\,dt = \rho(s)\,\psi^i(s)\,e^{-h\psi(s)}. \tag{1,4}$$

2. *Ред*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\,(t-h)^i f_i(x),$$

где је h константа $\geqslant 0$, *конвергира и нека се може трансформисати Laplace-овом трансформацијом члан по члан.*

Тада је

$$K(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (t-h)^i f_i(x) \tag{1,5}$$

решење, и то једино, интегралне једначине (У, 2).

Доказ.

$$\int_0^{\infty} K(x,t)\, e^{-sx}\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (t-h)^i \int_0^{\infty} e^{-sx} f_i(x)\, dx$$

$$= \rho(s)\, e^{-h\psi(s)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (t-h)^i \psi^i(s)$$

$$= \rho(s)\, e^{-h\psi(s)}\, e^{-(t-h)\psi(s)} = \rho(s)\, e^{-t\psi(s)}.$$

Ако функција $\psi(s)$ и $\rho(s)$ задовољавају услове из става А, тада је $h = 0$ и $f_0(x) = a(x)$, $f_i(x) = a(x) * \overline{b(x)^i}$.

Показаћемо да овај став обухвата и примере који не задовољавају услове става А, а које сам M. Parodi користи.

Први пример, $K(x,t) = e^{-t} I_0(2\sqrt{xt})$ (види [15] страна 59) задовољава једначину (У,2), тј.

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, e^{-t} I_0(2\sqrt{xt})\, dx = \frac{1}{s} e^{-t\frac{s-1}{s}};$$

$\psi(s) = \dfrac{s-1}{s}$ није l-функција, па не задовољава услов 3. става А. Међутим, према познатој вези између Bessel-ових функција и Laguerre-ових полинома $L_i(x)$ ([12] страна 109) имамо:

$$e^{-t} I_0(2\sqrt{xt}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} L_i(x). \tag{1,6}$$

Ред на десној страни је облика (1,5) за $h = 0$ и $f_i(x) = L_i(x)$. Како је

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} L_i(x)\, dx = \frac{1}{s} \left(\frac{s-1}{s}\right)^i,$$

то $f_i(x) = L_i(x)$ задовољава релацију облика (1,4).

Развијмо сада још функцију $1/s\ e^{-t\frac{s-1}{s}}$ у ред по степенима од t

$$\frac{1}{s}\ e^{-t\frac{s-1}{s}} = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-t)^i}{i!}\left(\frac{s-1}{s}\right)^i$$

и видимо да се у реду (1,6) може извршити Laplace-ова трансформација члан по члан.

Други пример је функција $K(x,t)=1/\sqrt{x}\ e^{-t^2/4x}$ која такође задовољава једначину (У,2)

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}e^{-\frac{t^2}{4x}}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,e^{-t\sqrt{s}},$$

а $\psi(s)=\sqrt{s}$ није l-функција. Међутим, може се показати на основу познате везе

$$\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{t^2}{4x}} = \sqrt{2}\ e^{-\frac{1}{8}x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1-t)^i}{i!}D_i\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)(2x)^{-\frac{i+1}{2}} \qquad (1,7)$$

да ово језгро задовољава услове става Б.

Овде смо са $D_\nu(z)$ обележили Weber-Hermite-ову функцију која је решење диференцијалне једначине

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(\nu+{}^1/_2-{}^1/_4\,z^2)\,u=0.$$

Примедба 2. Случај $\nu>0$ који се не може уклопити у став А или Б може се, користећи се релацијом (1,3), добити директно из формуле за инверзију Laplace-ове трансформације

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{ts}s^{\mu}e^{-s^{\nu}}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}e^{ts}s^{\nu k+\mu}\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{C'}\frac{(-)^k}{\Gamma(k+1)}e^{ts}s^{\nu k+\mu}\,ds\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}\,\frac{t^{-(\nu k+\mu+1)}}{\Gamma(-\nu k-\mu)}\\ &= t^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu,-\nu;-1/t^{\nu}).\end{aligned}$$

1.2. *СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ ЈЕДНАЧИНЕ* (1,1).

Неки специјални случајеви једначине (1,1) већ су познати у литератури и имају велику примену. Ми ћемо као први специјалан случај посматрати када је $\mu>-1$, $0<\nu<1$.

Показаћемо да се може, у овом специјалном случају, решење интегралне једначине (1,1) написати у облику Laplace-овог интеграла. Тиме истовремено показујемо да се одговарајућа Wright-ова функција може написати у том облику.

Пођићемо од већ познатог интеграла

$$\int_C s^{\mu} \exp(ts - s^{\nu})\, ds = 0, \quad t > 0, \quad \mu > -1,$$

где је C контура са цртежа 1. Када пустимо да $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, добићемо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} s^{\mu} \exp(ts - s^{\nu})\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} x^{\mu} \exp(-\mu\pi - tx - x^{\nu} e^{-\nu\pi i})\, dx$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} x^{\mu} \exp(\mu\pi i - tx - x^{\nu} e^{\nu\pi i})\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tx} x^{\mu} e^{-x^{\nu}\cos\nu\pi} \sin(x^{\nu} \sin\nu\pi - \mu\pi)\, dx,$$

одакле следи да је

$$K_{\mu,\nu}(x,1) \equiv K_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ux} u^{\mu} e^{-u^{\nu}\cos\nu\pi} \sin(u^{\nu} \sin\nu\pi - \mu\pi)\, du, \quad 0 < \nu < 1, \quad \mu > -1. \tag{1,8}$$

Међутим још специјалнији случај када је $\mu = 0$ је највише испитиван и има велики значај за примену симболичког рачуна на парцијалне једначине. И нас ће у овом раду тај случај највише интересовати те ћемо се нешто више задржати на особинама оне непрекидне функције која припада класи L-функција и која задовољава интегралну једначину (1,1) за $0 < \nu < 1$ и $\mu = 0$.

H. Pollard [16] је показао да функција $K_{0,\nu}(x,1)$ има аналитички израз у облику интеграла

$$K_{0,\nu}(x,1) \equiv K_{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xu} e^{-u^{\nu}\cos\nu\pi} \sin(u^{\nu} \sin\nu\pi)\, du, \tag{1,9}$$

или у облику реда

$$K_{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \sin\pi\alpha k \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{x^{\alpha k + 1}} \tag{1,10}$$

до кога је Humbert [9] дошао чисто формалним рачуном. Ако упоредимо релације (1,8) и (1,9) видимо да резултат H. Pollard-a следи из (1,8) за $\mu = 0$. Осим тога, H. Pollard показује да функција $K_\nu(x)$ има следеће особине:

a. да је скоро свуда позитивна,

b. $\int_0^\infty K_\nu(x)\,dx < \infty$.

L. Wlodarski [21], на основу једне теореме L. Post-a, показује да је непрекидно решење $K_\nu(x) \geqslant 0$, $x > 0$.

J. Mikušinski [13], поред неких већ наведених резултата, показује да је за λ реално и позитивно $K_\nu^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2\ldots$ као и $K_\nu(0) = 0$.

Функције $K_\nu(x)$ за извесне вредности ν своде се на познате функције; тако је за $\nu = {}^1/_2$

$$K_{1/2}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-xu}\sin u^{1/2}\,du = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}}\,e^{-\frac{1}{4x}},$$

а за $\nu = {}^2/_3$

$$K_{2/3}(x) = \frac{-1}{2(3\pi)^{1/2}x}\,e^{-\frac{2}{27x^2}}\,W_{-1/2,-1/6}\left(-\frac{4}{27x}\right),$$

где је $W_{\mu,\nu}(x)$ Whittaker-ова функција која задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{d^2W}{dx^2} + (-{}^1/_4 + \mu/x + \nu^2/(4x^2))\,W = 0.$$

Поред ових познатих особина показаћемо још неке које ћемо користити у даљем раду:

1. $K_\nu(x) \sim \sin\nu\pi\,\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}$, $x \to \infty$.

Ова особина следи из релације (1,8) на основу става Abel-ове природе за Laplace-ову трансформацију. Наиме, подинтегрална функција у релацији (1,8) понаша се као $u^\nu \sin\nu\pi$ када $u \to 0$, па отуда следи особина 1.

2. Понашање $K_\nu(x)$ за $x \to 0$.

Видели смо у ставу 1,I да је

$$K_{\theta,\nu}(x,1) \equiv K_\nu(x) = 1/x\,\Phi(0, -\nu; -x^{-\nu})$$
$$= y^{1/2}e^{-y}\left\{\sum_{m=0}^{M} A_m y^{-m} + O(y^{-M})\right\},$$

где је $y = (1-\nu)[\nu^{\nu}(x-\nu)]^{1/(1-\nu)}$, а $\Phi(\beta,\rho;z)$ в ећ поменута Wright-ова генерализација Bessel-ових функција (види 5. глава).

Овим смо добили прецизнији резултат од Микушинског који смо навели на почетку овог дела.

3. $K_{\nu}(x) > 0$ за $\infty > x > 0$.

Као што смо видели, L. Wlodarski је показао да је $K_{\nu}(x) \geqslant 0$ $x > 0$. Да би побољшали ову релацију, користићемо се ставом L. Post-a који гласи:

Ако је функција $\overset{*}{f}(x)$ *непрекидна за* $x > 0$ *и интеграл*

$$\overset{*}{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \overset{*}{f}(t)\, dt$$

конвергира за $R\{s\} > x_0$, *тада је*

$$\overset{*}{f}(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \overset{*}{F}{}^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right).$$

Обележимо са $L_{\nu}(s) \equiv e^{-s^{\nu}}$, па је

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} K_{\nu}(x)\, dx = L_{\nu}(s).$$

Одмах се види да је

$$(-1)\, L'_{\nu}(s) = \nu\, s^{\nu-1} L_{\nu}(s).$$

Исто тако лако се види да је и $(-1)^k L_{\nu}^{(k)}(x)$, $k = 0, 1\ldots$ монотоно опадајућа функција и већа од нуле за $x > 0$. Та особина следи директно из интеграла

$$(-1)^k L_{\nu}^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{k} K_{\nu}(x)\, dx,$$

када се узме у обзир да је $K_{\nu}(x) \geqslant 0$, $x \geqslant 0$.

Формираћемо сада помоћну функцију

$$\Phi_{\nu}(t) = e^{-t} \int_0^{t} \frac{K_{\nu}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\, d\tau$$

за коју сигурно знамо да је већа од нуле, $t>0$, јер је према Wlodarskom $K_\nu(x)\geqslant 0$, $x>0$. Ова функција има Laplace-ову трансформацију

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\Phi_\nu(t)\,dt=\Gamma(1-\nu)\,(s+1)^{\nu-1}\,L_\nu(s+1).$$

Користећи се особином (1,11) добићемо, према Post-овој теореми, за функцију $\Phi_\nu(t)$:

$$\Phi_\nu(t)=\frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}(-1)^{k+1}\,L_\nu^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}+1\right).$$

Сада је лако показати особину 3. функције $K_\nu(x)$, наиме, $K_\nu(x)>0$, $\infty>x>0$. Треба само применити Post-ову теорему на функцију $x\,K_\nu(x)$ и добивени резултат упоредити са одговарајућим за функцију $\Phi_\nu(t)$, тј.

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}\,t\,K_\nu(t)&=\frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}(-1)^{k+1}\,L_\nu^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)\\&\geqslant\frac{\Gamma(1-\nu)}{\nu}\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}L_\nu^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}+1\right)\\&\geqslant\Phi_\nu(t)>0,\quad\infty>t>0.\end{aligned}$$

Одакле следи тражена особина.

У основи даљих расматрања лежи функција $x\,K_\nu(x)$ коју ћемо обележити са $F_\nu(x)$, тј. $x\,K_\nu(x)=F_\nu(x)$. Она, према досадашњем излагању, има следеће особине:

1. $$\frac{1}{\nu}\int_0^\infty e^{-st}\,F_\nu(t)\,dt=s^{\nu-1}e^{-s^\nu},$$

односно

$$\int_0^\infty e^{-st}\,F_\nu(t/x^{1/\nu})\,\frac{dt}{\nu x}=s^{\nu-1}\,e^{-xs^\nu},$$

2. $$F_\nu(x)\sim\frac{1}{\pi}\sin\nu\pi\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{x^\nu},\quad x\to\infty,$$

3. $$F_\nu(x)=a^{1/2}\,x^{-\frac{\nu}{2(1-\nu)}}e^{-a\,x^{-\frac{\nu}{1-\nu}}}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}A_m\,a^{-m}\,x^{\frac{\nu}{1-\nu}}+O\left(a^{-M}\,x^{\frac{M\nu}{1-\nu}}\right)\right\},$$

$$a=(1-\nu)^{\frac{\nu}{1-\nu}}$$

4. $F_\nu(x) > 0, \quad 0 < x < \infty.$

Најзад показаћемо да је и

5. $$\int_0^\infty F_\nu\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^{1-\nu\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)} \equiv C_{\alpha,\nu}, \quad \alpha > -1.$$

Доказ особине 5. — На основу предњих особина види се да овај интеграл конвергира. Уведимо параметар x помоћу смене $t = \tau/x$, па ћемо добити:

$$\int_0^\infty F_\nu(x/\tau)\,\tau^{\nu\alpha-1}\,d\tau = C_{\alpha,\nu}\,x^{\nu\alpha}.$$

Извршимо формално нешто модифицирану Laplace-ову трансформацију леве и десне стране ове релације користећи се особином 1. функције $F_\nu(t)$

$$C_{\alpha,\nu}\frac{\Gamma(\alpha\nu+2)}{s^{\alpha\nu+2}} = \int_0^\infty e^{-sx}\,x\,dx\int_0^\infty F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)t^{\nu\alpha-1}\,dt$$

$$= \int_0^\infty t^{\nu\alpha-1}\,dt\int_0^\infty e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)dx$$

$$= \nu\,s^{\nu-2}\int_0^\infty t^{\nu(\alpha+1)-1}(1-\nu+\nu\,s^\nu t^\nu)e^{-s^\nu t^\nu}\,dt.$$

Ако још извршимо смену $s^{\nu-1}t^\nu = u$, добићемо

$$C_{\alpha,\nu}\frac{\Gamma(\alpha\nu+2)}{s^{\alpha\nu+2}} = s^{\alpha(1-\nu)-1}\int_0^\infty e^{-su}\left[\nu s u^{\alpha+1} + (1-\nu)u^\alpha\right]du$$

$$= s^{\alpha(1-\nu)-1}\left(\nu s\,\frac{\Gamma(\alpha+2)}{s^{\alpha+2}} + (1-\nu)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right)$$

$$= \frac{(\alpha\nu+1)\,\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha\nu+2}},$$

одакле следи да је

$$C_{\alpha,\nu} \equiv \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}.$$

Остало нам је да покажемо исправност извршене размене реда интегрaљења. Зато ћемо показати, прво да је функција $e^{-sx}\,x\,F_\nu(x/t)\;t^{\nu\alpha-1}$, $R\{s\}>0$, апсолутно интеграбилна у размаку $0\leqslant t\leqslant\infty$, а за свако $x\geqslant 0$.

Из особина функције $F_\nu(t)$ следи да је

$$\left(\frac{x}{t}\right)^\nu F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)<A,\quad \frac{x}{t}\geqslant 0;$$

према томе је

$$e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)t^{\nu\alpha-1}\leqslant A\,e^{-sx}\,x^{1-\nu}\,t^{\nu(\alpha+1)-1},$$

одакле следи тврђење о апсолутној интеграбилности.

Исто тако лако је показати да је и

$$t^{\nu\alpha-1}\int_0^\omega e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)dx,\quad R\{s\}>0$$

апсолутно интеграбилна функција у размаку $0\leqslant t\leqslant\infty$, за свако $\omega>0$, наиме,

$$t^{\nu\alpha-1}\int_0^\omega e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)dx<t^{\nu\alpha-1}\int_0^\infty e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)dx$$

$$<\nu\,e^{-s^\nu t^\nu}\,s^{\nu-2}\,t^{\nu(\alpha+1)-1}\,(1-\nu+\nu s^\nu t^\nu),$$

одакле следи апсолутна интеграбилност по t у наведеном интервалу независно од ω.

Сада је лако показати исправност размене реда интегрaљења, наиме,

$$\int_0^\omega e^{-sx}\,x\,dx\int_0^\infty F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)t^{\nu\alpha-1}\,dt=\int_0^\infty t^{\nu\alpha-1}\,dt\int_0^\omega e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)dx.$$

Ова размена дозвољена је јер смо показали да је $e^{-sx}\,x\,F_\nu(x/t)\,t^{\nu\alpha-1}$ апсолутно интеграбилна у датом интервалу, а за свако $x\geqslant 0$.

Даље је

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega e^{-sx}\,x\,dx\int_0^\infty F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)t^{\nu\alpha-1}\,dt=\int_0^\infty t^{\nu\alpha-1}\,dt\int_0^\infty e^{-sx}\,x\,F_\nu\left(\frac{x}{t}\right)dx.$$

Овде смо смели унети знак за лимес по g интеграл, јер је $t^{\nu\alpha-1}\int_0^\omega x F_\nu(x/t)\,dx$ такође апсолутно интеграбилна функција за свако $\omega > 0$.

II. ТРАНСФОРМАЦИЈА $P_\nu(\sigma, f)$

2.1. *ДЕФИНИЦИЈА ТРАНСФОРМАЦИЈЕ* $P_\nu(\sigma, f)$

Трансформацију $P_\nu(\sigma, f)$ функције $f(x)$ дефинисаћемо на следећи начин:

$$P_\nu(\sigma, f) = \int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x},$$

где за $x^{1/\nu}$ узимамо главну вредност, а о функцији $f(x)$ претпостављамо:

a. $f(x)$ је дефинисано за свако $0 \leqslant x < \infty$ сем можда у изолованим тачкама које не могу у коначном имати тачку нагомилавања.

b. $f(x)$ је интеграбилна функција у сваком коначном размаку, сем можда у коначно много тачака у којима несвојствен интеграл апсолутно конвергира.

Језгро ове трансформације је нормирано, тј.

$$\int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) \frac{dx}{\nu x} = 1.$$

Да би то видели треба само увести смену $x^{1/\nu} = \sigma z$ и горња релација се своди на

$$\int_0^\infty F_\nu(1/z) \frac{dz}{z} = 1$$

која је исправна на основу особине 5. функције $F_\nu(z)$ (в. 1 глава).

Упоредићемо ову трансформацију са већ познатим сличним трансформацијама. Видели смо да је

$$F_\nu(t) = \Phi(0, -\nu; -1/t^\nu), \quad 0 < \nu < 1.$$

Према томе, у основи $P_\nu(\sigma, f)$ трансформације лежи Wright-ова генерализација Bessel-ових функција. Већ су R. P. Agarwal [2] и Gupta [8] користили Wright-ову генерализацију за језгро, извесне интегралне трансформације. Agarwal уопштава Hankel-ову

трансформацију узимајући за језгро уместо Bessel-ове функције Wright-ову функцију $\Phi(\mu, \nu; z)$, али за $\nu > 0$. Његова трансформација тада има облик

$$g(p) = (1/2)^{\mu} \int_0^{\infty} (pt)^{\mu+1/2} \Phi\left(1 + \mu, \nu; -\frac{p^2 t^2}{4}\right) f(t)\, dt.$$

За $\nu = 1$ она се своди на Hankel-ову. И H. C. Gupta*) ради са сличном трансформацијом.

Пошто је наш случај различит, то се $P_\nu(\sigma, f)$ трансформација може схватити као нека врста генерализације Gauss-ове трансформације, јер је

$$P_{1/2}(\sigma, f) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\sigma}} f(x)\, dx.$$

2.2. *СТАВОВИ О $P_\nu(\sigma, f)$ ТРАНСФОРМАЦИЈИ*

СТАВ 2.1. *Ако трансформација $P_\nu(\sigma, f)$ конвергира за неко $\sigma = \sigma_0$, онда она конвергира за свако $0 < \sigma < \sigma_0$. Ако је још $f(x) \equiv 0$ за $0 \leqslant x < \eta$, тада је*

$$P_\nu(\sigma, f) = O\left(e^{-c\left(\frac{\eta}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}}\right), \quad c < (1-\sigma)\,\sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Пре него што пређемо на доказ овог става, доказаћемо следећи помоћни став:

ПОМОЋНИ СТАВ. *За функцију*

$$D_\nu(x) \equiv F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, F_\nu^{-1}(\sigma_0/x^{1/\nu})\, \frac{1}{\nu^2 x^2}$$

када је $\sigma \neq 0$, важе следеће релације:

$$|D_\nu(x)| \leqslant A\, e^{-b\left(\frac{x}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}\left[1-(\sigma/\sigma_0)^{\frac{1}{1-\nu}}\right]}, \quad x \to \infty \tag{2,1}$$

и

$$|D'_\nu(x)| \leqslant B\, e^{-b\left(\frac{x}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}\left[1-(\sigma/\sigma_0)^{\frac{1}{1-\nu}}\right]}, \tag{2,2}$$

где је $b < (1-\nu)\,\nu^{\frac{\nu}{1-\nu}}$.

*) Рад H. C. Gupta-е познајем само из реферата у *Math. Rew.* V. **10** (1949), p. 374.

Доказ помоћног става. Како је

$$\frac{1}{\nu x} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) = \frac{1}{\nu x} \Phi(0, -\nu; -x/\sigma^\nu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^\nu} \Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu),$$

то је

$$D_\nu(x) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^\nu \frac{\Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu)}{\Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu)}.$$

На основу теореме за Wright-ове функције, наведене у 5. глави, следи релација (2,1).

Ако сада искористимо и другу релацију (5,3) за Wright-ове функције, добићемо за $D'_\nu(x)$

$$D'_\nu(x) = \frac{(\sigma_0/\sigma)^\nu}{\Phi^2(-\nu+1, -x/\sigma_0^\nu)} \left\{ \left(-\frac{1}{\sigma^\nu}\right) \Phi\left(-2\nu+1, -\frac{x}{\sigma^\nu}\right) \Phi\left(-\nu+1, -\frac{x}{\sigma_0^\nu}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma_0^\nu} \Phi\left(-\nu+1, -\frac{x}{\sigma^\nu}\right) \Phi\left(-2\nu+1, -\frac{x}{\sigma_0^\nu}\right) \right\},$$

где смо, краткоће ради, функцију $\Phi(\mu, -\nu; z)$ бележили са $\Phi(\mu; z)$.

На основу исте теореме као и за $D_\nu(x)$ добивамо да је исправна и релација (2,2), па је тиме и помоћни став доказан.

Доказ става 2,I. Доказаћемо да се за свако унапред дато $\varepsilon > 0$ може наћи такво ω_1 и ω_2, $\omega_1 < \omega_2$, да је

$$|J| = \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x} \right| < \varepsilon$$

за свако $0 < \sigma < \sigma_0$.

Обележимо зато са $\psi(\sigma_0, x)$:

$$\psi(\sigma_0, x) \equiv \int_0^x F_\nu(\sigma_0/t^{1/\nu}) f(t) \frac{dt}{\nu t}.$$

Ова функција остаје ограничена када $x \to \infty$, јер $P_\nu(\sigma_0, f)$ конвергира.

Користећи се парцијалном интеграцијом и доказаним помоћним ставом, добићемо:

$$|J| = \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) F_\nu^{-1}(\sigma_0/x^{1/\nu}) \frac{1}{\nu^2 x^2} F_\nu(\sigma_0/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x} \right|$$

$$\leqslant \left| \psi(\sigma_0, x) D_\nu(x) \right|_{\omega_1}^{\omega_2} + \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} \psi(\sigma_0, x) D'_\nu(x)\, dx \right|$$

$$\leqslant c\, e^{-b\left(\frac{\omega_1}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}} \left[1 - (\sigma/\sigma_0)^{\frac{1}{1-\nu}} \right] < \varepsilon$$

за подесно изабрано ω_1 и $\omega_2 > \omega_1$, а за $0 < \sigma < \sigma_0$.

Тиме смо доказали први и други део става 2,I.

СТАВ 2,II. *Ако Laplace-ова трансформација функције* $f(x)$ *конвергира за неко* $s = s_0 > 0$, *онда* $P_\nu(\sigma, f)$ *трансформација конвергира униформно за свако* $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 < \infty$.

Доказ. Претпоставимо да је

$$\psi_1(s_0, \infty) \equiv \int_0^\infty e^{-s_0 x} f(x)\, dx < M_1;$$

треба доказати да је и

$$\int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x} < N$$

за $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$.

Изаберимо ω_1 тако да је за $x \geqslant \omega_1$, $\frac{b}{\sigma^{\nu/(1-\nu)}} x^{\frac{1}{1-\nu}} > s_1 x$, $s_1 > s_0$; тада је

$$|J_\nu(\sigma)| = \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, e^{s_0 x} e^{-s_0 x} f(x) \frac{dx}{\nu x} \right|$$

$$\leqslant F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) \frac{1}{\nu x} e^{s_0 x} \left| \psi_1(s_0, x) \right|_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$+ N \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\nu x} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, e^{s_0 x} \right] \right| dx.$$

Како је за $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 < \infty$

$$\frac{1}{\nu x} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) < c\, e^{-b(x^{1/\nu}/\sigma)^{\frac{\nu}{1-\nu}}} < c\, e^{-s_1 x}$$

и

$$\left| \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\nu x} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, e^{s_0 x}\right]\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sigma^{2\nu}} \Phi(-2\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu)\, e^{s_0 x}\right| + \left| s_0\, e^{s_0 x} \frac{1}{s^\nu} \Phi(-\nu+1, -\nu; -x/\sigma^\nu)\right|$$

$$\leqslant c\, e^{s_0 x} e^{-b(x^{1/\nu}/\sigma)^{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

$$\leqslant c\, e^{-s_1(1 - s_0/s_1)},$$

то се $|J_\nu(\sigma)|$ може, за подесно изабрано ω_1, учинити произвољно мало за свако $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0 < \infty$.

СТАВ 2,III. *Нека је $f(t)$ L-функција и нека је*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \varphi(s);$$

тада је

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^\infty F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau)\, \frac{d\tau}{\nu\tau} = s^{\nu-1}\varphi(s^\nu)$$

Доказ. Треба доказати да је

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^\infty F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau)\, \frac{d\tau}{\nu\tau} = \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-st} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, \frac{dt}{\nu\tau},$$

одакле, на основу особине 1. функције $F_\nu(t)$ (види 1. глава), следи релација коју тврди став 2,III.

Очигледно је да интеграл

$$J(0,\infty) \equiv \int_0^\infty e^{-st} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, \frac{dt}{\nu\tau}$$

униформно конвергира у сваком коначном размаку $0 < \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2 < \infty$ што се види када се, стављајући $t\tau^{1/\nu}$ на место t у горњи интеграл, он напише као Laplace-ова трансформација функције $F_\nu(t)$.

Сада ћемо показати да је

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau)\, d\tau \int_0^{\infty} e^{-st} F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) \frac{dt}{\tau\nu} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau}.$$

На основу става G. Fubini-a ова је релација тачна кад год је $f(\tau)$ ограничено у размаку $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Како $f(\tau)$ може имати само коначан број тачака у којима она није коначна, али је апсолутно интеграбилна, то је очигледно да ова релација важи уопште.

Остаје још да покажемо да је

$$\lim_{\tau_1 \to 0,\, \tau_2 \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_0^{\infty} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau}.$$

За то је довољно да покажемо да је

$$\lim_{\tau_1 \to 0} I_1 = \lim_{\tau_1 \to 0} \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_0^{\tau_1} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = 0$$

и

$$\lim_{\tau_2 \to \infty} I_2 = \lim_{\tau_2 \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_{\tau_2}^{\infty} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} = 0.$$

Покажимо, прво, да се $|I_1(\tau_1') - I_1(\tau_1'')|$ може учинити произвољно мало за подесно изабрано τ_1' и τ_1'', $\tau_1' > \tau_1''$.

$$|I_1(\tau_1') - I_1(\tau_1'')| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_{\tau_1''}^{\tau_1'} F_\nu(t/\tau^{1/\nu})\, f(\tau) \frac{d\tau}{\nu\tau} \right|$$

$$= \left| s^{\nu-1} \int_{\tau_1''}^{\tau_1'} e^{-s^\nu \tau}\, f(\tau)\, d\tau \right|$$

$$\leqslant s^{\nu-1} e^{-s^\nu \tau_1''} \int_{\tau_1''}^{\tau_1'} |f(\tau)|\, d\tau.$$

Видимо да се за свако унапред дато $\varepsilon > 0$ може наћи $\tau_1' > \tau_1'' > 0$ да је $|I_1(\tau_1') - I_1(\tau_1'')| < \varepsilon$, па према томе је и $\lim I_1(\tau_1) = 0$, $\tau_1 \to 0$;

На исти начин може се показати и за I_2

$$|I_2(\tau_2') - I_2(\tau_2'')| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_{\tau_2''}^{\tau_2'} F_\nu(t/\tau^{1/\nu}) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau\nu} \right|$$

$$= \left| s^{\nu-1} \int_{\tau_2''}^{\tau_2'} e^{-\tau s^\nu} f(\tau)\, d\tau \right| < \varepsilon$$

на основу основног става о Laplace-овим интегралима, одакле следи да је $\lim I_2(\tau_2) = 0$, $\tau_2 \to \infty$. Тиме смо доказали став 2,III.

СТАВ 2,IV. *Нека трансформација*

$$P_\nu(\sigma, f) = \int_0^{\infty} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu}) f(x) \frac{dx}{\nu x}$$

конвергира за $\sigma = \sigma_0$ *и нека* $\dfrac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$, *осцилира између коначних граница када* $x \to 0$; *тада је*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})} \leqslant \liminf_{\sigma\to 0} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\sigma\to 0} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma)} \leqslant \limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

Доказаћемо, прво, следеће помоћне ставове:

ПОМОЋНИ СТАВ I. *Нека је* $L(z)$ *споропроменљива функција,* $\alpha > -1$, *тада је*

$$\int_0^{\infty} F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, x^\alpha L(x^{1/\nu}) \frac{dx}{\nu x} \sim C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma), \quad \sigma \to 0,$$

где је

$$C_{\alpha,\nu} = \int_0^{\infty} F_\nu\left(\frac{1}{z}\right) z^{\nu\alpha-1}\, dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}.$$

Доказ помоћног става I. Нека је $a>0$ и $0<\gamma<\alpha+1$; тада је

$$J(\sigma)=\frac{1}{\nu\,\sigma^{\nu\alpha}\,L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\,x^\alpha\,L(x^{1/\nu})\frac{dx}{\nu x}$$

$$=\frac{1}{L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(1/z)\,z^{\nu\alpha-1}\,L(z\sigma)\,dz$$

$$=\frac{1}{\sigma^\gamma L(\sigma)}\int_0^a F_\nu(1/z)\,z^{\nu\alpha-1-\gamma}(z\sigma)^\gamma L(z\sigma)\,dz+$$

$$+\frac{1}{\sigma^{-\gamma}L(\sigma)}\int_a^\infty F_\nu(1/z)\,z^{\nu\alpha-1+\gamma}(\sigma z)^{-\gamma}L(z\sigma)\,dz.$$

На основу особине C. 1. функција које се правилно понашају (види 5. глава)

$$J(\sigma)\leqslant\frac{P_1(a\sigma)}{\sigma^\gamma L(\sigma)}\int_0^a F_\nu(1/z)\,z^{\nu\alpha-1-\gamma}\,dz+$$

$$+\frac{P_2(a\sigma)}{\sigma^{-\gamma}L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(1/z)\,z^{\nu\alpha-1+\gamma}\,dz,$$

па је

$$\limsup_{\sigma\to0}J(\sigma)\leqslant a^\gamma\int_0^a F_\nu(1/z)\,z^{\nu\alpha-1-\gamma}+a^{-\gamma}\int_a^\infty F_\nu(1/z)z^{\nu\alpha-1+\gamma}\,dz.$$

Како ово важи за произвољно мало γ, то се може пустити да $\gamma\to0$, па је

$$\limsup_{\sigma=0}J(\sigma)\leqslant\int_0^\infty F_\nu(1/z)\,z^{\nu\alpha-1}\,dz=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}.$$

Сличним поступком из особине C. 2. (5. глава) следи

$$\liminf_{\sigma=0}J(\sigma)\geqslant\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}$$

и тиме је доказан помоћни став I.

ПОМОЋНИ СТАВ II. *Нека* $P_\nu(\sigma_0, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}))$ *конвергира и нека* $\varepsilon(x) \to 0$ *када* $x \to 0$, *тада је*

$$\int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} = o(\sigma^\nu L(\sigma)).$$

Доказ помоћног става II. Изаберимо $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ тако да буде

$$|\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon \Gamma(\nu\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \eta$$

Ако поред тога користимо још други део става 2,I, добићемо:

$$\left| \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} \right| \leqslant \int_0^\eta F_\nu(\sigma/t^{1/\nu}) |\varepsilon(t)|\, t^\alpha L(t) \frac{dt}{\nu t} +$$

$$+ \left| \int_\eta^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} \right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon \Gamma(\nu\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} +$$

$$+ o(\sigma^{\nu\alpha} L(\sigma))$$

$$\leqslant \varepsilon\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma) + o(\sigma^{\nu\alpha} L(\sigma)).$$

Тиме је и помоћни став II доказан.

Доказ става 2,IV. На основу претпоставке о функцији $f(x)$ можемо ставити:

$$f(x) \leqslant \bar{a}\, x^\alpha L(x^{1/\nu}) + \varepsilon(x)\, x^\alpha L(x^{1/\nu}),$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ када $x \to 0$, а $\bar{a}$ је $\limsup \dfrac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$ када $x \to 0$. Тада важи релација

$$P_\nu(\sigma, f) \leqslant \bar{a} \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t} +$$

$$+ \int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})\, \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t^{1/\nu}) \frac{dt}{\nu t},$$

или на основу помоћних ставова I и II

$$\limsup_{\sigma\to 0}\frac{P_\nu(\sigma,f)}{C_{\alpha,\nu}\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\leqslant\limsup_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

На исти начин се доказује да је и

$$\liminf_{\sigma\to 0}\frac{P(\sigma,f)}{C_{\alpha,\nu}\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\geqslant\liminf_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

За овај став важи дуалан који се у принципу исто доказује. Тај став гласи:

СТАВ 2,IV*. *Ако* $\dfrac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$, $\alpha>-1$ *осцилира између коначних граница када* $x\to\infty$, *тада је*

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}\leqslant\liminf_{\sigma\to\infty}\frac{P_\nu(\sigma,f)}{C_{\alpha,\nu}\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\leqslant$$

$$\leqslant\limsup_{\sigma\to\infty}\frac{P_\nu(\sigma,f)}{C_{\alpha,\nu}\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

Из ова два става могу се извести низ других који претстављају њихове специјалне случајеве. Пошто ћемо се у даљем раду позивати на њих, то ћемо их посебно и формулисати.

СТАВ 2,V. *Нека* $P_\nu(\sigma_0,f)$ *конвергира и* $f(x)$ *осцилира између коначних граница када* $x\to 0\,(x\to\infty)$; *тада је*

$$\liminf_{\substack{x\to 0\\(\sigma\to\infty)}}f(x)\leqslant\liminf_{\substack{\sigma\to 0\\(\sigma\to\infty)}}P_\nu(\sigma,f)\leqslant\limsup_{\substack{\sigma\to 0\\(\sigma\to\infty)}}P_\nu(\sigma,f)\leqslant\limsup_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}}f(x).$$

СТАВ 2,VI. *Ако* $P_\nu(\sigma_0,f)$ *конвергира и*

$$f(x)\sim x^\alpha L(x^{1/\nu}),\quad x\to 0\,(x\to\infty),$$

тада је и

$$P_\nu(\sigma,f)\sim C_{\alpha,\nu}\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma),\quad \sigma\to 0\,(\sigma\to\infty).$$

СТАВ 2,VII. *Нека* $P_\nu(\sigma_0,f)$ *конвергира и*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}}f(x)=A;$$

тада је и

$$\lim_{\substack{\sigma\to 0\\(\sigma\to\infty)}}P_\nu(\sigma,f)=A.$$

Најзад, користећи се општим ставом Tauber-ове природе N. Wiener-a, доказаћемо за нашу трансформацију $P_\nu(\sigma, f)$ инверзан став претходним ставовима. Тај став N. Wiener-a ([5, a] страна 521) гласи:

Нека $K_1(t)$ припада класи $L^1(0,\infty)$ и нека има особину да је

$$\int_0^\infty K_1(t)\, t^{iy}\, dt \neq 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

Ако је за неку I-функцију $\mathfrak{F}(t)$ која је ограничена у $(0,\infty)$

$$\lim_{s\to 0} s \int_0^\infty K_1(st)\, \mathfrak{F}(t)\, dt = A \int_0^\infty K_1(t)\, dt,$$

то је за свако друго језгро $K_2(t)$ које припада $L^1(0,\infty)$ такође

$$\lim_{s\to 0} s \int_0^\infty K_2(ts)\, \mathfrak{F}(t)\, dt = A \int_0^\infty K_2(t)\, dt.$$

Став који ћемо ми доказати гласи:

СТАВ 2,VIII. *Нека је $\mathfrak{F}(t) = \dfrac{t^{\alpha\nu} f(1/t^\nu)}{L(1/t)}$ ограничена функција у интервалу $(0,\infty)$; тада из чињенице*

$$P_\nu(\sigma, f) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}\, \sigma^{\nu\alpha} L(\sigma), \quad \sigma \to 0$$

следи

$$\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha\nu}}{L(1/\tau)} f(1/\tau^\nu)\, d\tau \sim 1, \quad t\to\infty.$$

Ако је још $\mathfrak{F}(t)$ монотоно растућа за $t>0$, следи да је

$$\lim_{t\to\infty} \mathfrak{F}(t) = 1,$$

односно

$$f(t) \sim t^{\alpha}_{\cdot 1} L(t^{1/\nu}), \quad t\to 0.$$

Доказаћемо претходно следећи помоћни став:

ПОМОЋНИ СТАВ. *Нека је $\mathfrak{F}(t)$ ограничена функција у $(0,\infty)$; тада из*

$$\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu} \frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)} \mathfrak{F}(\sigma\tau) \frac{d\tau}{\tau} \sim A, \quad \sigma\to 0,$$

следи

$$\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau} \sim A, \quad \sigma\to 0.$$

Доказ помоћног става.

$$\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \int_0^\eta + \int_T^\infty + \int_\eta^T F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}$$

$$= [1+\varepsilon(\sigma,\eta,T)]\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}$$

$$+ \int_0^\eta + \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\nu\alpha}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}$$

$$- [1+\varepsilon(\sigma,\eta,T)]\left(\int_0^\eta + \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}\right),$$

где $\varepsilon(\sigma,\mu,T)\to 0$, $\sigma\to 0$ за свако $0<\eta<T$.

Треба сада још само показати да се интеграли

$$J_1 = \int_0^\eta F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau},$$

$$J_2 = \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau},$$

$$J_3 = \int_0^\eta F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau},$$

$$J_4 = \int_T^\infty F_\nu(1/\tau)\,\tau^{\alpha\nu}\,\mathfrak{F}(\sigma\tau)\,\frac{d\tau}{\tau}$$

по апсолутној вредности могу учинити мањи од унапред датог $\varepsilon>0$ за погодно изабрано η и T када $\sigma\to 0$.

Прво ћемо показати за J_3 и J_4

$$|J_3| \leqslant M \int_0^{\eta} \frac{d\tau}{\tau^{1-(\alpha+1)\nu}}$$

$$\leqslant \frac{M}{\nu(\alpha+1)} \eta^{(\alpha+1)\nu} < \varepsilon/4,$$

$$|J_4| \leqslant M \int_T^{\infty} e^{-c\tau^{\frac{\nu}{1-\nu}}}$$

$$\leqslant \frac{M}{c} e^{-c T^{\frac{\nu}{1-\nu}}} < \varepsilon/4,$$

Користећи се особинама функције које се правилно понашају (5 глава) може се лако показати и за J_1 и J_2.

$$|J_1| \leqslant M \int_0^{\eta} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu-\gamma} \frac{(\sigma\tau)^\gamma L(\sigma\tau)}{\sigma^\gamma L(\sigma)} \frac{d\tau}{\tau}, \quad 0 < \gamma < \nu(\alpha+1)$$

$$\leqslant \frac{M P_1(\eta\sigma)}{\sigma^\gamma L(\sigma)} \int_0^{\eta} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu-\gamma} \frac{d\tau}{\tau},$$

па је

$$\lim_{\sigma \to 0} |J_1| \leqslant M \frac{\eta^{\nu(\alpha+1)}}{\nu(\alpha+1)-\gamma} < \varepsilon/4.$$

Исто тако је

$$|J_2| \leqslant M \int_T^{\infty} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu+\gamma} \frac{(\sigma\tau)^{-\gamma} L(\sigma\tau)}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \frac{d\tau}{\tau}$$

$$\leqslant \frac{M P_2(\sigma T)}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \int_T^{\infty} F_\nu(1/\tau)\, \tau^{\alpha\nu+\gamma} \frac{d\tau}{\tau},$$

па је

$$\lim_{\sigma \to 0} |J_2| \leqslant \frac{M}{T^\gamma} e^{-c T^{\frac{\nu}{1-\nu}}} < \varepsilon/4.$$

Према томе је

$$\left|\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\tau^{\alpha\nu}\frac{L(\sigma\tau)}{L(\sigma)}\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}-\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\tau^{\alpha\nu}\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right|<$$

$$<\varepsilon+\left|\varepsilon(\sigma,\eta,T)\int_0^\infty F_\nu(1/\tau)\tau^{\alpha\nu}\mathfrak{F}(\sigma\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right|$$

и тиме је доказан помоћни став.

Доказ става 2, VIII. По претпоставци је

$$\frac{1}{\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(\sigma/t^{1/\nu})f(t)\frac{dt}{\nu t}\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)},\quad\sigma\to 0.$$

Извршимо ли у овом интегралу трансформацију $t^{1/\nu}=1/\tau$, добићемо

$$\frac{\sigma}{\sigma^{\nu\alpha}L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(\sigma\tau)\frac{1}{\sigma\tau}f\left(\frac{1}{t^\nu}\right)dt\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)},\quad\sigma\to 0.$$

што се може написати

$$\frac{1}{L(\sigma)}\int_0^\infty F_\nu(\sigma\tau)\frac{1}{(\sigma t)^{\alpha\nu}}t^{\nu\alpha}f(t^{-\nu})\frac{dt}{t}\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)},\quad\sigma\to 0.$$

Овај се интеграл сменом $\sigma t=\tau^{-1}$ своди на интеграл из помоћног става за $\mathfrak{F}(t)=\dfrac{t^{\alpha\nu}}{L(1/t)}f(t^{-\nu})$. Према доказаном помоћном ставу следи да и

$$\sigma\int_0^\infty F_\nu(\sigma t)\frac{1}{(\sigma t)^{\nu\alpha+1}}\frac{t^{\nu\alpha}}{L(1/t)}f(t^{-\nu})\,dt\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)},\quad\sigma\to 0.$$

Применимо наведени Wiener-ов став на последњу релацију. У овом случају је $K_1(t)=F_\nu(t)\,1/t^{\nu\alpha+1}$, па је

$$\int_0^\infty F_\nu(t)\,t^{iy-1-\nu\alpha}\,dt=\frac{\Gamma(1-(iy-\nu\alpha)/\nu)}{\Gamma(1+\nu\alpha-iy)}\neq 0,\quad-\infty<y<\infty.$$

Ако још изаберемо $K_2(st)$ такво да је

$$K_2(st)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1/s,\\ 0, & t>1/s,\end{cases}$$

то из Wiener-овог става следи тврђење става 2, VIII.

III. РЕШЕЊЕ ХОМОГЕНЕ ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

$$f(x) = \lambda \int_0^\infty F_\nu (x/t^{1/\nu}) f(t) \frac{dt}{\nu t} \tag{3,1}$$

3.1. *РЕШЕЊЕ ЈЕДНОГ СПЕЦИЈАЛНОГ СЛУЧАЈА SCHRÖDER-ОВЕ ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ*

Видели смо да је основна идеја коју користи M. Parodi: свести интегралну једначину на функционалну и, уколико знамо решење ове једначине, инверзијом Laplace-овог интеграла доћи до решења дате интегралне једначине. Пошто ћемо се и ми служити истом идејом, то је потребно да претходно добијемо решење извесне функционалне једначине.

Општи облик Schröder-ове функционалне једначине је:

$$\varphi[\alpha(x)] = \lambda \varphi(x) \tag{3,2}$$

из које се лако прелази на Abel-ову функционалну једначину

$$\psi[\alpha(x)] = \psi(x) + C, \tag{3,3}$$

само ако се стави да је

$$\ln \varphi(x) = \psi(x), \quad \ln \lambda = C.$$

Abel је приметио да, ако познајемо једно партикуларно решење $\psi_1(x)$ једначине (3,3), тада је опште решење: $\psi_1(x) + \omega(x)$, где је $\omega(x)$ функција која је инваријантна у односу на $\alpha(x)$, тј.

$$\omega[\alpha(x)] = \omega(x).$$

Као специјалан случај посматрао је једначину

$$\psi(x^n) = \psi(x) + 1$$

и показао да је њено партикуларне решење

$$\psi_1(x) = \frac{\ln \ln x}{\ln n}.$$

Класичан резултат о могућности решења Schröder-ове функционалне једначине (3,2) даје став G. Königs-a. Међутим решење је дато у облику једног лимеса и у том облику није подесно за наш рад.

Напоменимо још само рад P. Appell-a [3] у коме се као пример решава један специјалан случај који нас овде интересује. Он посматра функционалну једначину

$$F[\alpha(x)] = F(x)$$

као уопштење једначине која дефинише периодичне функције. Решење ове једначине даје у облику реда

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[\alpha^n(x)],$$

где је $\alpha^n(x)$ n-та итерација функције $\alpha(x)$, а $f(x)$ тако изабрана рационална функција да горњи ред има област конвергенције. За специјалан случај $\alpha(x) = x^2$ добива решење облика

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{2^n+1}(1 - x^{2^n})^2,$$

где ред конвергира за $|x| < 1$,

Нас ће у овом раду интересовати онај специјалан случај једначине (3,2) када је $\alpha(x) = x^n$, тј. једначина

$$\varphi(x^n) = \lambda\varphi(x). \tag{3,4}$$

Свешћемо прво ову једначину на облик (?,3) који је посматрао Abel. Уведимо зато нову функцију $\ln\varphi(x) = C\psi(x)$, $C = \ln\lambda \neq 0$, и добићемо

$$\psi(x^n) = \psi(x) + 1.$$

Према Abel-у је једно партикуларно решење ове једначине

$$\psi_1(x) = \frac{\ln\ln x}{\ln n}.$$

Нека је сада $\omega(x)$ произвољна периодична функција периоде 1, тј. задовољава релацију

$$\omega(x+1) = \omega(x),$$

онда је функција $\omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right)$ инваријанта у односу на x^n, наиме

$$\omega\left(\frac{\ln\ln x^n}{\ln n}\right) = \omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right),$$

па је, према томе, опште решење једначине (3,3) за $\alpha(x) = x^n$

$$\psi(x) = C\frac{\ln\ln x}{\ln n} + C\omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right),$$

а опште решење једначине (3,4) за $\lambda \neq 1$ је

$$\varphi(x) = \lambda^{\frac{\ln\ln x}{\ln n}}\omega\left(\frac{\ln\ln x}{\ln n}\right). \tag{3,5}$$

Ако је $\lambda = 1$ опште решење једначине (3,4) је

$$\varphi(x) = \omega\left(\frac{\ln \ln x}{\ln n}\right).$$

3.2. *ЕГЗИСТЕНЦИЈА И ЈЕДИНСТВЕНОСТ РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ* (3,1).

Користећи се доказаним ставовима о трансформацији $P_\nu(\sigma, f)$ из 2. главе као и општим решењем функционалне једначине (3,4), расправљаћемо проблем сопствених функција и сопствених вредности једначине (3,1).

Прво ћемо доказати следећи став:

СТАВ 3,I. *Једначина* (3,1) *може имати решење* $f(x)$ *такво да:*

1. $\dfrac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$, *осцилира између коначних истозначних граница,*

2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно за* $s = s_0$ *у интервалу* $(0, \infty)$, *само ако је* $\alpha = 0$, $\lambda = (1/\nu)^\mu$.

Доказ. Пођимо од једначине (3,1) написане помоћу ознаке за трансформацију $P_\nu(\sigma, f)$

$$f(x) = \lambda P_\nu(x, f)$$

или

$$\frac{x^{\alpha(1-\nu)} L(x^{1/\nu})}{L(x)} \cdot \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})} = \lambda C_{\alpha,\nu} \frac{P_\nu(x, f)}{C_{\alpha,\nu} x^{\nu\alpha} L(x)}.$$

Ако сада искористимо став 2.IV или став 2,IV*, добићемо:

$$\liminf_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} \frac{x^{\alpha(1-\nu)} L(x^{1/\nu})}{L(x)} \underline{a} \geqslant \lambda C_{\alpha,\nu} \underline{a}$$

и

$$\limsup_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} \frac{x^{\alpha(1-\nu)} L(x^{1/\nu})}{L(x)} \bar{a} \leqslant \lambda C_{\alpha,\nu} \bar{a},$$

где је

$$\underline{a} = \liminf_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}; \quad \bar{a} = \limsup_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{x^\alpha L(x^{1/\nu})}.$$

Ове две релације могуће су само ако је $\alpha = 0$, па следи да је

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} \frac{L(x^{1/\nu})}{L(x)} = \lambda.$$

Ако се сада стави $x = e^{-y}$ и $R_1(y) = L(e^{-y})$ онда је

$$\lim_{y\to\infty} \frac{R_1(y/v)}{R_1(y)} = \lambda.$$

На основу особине А. функција које се правилно понашају (5. глава) закључујемо да је $R_1(y) = y^{\mu} L^*(y)$, па према томе је

$$L(x) = |\ln x|^{\mu} L^*(|\ln x|),$$

а $\lambda = (1/v)^{\mu}$. На исти начин, ако извршимо смену $x = e^y$, добићемо за $0 < x_0 \ll x$

$$L(x) = (\ln x)^{\mu} L^{**}(\ln x).$$

СТАВ 3,II. *Нека је*

1. $\omega_1(x)$ *периодична функција периода* 1, *тј.* $\omega_1(x+1) = \omega_1(x)$;
2. $f(x)$ *таква функција која задовољава релацију*

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = 1/s\, (\ln s)^{\mu}\, \omega_1\left(\frac{\ln\ln s}{\ln v}\right).$$

Тада је $f(x)$ *решење интегралне једначине* (3,1) *за* $\lambda = (1/v)^{\mu}$.

СТАВ 3,III. *Једино решење* $f(x)$ *једначине* (3,1) *које има особине да је*

1. $f(x) \sim x^{\alpha} L(x^{1/v})$, $x \to 0$ $(x \to \infty)$, $\alpha > -1$,
2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно за* $s = s_0$ *у интервалу* $(0, \infty)$, *је* $f(x) \supset 1/s\, (\ln s)^{\mu}$.

Доказ ставова 3,II и 3,III. Извршимо Laplace-ову трансформацију леве и десне стране једначине (3,1):

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx \int_0^{\infty} F_v(x/t^{1/v})\, f(t)\, \frac{dt}{vt}.$$

На основу става 2,III добијамо

$$\varphi(s) = \lambda\, s^{v-1}\, \varphi(s^v),$$

где је

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Обележимо са $K(s) \equiv s\varphi(s)$ па се добивена функционална једначина своди на већ расправљени случај Schröder-ове функционалне једначине

$$K(s) = \lambda K(s^{\nu}).$$

Видели смо да је опште решење ове функционалне једначине

$$K(s) = \lambda^{\frac{\ln \ln s}{\ln 1/\nu}} \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln \nu}\right),$$

па према томе је и

$$\varphi(s) = 1/s\,(\ln s)^{\frac{\ln \lambda}{\ln 1/\nu}} \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln \nu}\right).$$

Када је $\lambda = 1$, $\varphi(s)$ се своди на

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln \nu}\right).$$

Тиме је став 3,II доказан.

Ако још захтевамо да се $\varphi(s)$ правилно понаша када $s \to 0$ или $s \to \infty$, следи, на основу особине функције $\omega(t)$, да је то могуће само ако је $\omega(t) \equiv c$, па према томе следи тврђење става 3,III.

Интересантно је приметити, прво, да је спектар сопствених вредности континуиран. Друго, да скуп функција коме припадају сопствене функције једначине (3,1) остаје непромењен са променом ν. Промена настаје само у томе што ће сада једна сопствена функција да одговара другој сопственој вредности.

3.3. *НАЛАЖЕЊЕ РЕШЕЊА ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ* (3,1) *КОЈА СЕ ПРАВИЛНО ПОНАШАЈУ.*

Покажимо како се може наћи функција $f(x) \supset \frac{(\ln s)^{\mu}}{s}$, тј. функција која је одређена једначином

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = 1/s\,(\ln s)^{\mu}.$$

3.3.1. $\mu = k$ цео број > 0.

Да би у овом случају нашли L-функцију $f(x)$ која одговара l-функцији $\varphi(s) = \frac{(\ln s)^{\mu}}{s}$, пођимо од интеграла

$$s^{-x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{x-1}\, dt;$$

k-ти извод леве и десне стране ове релације за $x = 1$ даје

$$(-1)^k \frac{(\ln s)^k}{s} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\frac{1}{\Gamma(x)}\right]^{(i)}_{x=1} \int_0^\infty e^{-st} (\ln t)^k \, dt,$$

тако да је тражена функција $f(t)$

$$f_k(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \gamma_i (\ln t)^{k-i},$$

где смо ставили

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \frac{x^i}{i!}.$$

3.3.2. $\mu \leqslant 0$.

Ставимо $\mu = -\varkappa$, $\varkappa \geqslant 0$ и користимо следећу везу за Laplace-ову трансформацију

$$\int_0^\infty \frac{t^x r(x)}{\Gamma(x+1)} dx \supset 1/s \, g(\ln s),$$

где $r(t) \supset g(s)$. У нашем случају је $g(s) = s^{-\varkappa}$, па је $r(t) = \frac{t^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)}$ а одатле следи да је

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\varkappa)} \int_0^\infty \frac{t^x x^{\varkappa-1}}{\Gamma(x+1)} dx \supset \frac{1}{s} (\ln s)^{-\varkappa}$$

3.3.3. $\mu > 0$.

У случају 3.3.1. $\mu = k$ цео број > 0 имали смо

$$\frac{(\ln s)^k}{s} \subset (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{1} \gamma_i (\ln t)^{k-i} = f_k(t),$$

а у случају 3.3.2. $\mu = -\varkappa < 0$

$$\frac{1}{s(\ln s)^k} \subset \frac{1}{\Gamma(\varkappa)} \int_0^\infty \frac{t^x x^{\varkappa-1}}{\Gamma(x+1)} dx = \varphi_\varkappa(t).$$

Нека је сада $\mu > 0$. Ставимо $k = [\mu - 0] + 1$, $k - \varkappa = \mu > 0$ и образујмо композицију од $f_k(t)$ и $\varphi_\varkappa(t)$, тј.

$$f_k(t) * \varphi_\varkappa(t) = \int_0^t \varphi_\varkappa(t-\tau) f_k(\tau) = \frac{(\ln s)^k}{s} \frac{1}{s(\ln s)^\varkappa}$$

одакле следи

$$\frac{1}{s}\,\frac{(\ln s)^{\mu}}{s} \subset f_k(t) * \varphi_{\varkappa}(t).$$

Према томе је тражена функција

$$f(t) \supset \frac{1}{s}(\ln s)^{\mu}, \quad \mu > 0$$

дата изразом

$$f(t) = \frac{d}{dt}\{\varphi_{\varkappa}(t) * f_k(t)\}.$$

3.4. *РЕШЕЊА КОЈА СЕ НЕ ПОНАШАЈУ ПРАВИЛНО У БЛИЗИНИ* $t = 0$ *ИЛИ* $t = \infty$

J. Карамата дао ми је, у вези мог недавно објављеног рада [18], такав пример који претставља решење интегралне једначине (3,1) за $\nu = {}^1/_2$, а не понаша са правилно за $t = 0$ или $t = \infty$. Међутим то се може уопштити. Наиме, треба само поћи од релације *C.* (страна 120)

$$\frac{x^u}{\Gamma(1+u)} = \lambda \int_0^{\infty} F_{\nu}(x/t^{1/\nu})\,\frac{t^{u/\nu}}{\Gamma(1+u/\nu)}\,\frac{dt}{vt},$$

па је помножити са $u^{\mu-1}\,\omega\left(\frac{\ln u}{\ln v}\right)$ и интегралити по u у границама од 0 до ∞ и добићемо да је

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^u}{\Gamma(1+u)}\,u^{\mu-1}\,\omega\left(\frac{\ln u}{\ln v}\right)du$$

решење интегралне једначине (3,1) за $\lambda = (1/\nu)^{\mu}$.

Ако пак претходну релацију (3,6) диференцирамо довољан број пута по u, а затим помножимо са истом функцијом $u^{\mu-1}\,\omega\left(\frac{\ln u}{\ln v}\right)$ и интегришемо као у претходномо случају, добићемо решење једначине (3,1) за произвољно $\lambda > 0$.

IV. ПРИМЕНА ДОБИВЕНИХ РЕЗУЛТАТА

4.1. *ЈЕДАН ПРОБЛЕМ ИЗ ФИЗИКЕ*

У раду који је недавно штампан [18], посматрао сам специјалан случај интегралне једначине (3,1). Тада језгро има облик

$$\frac{2}{t}\,F_{1/2}(x/t^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,e^{-\frac{t^2}{4x}},$$

па се интегрална једначина (3,1) своди на:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-t^2/4x} f(t)\, dt \tag{4,1}$$

која има следеће значење:

Распоред топлоте у линеарном проводнику дат је једначином

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Нека је проводник неограничен са оба краја и нека задовољава почетне услове:

$$\theta(x,0) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant 0 \\ 0\ , & x < 0. \end{cases}$$

Решење парцијалне једначине провођења топлоте са датим почетним условом је

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} f(u)\, du. \tag{4,2}$$

Нека је поред почетног услова дат и гранични

$$\theta(0,t) = \frac{\lambda}{2} f(t),$$

где је λ произвољан параметар. Питање је која функција $f(x)$ може, на основу релације (4.2), да задовољи ове услове. Налажење функције $f(x)$ своди се на решење интегралне једначине (4,1).

Ову једначину M. Parodi решавао је симболичким рачуном. Он је показао да су за $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ решења интегралне једначине (4,1) $f(x) \equiv 1$ односно $f(x) = \ln x + C$ где је C Euler-ова константа.

Ако искористимо резултате из претходних глава добијамо знатно више но што је добио M. Parodi. Тако се став 3.III у овом случају, када је $\nu = 1/2$, своди на следећи:

СТАВ 4.I. *Једино решење интегралне једначине* (4,1) *за* $\lambda = 2^\mu$ *које има особине:*

1. $f(x) \sim x^\beta L(x^2)$, $\beta > -1$, $x \to 0$ $(x \to \infty)$;

2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)$ *за неко* $s = s_0$ *је* $f(x) \supset \dfrac{(\ln s)^\mu}{s}$.

На исти начин могу се пренети и сви остали ставови.

Како се скуп функција коме припадају сопствене функције интегралне једначине (3,1) не мења са ν, то и сама решења дата за једначину (3,1) остају и за интегралну једначину (4,1).

4.2. *ДОПУНА ТАБЛИЦА ЗА LAPLACE-ОВУ ТРАНСФОРМАЦИЈУ И НЕКЕ ИНТЕГРАЛНЕ ВЕЗЕ ЗА WRIGHT-ОВЕ ФУНКЦИЈЕ.*

Резултати претходних глава могу се користити да би добили извесне нове везе за Laplace-ову трансформацију и њима допунили таблице ове тако много коришћене трансформације.

Из досадашњег рада можемо начинити следећу таблицу

	L-функција	одговарајућа l-функција
1	$\int_0^\infty F_\nu(x/t^{1/\nu}) f(t) \frac{dt}{\nu t}$ $f(t)$	$s^{\nu-1}\varphi(s^\nu)$ $\varphi(s)$
2	$t^{\mu-1}\Phi(\mu, \nu; -xt^\nu)$ $\nu>0,\ \mu>0$	$s^{-\mu}e^{-x/s^\nu}$
3	$t^{\mu-1}\Phi(\mu, -\nu; -x/t^\nu)$ $0<\nu<1$	$s^{-\mu}e^{-xs^\nu}$
4	$\frac{1}{\pi}t^\mu e^{-t^\nu\cos\nu\pi}\sin[t^\nu\sin\nu\pi-\mu\pi]$ $0<\nu<1,\ \mu>-1$	$s^{-\mu-1}\Phi(-\mu, -\nu; -1/s^\nu)$
5	$t^{\beta/2-1}\Phi(\beta, -\rho; -1/t^{\rho/2})$ $0<\rho<1$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^\beta}s^{-\beta/2}\Phi\left(\frac{\beta+1}{2}, -\frac{1}{2}\rho; -2^\rho s^{\rho/2}\right)$
6	$t^{\beta/2-1}\Phi(\beta, \rho; -t^{\rho/2})$ $\beta>0, \rho>0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^\beta}s^{-\beta/2}\Phi\left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2}\rho; -\frac{1}{2^\rho s^{\rho/2}}\right)$
7	$\frac{1}{\pi}t^{-\mu}e^{-\frac{1}{t^\nu}\cos\nu\pi}\sin\left(\mu\pi-\frac{\sin\nu\pi}{t^\nu}\right)$ $0<\nu<\frac{1}{2}$	$s^{\mu-1}\Phi(\mu, \nu; -s^\nu)$

Везе 1—4 следе из досадашњег рада. Треба још указати на важност прве везе за примену Laplace-ове трансформације; нарочито може корисно да послужи при тражењу L-функције

када је позната l-функција. Исто тако она нам омогућава да дођемо лако до неких интегралних веза за Wright-ове функције као што су:

a. $$\int_0^\infty \Phi(0, \nu; -t/\sigma^\nu)\, \Phi(\beta, \rho; -t^\rho)\, t^{\beta-1} \frac{dt}{\nu t} =$$

$$= \sigma^{\nu(\beta-1)}\, \Phi[\nu(\beta-1)+1, \rho\nu; -\sigma^{\nu\rho}],$$

$$\beta>0,\ \rho>0,\ 0<\nu<1;$$

специјалан случај ове релације је

$$\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -t/\sigma^\nu)\, t^{\frac{\beta-1}{2}} J_{\beta-1}(2\sqrt{t})\, dt =$$

$$= \sigma^{\nu(\beta-1)}\, \Phi[\nu(\beta-1)+1,\ \nu; -\sigma^\nu];$$

b. $$\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -t/\sigma^\nu)\, \Phi(\beta, -\rho; -1/t^\rho)\, t^{\beta-1} \frac{dt}{\nu t} =$$

$$= \sigma^{\nu(\beta-1)}\, \Phi[\nu(\beta-1)+1, -\rho\nu; -1/\sigma^{\nu\rho}];$$

$$0<\nu<1,\ 0<\rho<1$$

c. $$\int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -t/\sigma^\nu)\, t^\rho \frac{dt}{\nu t} = \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\nu\rho+1)}\, \sigma^{\nu\rho}.$$

$$0<\nu<1,\ \rho>-1$$

На основу последњих релација a. и c., а узимајући у обзир да је $F_{1/2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-1/(4t)}$ добили смо везе под 5 и 6. Исправност последње везе из таблица може се показати на следећи начин:

Пођимо од већ познате релације

$$t^{\mu-1}\, \Phi(\mu, \nu; -t^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{tz}\, z^{-\mu}\, e^{-1/z^\nu}\, dz,$$

где је C' дато на цртежу 2. Раставимо овај интеграл на три следећа

$$\int_{C'} e^{tz}\, z^{-\mu}\, e^{-1/z^\nu}\, dz = \int_{-\infty}^{0} e^{tx-1/x^\nu} \frac{dx}{x^\mu} +$$

$$+ \varepsilon i \int_{-\pi}^{\pi} e^{t\varepsilon e^{\theta i} - \varepsilon^{-\nu} e^{-\nu\theta i}} \frac{d\theta}{\varepsilon^\mu\, e^{\mu\theta i}} + \int_0^{-\infty} e^{xt}\, e^{-1/x^\nu} e^{-2\nu\pi i}\, e^{-2\mu\pi i} \frac{dx}{x^\mu}.$$

Пустимо $\varepsilon \to 0$ и добићемо

$$\int_{C'} e^{tz}\, e^{-1/z^{\nu}}\, \frac{dz}{z^{\mu}} = \int_{-\infty}^{0} e^{tx-1/x^{\nu}}\, \frac{dx}{x^{\mu}} + \int_{0}^{-\infty} e^{tx-1/x^{\nu}}\, e^{-2\nu\pi i}\, e^{-2\mu\pi i}\, \frac{dx}{x^{\mu}}.$$

Извршимо смену $x = -\xi$ у горњим интегралима, па ћемо добити:

$$t^{\mu-1}\, \Phi(\mu, \nu; -t^{\nu}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{tz}\, z^{-\mu}\, e^{-1/z^{\nu}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi - \xi^{-\nu}}\, e^{\nu\pi i}\, \frac{d\xi}{\xi^{\mu}\, e^{-\mu\pi i}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi - \xi^{-\nu}}\, e^{-\nu\pi i}\, \frac{d\xi}{\xi^{\mu}\, e^{\mu\pi i}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi}\, \frac{1}{\xi^{\mu}}\, e^{-\xi^{-\nu}\cos\nu\pi} \left\{ e^{-\left(\frac{\sin\nu\pi}{\xi^{\nu}} - \mu\pi\right) i} - e^{\left(\frac{\sin\nu\pi}{\xi^{\nu}} - \mu\pi\right) i} \right\} d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t\xi}\, \frac{1}{\xi^{\mu}}\, e^{-\xi^{-\nu}\cos\nu\pi} \sin\left(\mu\pi - \frac{\sin\nu\pi}{\xi^{\nu}}\right) d\xi.$$

Тиме смо показали тачност и ове последње релације.

V. ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ WRIGHT-ОВИХ ФУНКЦИЈА И ФУНКЦИЈА КОЈЕ СЕ ПРАВИЛНО ПОНАШАЈУ

5.1. *WRIGHT-ОВА ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА BESSEL-ОВИХ ФУНКЦИЈА И ЊИХОВЕ ОСОБИНЕ*

E. Wright [21, a] посматра следећу целу функцију

$$\Phi(\beta, \rho; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(\rho i + \beta)}; \tag{5,1}$$

ρ је реалан и позитиван број, β број реалан или комплексан. Када је $\rho = 1$ тада је

$$J_{\beta-1}(t) = (1/2\,t)^{\beta-1}\, \Phi(\beta, 1; -{}^{1}/_{4}\, t^2),$$

где је $J_{\beta}(t)$ Bessel-ова функција.

Ову класу функција Wright је искористио када је тражио асимптотски развитак коефицијената степеног реда функције

$$(1-x)^{-\beta} \exp\left\{\frac{\alpha}{(1-x)^{\rho}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n.$$

где су α и β макакви комплексни бројеви $\alpha \neq 0$.

Функција $\Phi(\beta,\rho;z)$ може се изразити и помоћу интеграла. Нека је u-раван пресечена по правој $\arg u=\pi$ и нека је $|\arg u|\leqslant\pi$ у пресеченој равни, тада је

$$\Phi(\beta,\rho;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}u^{-\beta}\exp\left(u+\frac{z}{u^{\rho}}\right)du. \tag{5,2}$$

где је C' контура која полази од $-\infty$ обилази почетак у позитивном смеру и враћа се до $-\infty$ обавијајући пресек (цртеж 2.).

Даље Wright показује у којој се мери извесне особине Bessel-ове функције преносе на функције $\Phi(\beta,\rho;z)$. Тако је

$$\rho z\,\Phi(\beta+\rho,\rho;z)=\Phi(\beta-1,\rho;z)+(1-\beta)\,\Phi(\beta,\rho;z),$$

$$\frac{d}{dz}\Phi(\beta,\rho;z)=\Phi(\beta+\rho,\rho;z) \tag{5,3}$$

или

$$\rho z\frac{d}{dz}\Phi(\beta,\rho;z)=\Phi(\beta-1,\rho;z)+(1-\beta)\,\Phi(\beta,\rho;z).$$

Када је $\rho=p/q$, p и q цели бројеви, функција $\Phi(\beta,\rho;z)$ задовољава диференцијалну једначину реда $p+q$:

$$z^{\frac{\beta-1}{\rho}}\Phi(\beta,\rho;z)=\left(\rho z^{1-1/\rho}\frac{d}{dz}\right)^{p}z^{\frac{\beta+p-1}{\rho}}\left(\frac{d}{dz}\right)^{q}\Phi(\beta,\rho;z) \tag{5,4}$$

која претставља уопштење Bessel-ове диференцијалне једначине када је $\rho>0$.

За ову функцију Wright показује следећу теорему:

Ако је $\arg(-z)=\xi$, $|\xi|\leqslant\pi$,
тада је

$$\Phi(\beta,\rho;z)=H(z_1)+H(z_2),$$

где смо са $H(z)$, z_1, и z_2 *обележили*

$$H(z)=z^{1/2-\beta}\,e^{(1+1/\rho)z}\left\{\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m}{z^m}a_m+O\left(\frac{1}{|z|^{M+1}}\right)\right\},$$

$$z_1=(\rho|z|)^{\frac{1}{\rho+1}}e^{\frac{\xi+\pi}{\rho+1}i};\quad z_2=(\rho|z|)^{\frac{1}{\rho+1}}e^{\frac{\xi-\pi}{\rho+1}i}.$$

Коефицијенти a_m *су дате функције од* β и ρ.

У једном каснијем раду Wright [21,c] проширује ову класу функција на случај када је $-1<\rho<0$. И тада је

$$\Phi(\beta,-\sigma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\beta-n\sigma)},\quad \rho=-\sigma,\quad 0<\sigma<1. \tag{5,5}$$

и

$$\Phi(\beta, -\sigma; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} u^{-\beta}\exp(u + z u^{\sigma})\, du, \tag{5,6}$$

где је C' контура већ дата цртежом 2. Према томе интеграл (5,2) важи за свако $\rho > -1$.

И за овај случај Wright даје теорему о асимптотском понашању функције $\Phi(\beta, -\sigma; z)$, $0 < \sigma < 1$.

Ако је $|\arg(-z)| \leqslant \min\{{}^{3}/_{2}\pi(1-\sigma), \pi\} - \varepsilon$, *тада је*

$$\Phi(\beta, -\sigma; z) = I(y),$$

где смо са $I(y)$ *и* y *обележили*

$$I(y) = y^{1/2-\beta}\, e^{-y}\left\{\sum_{m=0}^{M} A_m y^{-m} + O(y^{-M})\right\},$$

$$y = (1-\sigma)[\sigma^{\sigma}(-z)]^{1/(1-\sigma)},$$

а A_i *су дате константе које зависе од* β *и* σ.

У случају $\rho = p/q$, p и q цели позитивни бројеви Wright је, као што смо видели, показао да функција $\Phi(\beta, \rho; z)$ задовољава диференцијалну једначину реда $p+q$, наиме једначину (5,4). Показаћемо да се и када је $\rho = -p/q$ и $p < q$, p и q цели позитивни бројеви, може лако наћи диференцијална једначина коју та функција задовољава, а која је реда q.

За доказ послужићемо се са три релације (5,3) које уопштавају особине Bessel-ових функција, а које важе и за $\rho = -\sigma$, $0 < \sigma < 1$. Искористићемо прву и другу од њих

$$\Phi(\beta - p, -\sigma; z) = \Phi(\beta - q\sigma, -\sigma; z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^{q}\Phi(\beta, -\sigma; z).$$

Из треће, пак, добивамо

$$z^{\frac{1-\beta+p}{\sigma}}\Phi(\beta - p, -\sigma; z) = \left(-\sigma z^{1+\frac{1}{\sigma}}\frac{d}{dz}\right)^{p} z^{\frac{1-\beta}{\sigma}}\Phi(\beta, -\sigma; z).$$

Према томе је

$$z^{\frac{1-\beta+p}{\sigma}}\Phi(\beta - p, -\sigma; z) = \left(-\sigma z^{1+\frac{1}{\sigma}}\frac{d}{dz}\right)^{p} z^{\frac{1-\beta}{\sigma}}\Phi(\beta, -\sigma; z). \tag{5,7}$$

На тај начин добили смо диференцијалну једначину реда q која претставља уопштење Bessel-ове диференцијалне једначине за $-1 < \rho < 0$.

5.2. *О ФУНКЦИЈАМА КОЈЕ СЕ ПРАВИЛНО ПОНАШАЈУ.*

Пошто су дефиниције потпуно аналогне за $t=\infty$ и $t=0$, то ћемо их дати само за $t=\infty$.

За функцију $q(t)$ казаћемо да се правилно понаша за $t=\infty$ ако она задовољава релацију

$$q(t)\sim t^{\alpha}L(t),$$

кад $t\to\infty$, где је $L(t)$ позитивна и непрекидна функција за свако $t\geqslant 0$, а која припада класи споропроменљивих функција, тј. задовољава релацију

$$\frac{L(ut)}{L(t)}\to 1,\quad t\to\infty$$

за свако $u>0$ (види [10]).

Наведимо овде само оне особине овако дефинисане класе функција $q(t)=t^{\alpha}L(t)$ које ћемо користити у даљем раду.

A. $\dfrac{q(tu)}{q(t)}\to u^{\alpha},\quad u>0,\quad t\to\infty,$

B. $q(t)\to\infty,\quad \alpha>0,\quad t\to\infty,$

$q(t)\to 0,\quad \alpha<0,\quad t\to\infty.$

C. Обележимо са $P_1(x)$, $P_2(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ следеће функције

1
$$\begin{cases} P_1(x)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant x}\{t^{\gamma}L(t)\},\\ P_2(x)=\max\limits_{t\geqslant x}\{t^{-\gamma}L(t)\};\end{cases}$$

2
$$\begin{cases} p_1(x)=\min\limits_{t\geqslant x}\{t^{\gamma}L(t)\},\\ p_2(x)=\min\limits_{0\leqslant t\leqslant x}\{t^{-\gamma}L(t)\};\end{cases}$$

тада је:

$$P_1(x)\sim x^{\gamma}L(x),\quad x\to\infty$$
$$P_2(x)\sim x^{-\gamma}L(x),\quad x\to\infty$$
$$p_1(x)\sim x^{\gamma}L(x),\quad x\to\infty$$
$$p_2(x)\sim x^{-\gamma}L(x),\quad x\to\infty$$

Према томе су $P_i(x)$ и $p_i(x)$, $i=1,2$ функције које се такође правилно понашају за $x\to\infty$, а при томе су обе функције монотоне.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ábel — Oeuvres, 2.

[2] R. P. Agarwal — a. Somes properties generalized Hankel transform. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **43**, (1951), pp. 153—167.

b. Sur une généralisation de la transformation de Hankel. *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, **64** (1950), pp. 164—168.

[3] P. Appell — Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la proprieté. *Comptes Rendus* **88** (1879), pp. 807—810.

[4] S. Bochner — Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitz. Preussische Akad. Wiss., Ph. Math. Klasse*, (1930), s. 403—411.

[5] G. Doetsch — a. Handbuch der — Laplace Transformation, B. I. — 1950.

b. Theorie und Anwendung der Laplace — Transformation, 1937.

c. Zerlegung einer Funktion in Gaussche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. *Math Zeitschrift* **41** (1936) pp. 283—318.

[6] Эфрос А. М., Данилеъский А. М. — Операционное исчисление и контурные интегралы. Гос. научно-техн. Украины 1937.

[7] Fredholm — Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Stockh. Öfh. **57** (1900), pp. 39—46.

[8] H. C. Gupta — On operational calculus. *Proc. Nat. Inst. Sc. India*, **14** (1948), p. 131.

[9] P. Humbert — Nouvelles correspondances symboliques. *Bull. Sc. Math.* **LXIX** (1945), p. 121—129.

[10] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica* (Cluj) IV (1930) pp. 38—53.

Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux. *Bull. Soc Math. France* **61** (1933).

[11] K. Knopp — Zwei Abelsche Sätze. *Publ. l'Inst. Math, Beograd de l'Acad. Serbe des Sci.* **IV** (1952), p. 89—94.

[12] Magnus and Oberhettinger — Formel und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 1948.

[13] J. G. Mikušinski — Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire. *Studia Math.* **12** (1951) pp. 208—224.

[14] Paley and Wiener — Fourier transforms in the complex domain, 1934.

[15] M. Parodi — Équations intégrales et transformation de Laplace, 1950.

[16] H. Pollard — The representation of $e^{-x^{\lambda}}$ as a Laplace integrale. *Bull. Am. Math. Soc.* **5** (1946).

[17] Э. Я. Риекстыньш — Некоторые новые формулы для преобразования Лапласа. *Пр. мат. и мех.*, **XVII** (1953), p. 761,

[18] Б. Станковић — Решење једне хомогене интегралне једначине. *Зборник Мат. инст.* **3** (1953), стр. 95—106.

[19] V. Volterra — Sulla inversione degli integrali definiti. *Rend. Ac. Lincei*, (5), 5_1 (1896) pp. 177—185.

[20] N. Wiener und E. Hopf — Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitz. Ak. Berlin* (1931), s. 696—706.

[21] L. Wlodarski — Une remarque sur une classe des fonctions exponentielles du calcul operatoire. *Studia Math.* **13** (1952), pp. 118—189.

[22] E. M. Wright. — a. On the coefficients of power series having exponential singularities. *J. Lond. Math. Soc.* **8** (1953), pp. 71—79.

b. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. *Proc. Lond. Math Soc.* **38** (1934), pp. 258—270.

c. The generalized Bessel function of order greater than one. *Quart. J. Math. Oxford series* **2** (1940), p.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES

par

Bogoljub Stanković

Les transformations intégrales, en particulier celles de Laplace et de Fourier, se sont avérées particulièrement appropriées à la solution de certaines classes d'équations intégrales. C'est ce que montrent les travaux de Bochner [4], de G. Doetsch [5c], de Wiener et Hopf [20] et, en ces derniers temps, de M. Parodi [15].

M. Parodi considère l'équation intégrale

$$f(x) + \lambda \int_0^\infty K(x, t) f(t)\, at = g(x), \tag{1}$$

où $K(x, t)$ est caractérisé par

$$\int_0^\infty e^{-sx} K(x, t)\, dx = \rho(s)\, e^{-t\psi(s)}, \tag{2}$$

se réduisant, sous certaines conditions supplémentaires, à l'aide de la transformation de Laplace, à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(s) + \lambda \rho(s) \varphi[\psi(s)] = \gamma(s), \tag{3}$$

où $\varphi(s)$ et $\gamma(s)$ sont les transformations de Laplace de fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

L'idée de M. Parodi donne lieu à deux problèmes. Le premier est la forme du noyau satisfaisant à l'équation (2). Le second est la solution de cette équation. La présente note traite les deux problèmes pour une certaine classe d'équations intégrales.

Au premier chapitre on considère d'abord un cas spécial de l'équation (2), à savoir celui lorsque $\rho(s)$ et $\psi(s)$ sont de puissances de s, c'est-à-dire l'équation

$$\int_0^\infty e^{-sx} K(x,t)\,dx = s^\mu e^{-ts^\nu}, \tag{4}$$

et l'on démontre la proposition suivante:

Proposition 1.I. L'équation intégrale (1) n'a de solutions dans la classe de fonctions L [1] que pour $0 < \nu < 1$ et μ quelconque, ou pour $\nu \leqslant 0$, $\mu < 0$. L'unique solution pour ces valeurs de ν et μ est

$$K_{\mu,\nu}(x,t) = x^{-\mu-1}\,\Phi(-\mu, -\nu; -tx^{-\nu}),$$

où $\Phi(\beta, \rho; z)$ est la généralisation de Wright des fonctions de Bessel [22].

Pour certaines valeurs spéciales de ν et μ l'équation (4) appartien à une classe d'équations traitées par M. Parodi, à savoir, la classe des équations (2) où $\rho(s)$ et $\psi(s)$ étant supposées des fonctions l. [1] Or, le fait que $\rho(s)$ et $\psi(s)$ doivent être des fonctions l est une restriction sensible, à ce point que les exemples données par Parodi lui même ne satisfont pas à ces conditions. La proposition B, que j'ai démontrée ici, s'étend aussi à ces exemples.

Dans la seconde partie du premier chapitre on fait connaître certaines propriétés de la fonction $K_{\mu,\nu}(x,t)$, solution de l'équation (4), pour des valeurs spéciales de μ et ν, ce qui complète certains resultats de H. Pollard [16], de J. Mikušinski [13] et de L. Wlodarski [21]. Ainsi on a établi les relations suivantes

$$K_{\mu,\nu}(x,1) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-xu}\, u^\mu\, e^{-u^\nu \cos \nu\pi} \sin\,(u^\nu \sin \nu\pi - \mu\pi)\,du$$

$$0 < \nu < 1, \quad \mu > -1,$$

$$K_{0,\nu}(x,1) \sim \sin\,\nu\pi\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}, \quad x \to \infty,$$

$$K_{0,\nu}(x,1) = y^{1/2} e^{-y}\left\{\sum_{m=0}^{M} A_m y^{-m} + O(y^{-M})\right\},$$

où

$$y = (1-\nu)\,[\nu^\nu (x^{-\nu})]^{\frac{1}{1-\nu}}$$

Et, enfin

$$K_{0,\nu}(x,1) > 0, \quad \infty > x > 0.$$

[1] V. la definition de fonstion L et l G. Doetsch [5a].

Au second chapitre on a défini et traité la transformation intégrale suivante

$$P_\nu(\sigma, f) = \int_0^\infty F_\nu(\sigma/x^{1/\nu})\, f(x)\, \frac{dx}{\nu x},$$

où $F_\nu(x) = x\, K_{0,\nu}(x, 1)$.

Pour cette transformation on a démontré les propositions de convergence suivantes:

Proposition 2, I. La transformation $P_\nu(\sigma, f)$ étant convergente pour un $\sigma = \sigma_0$, elle est convergente pour tout $0 < \sigma < \sigma_0$. Si, en outre, $f(x) = 0$ pour $0 \leqslant x < \eta$, alors

$$P_\nu(\sigma, f) = O\left\{e^{-c\left(\frac{\eta}{\sigma^\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}}\right\}, \quad c < (1-\sigma)\,\sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Proposition 2, III. $f(t)$ étant une fonction L[1] et

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \varphi(s),$$

alors

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^\infty F_\nu(t, \tau^{1/\nu})\, f(\tau)\, \frac{d\tau}{\nu\tau} = s^{\nu-1}\, \varphi(s^\nu).$$

Puis on a démontré la proposition de nature abélienne suivante

Proposition 2, IV. La transformation $P_\nu(\sigma, f)$ étant convergente pour $\sigma = \sigma_0$ et $\dfrac{f(x)}{x^\alpha\, L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$, oscillant entre des limites finies lorsque $x \to 0$, alors

$$\liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha\, L(x^{1/\nu})} \leqslant \liminf_{\sigma\to 0} \frac{P_\nu(\sigma, f)}{C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha}\, L(s)} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{\sigma\to 0} \frac{P_\nu(,\sigma f)}{C_{\alpha,\nu}\, \sigma^{\nu\alpha}\, L(\sigma)} \leqslant \limsup_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha\, L(x^{1/\nu})}.$$

Et, enfin, la proposition de nature tauberienne suivante:

Proposition 2, VIII. $F(t) = \dfrac{t^{\alpha\nu} f(t^{-\nu})}{L(1/t)}$ étant une fonction bornée dans l'intervalle $(0, \infty)$, alors, de

$$P_\nu(\sigma, f) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)}\, \sigma^{\nu\alpha}\, L(\sigma), \quad \sigma \to 0,$$

résulte

$$\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\tau^{\alpha\nu}}{L(1/\tau)} f(1/\tau^{\nu})\,d\tau \sim 1, \quad t\to\infty.$$

Si, en outre, $F(t)$ est à croissance monotone pour $t>0$, il s'ensuit

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 1,$$

ou que

$$f(t) \sim t^{\alpha} L(t^{1/\nu}), \quad t\to 0.$$

En partant des résultats obtenus aux deux premiers chapitres, le troisième chapitre est consacré à la solution de l'équation intégrale homogène

$$f(x) = \lambda \int_0^{\infty} F_{\nu}(x/t^{1/\nu}) f(t) \frac{dt}{\nu t}. \tag{5}$$

Et on a démontré les propositions suivantes:

Proposition 3, I. L'équation (5) ne peut avoir pour solution $f(x)$ telle que

1) $\dfrac{f(x)}{x^{\alpha} L(x^{1/\nu})}$, $\alpha > -1$ oscille entre des limites finies de même signe;

2) $e^{-sx} f(x)$ intégrable pour $s = s_c$ dans l'intervalle $(0,\infty)$ que si $\alpha = 0$, $\lambda = (1/\nu)^{\mu}$.

Proposition 3, II. Soient

1) $\omega_1(x)$ une fonction périodique, de periode 1, c'est-à-dire $\omega_1(x+1) = \omega_1(x)$;

2) $f(x)$ une fonction telle que

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = \frac{1}{s}(\ln s)^{\mu}\,\omega_1\left(\frac{\ln\ln s}{\ln \nu}\right),$$

alors $f(x)$ est une solution de l'équation intégrale (5) pour $\lambda = (1/\nu)^{\mu}$.

Proposition 3, III. L'unique solution $f(x)$ de l'équation (5) telle que

1) $f(x) \sim x^{\alpha} L(x^{1/\nu})$, $x\to 0 (x\to\infty)$, $\alpha > -1$,

2) $e^{-sx} f(x)$ soit intégrable pour $s = s_0$ dans l'intervalle $(0,\infty)$, est $f(x) \supset \dfrac{1}{s}(\ln s)^{\mu}$.

Dans ce chapitre on donne également la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) = \lambda \varphi(x^n).$$

Enfin on a donné aussi les solutions mêmes $f(t)$ d'équation (5) qui se comportent régulièrement.

Par un contre-exemple on a fait voir que, lorsque la solution ne se comporte pas régulièrement au voisinage de zéro ou de l'infini, on a alors un nombre illimité de solutions.

Au sixième chapitre on a appliqué les résultats obtenus a un problème de physique et on a donné certaines relations nouvelles pour la transformation de Laplace et les fonctions de Wright.