Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

М. ТОМИЋ

ПРИМЕДБА О НУЛАМА ЈЕДНЕ КЛАСЕ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦИЈА

Показано је у три става, да уз извесне услове о половима и коефицијентима, мероморфна функција (1) нема комплексних нула.

1. У овом раду даћемо три става која се односе на распоред нула оне класе мероморфних функција $f(z)$ која допушта развијање (на основу познатог Mittag-Leffler-овог става) облика

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_n}{z - a_n} + \lambda_n \right), \tag{1}$$

и где бројеви A_n, λ_n и a_n задовољавају низ услова. Ставови о којима је реч тврде, да под извесним условима о A_n, λ_n и a_n, *мероморфна функција* (1) *или нема уопште комплексних нула, или нема комплексних нула са позитивним реалним делом.* За доказ сличних ставова у литератури користе се различити помоћни ставови. Тако, например, код доказа прве групе ставова, на низ рационалних функција

$$f_k(z) = \sum_{n=-k}^{k} \left(\frac{A_n}{z - a_n} + \lambda_n \right)$$

примењује се класичан Hurwitz-ов став [1]: ако у области G z-равни низ рационалних функција

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z), \ldots$$

има за униформну границу функцију $f(z)$, тада су нуле од $f(z)$ тачке нагомилавања нула низа функција $f_k(z)$.

Циљ овога рада је да да једноставан геометриски доказ неких ставова о распореду нула мероморфних функција облика (1), *не користећи никакве помоћне ставове.* На тај начин добива се и прост доказ за низ познатих резултата, који су садржани у овим ставовима. Докази се оснивају на елементарним својствима трансформације $1/z$.

2. СТАВ 1. *Нека је*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_n}{z-a_n}+\lambda_n\right), \tag{1}$$

где су A_n, a_n *и* λ_n *реални бројеви такви да је*

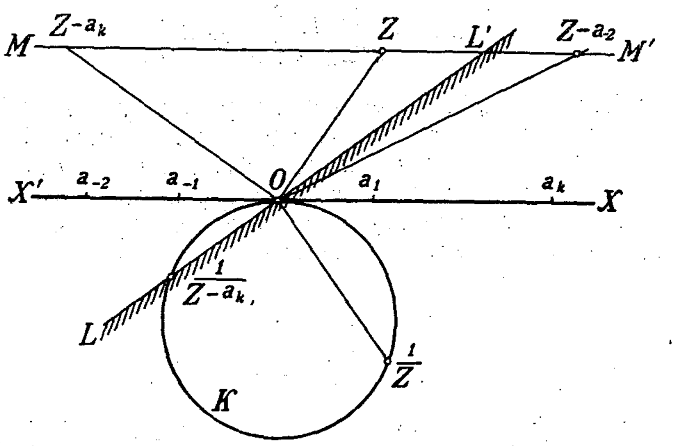
(i) $\ldots a_{-2}\leqslant a_{-1}\leqslant a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots$

(ii) $A_i>0,\quad i=k-1,\ k-2,\ k-3,\ldots$
$A_l<0,\quad l=k,\ k+1,\ k+2,\ldots$

(iii) $\lambda_n\geqslant 0,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots$

Тада (1) *нема комплексних нула.*[1]

Доказ. Доказаћемо да је $f(z)\neq 0$ за свако z за које је $\arg z\neq 0\ (\mathrm{mod}\ \pi)$. Нека је z макакав комплексан број у горњој полуравни ($0<\arg z<\pi$). Због (i) бројеви $(z-a_n)$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$) налазе се на правој MM' паралелној са реалном осом на отстојању $\Im z$ (сл. 1), а уређени су по индексима бројева a_ν.



Сл. 1

Комплексни бројеви $1/(z-a_n)$ добивају се једном инверзијом из $(z-a_n)$ и затим једним огледањем на реалној оси тако добивених тачака. Како се тачке $(z-a_n)$ налазе на правој MM', то се ова права трансформацијом $1/z$ пресликава у круг K. Комплексни бројеви $1/(z-a_n)$ су тачке периферије круга K. Ти бројеви

---

[1]) У [2] (II, стр. 41, задатак 26) доказан је сличан став за мероморфну функцију $\sum_{k=1}^{n} A_k/(z-a_k)$. Доказ тамо наведен не може се применити у случају бесконачно много полова који се овде третира.

помножени са $A_i > 0$ $(i = k-1, k-2, k-3, \ldots)$ остају на зрацима који полазе из O, тј. леже у углу xOL, али ни један не лежи на OL за свако коначно a_i[2]). Бројеви $1/(z-a_l)$ помножени са $A_l < 0$ $(l = k, k+1, k+2, \ldots)$ падају сви у угао xOL' (и сем $1/(z-a_k)$) ни један други не лежи на OL'. Према томе, сви комплексни бројеви $A_i/(z-a_i)$ налазе се десно, тј. с једне стране праве LL'. Због (iii) $[A_n/(z-a_n)+\lambda_n]$ лежи такође у полуравни десно од LL', и зато њихов збир никад не може бити нула, ако је макар и једно $A_n \neq 0$ и a_n коначно. Из симетрије следи исти закључак, ако је z у доњој полуравни $(\pi < \arg z < 2\pi)$.

2.1. ПРИМЕНА. *Функција*

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{cz}, \quad c \geqslant 1$$

нема комплексних нула [1].

У овом случају $f(z)$ из става 1, на основу познатог развитка функција $\operatorname{cotg} z$ узима облик

$$\cdots + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1-1/c}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \cdots,$$

па су очевидно сви услови става 1 испуњени.

Специјално, *једначина,*

$$\operatorname{tg} z - z = 0$$

има само реалне корене [2] (II, стр. 69).

2.2. ПРИМЕДБА. Претходна расматрања могу се проширити и на инверзију у простору, где место праве MM' долази раван паралелна са xOy – равни. Она се инверзијом пресликава у куглу, која пролази кроз почетак. Огледањем на равни xOy, добивамо понова куглу која додирује раван xOy у координатном почетку. Добива се тако аналогон става 1 за мероморфну функцију кватерниона.

3. СТАВ 2. *Мероморфна функција*

$$\cdots + \frac{A_2}{z+a_2} + \frac{A_1}{z+a_1} - \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \cdots, \tag{2}$$

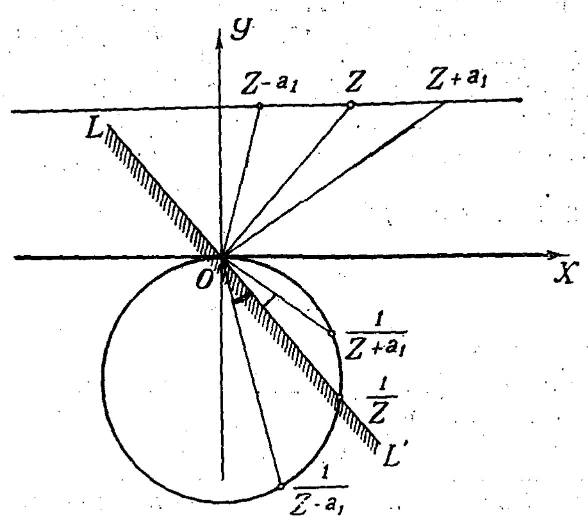
где је $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$, A_i *позитивни и такви да је* $A_0 > A_i$, $i = 1, 2, \ldots$, *нема комплексних нула изузев чисто имагинарних.*

---

[2]) Права OL је одређена тако да на њој лежи $1/(z-a_k)$, са оним индексом k, за који је $A_l < 0$, $l=k$, $k+1$, $k+2, \ldots$

Доказ. Узећемо да је z у квадранту xOy (сл. 2). Остала три случаја следе из симетрије

Како је $A_i < A_0$ и угао $(1/(z+a_1), O, 1/z)$ мањи од угла $(1/z, O, 1/(z-a_1))$, то из простих планиметриских особина следи



Сл. 2

да вектор $A_1\ [1/(z-a_1)+1/(z+a_1)]$ не може да дође до праве OL', на којој лежи вектор A_0/z. Исто следи и за све остале збирове $A_2\ [1/(z-a_2)+1/(z+a_2)] \ldots$; другим речима збир

$$2z \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{A_n}{z^2-a_n^2}$$

(где $'$ означава да у збиру нема члана са индексом $n=0$), лежи лево од LL' (сл. 2). Вектор $-A_0/z$ лежи на OL; отуда следи да (2) никад није нула докле год се z налази у квадранту xOy (и не лежи на Ox ни на Oy).

3.1. ПРИМЕНА. Посматраћемо целу парну функцију $F(z)$ која задовољава услове

(3) $$F(0) > |F(k\pi)|,$$

и

(4) $$F[2(m+1)\pi] < 0, \quad F(2m\pi) > 0,$$

и која допушта развитак

(5) $$\frac{F(z)}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n F(n\pi)}{z-n\pi}, \text{ [2] (I, стр. 117).}$$

Применом става 2 следи да $F(z)$ може да има само реалне или чисто имагинарне нуле.

Специјално, *ако* $f(t)$ *има први и други извод* $f(t)>0$, $f'(t)<0$, $f''(t)\leqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant 1$, *тада цела парна функција*

(6) $$F(z)=\int_0^1 f(t)\cos zt\,dt$$

има само реалне нуле [2] (II, стр. 69).

Овде је

$$F[(2m-1)\pi]>0, \quad F(2m\pi)<0,$$

и затим је

$$\frac{F(z)}{\sin z}=\cdots-\frac{F(-\pi)}{z+\pi}+\frac{F(0)}{z}+\frac{F(\pi)}{z-\pi}-\frac{F(2\pi)}{z-2\pi}-\cdots.$$

Очевидно у овом случају је

$$A_0=F(0)>F(k\pi)=A_k,$$

одакле следи према ставу 2, да нуле могу бити само реалне или чисто имагинарне. Међутим из (6) следи да ни ово последње није могуће ([2] II, стр. 259).

4. СТАВ 3, *Мероморфна функција облика*

(1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_n}{z-a_n}+\lambda_n\right),$$

где је $A_n\geqslant 0$ *и* $\lambda_n\geqslant 0$, *и где се сви полови* a_n *налазе на једној правој која није паралелна са реалном осом нема нула у полуравни десно од ове праве.*

Д о к а з. Нека се, например, сви полови a_n налазе на правој AA' (сл. 3) и нека је z у десној полуравни ове праве.

Тада се тачке $(z-a_k)$ налазе на правој BB'. Инверзијом на јединичном кругу E, права BB' прелази у круг K, који има за тангенту у почетку праву TT_1, паралелну са правом AA' на којој су полови. Огледањем на реалној оси, круг K прелази у K', а права TT_1 у $T'T'_1$. Ова последња права је тангента на круг K' у O. Одатле следи тврђење, будући да је $\lambda_n>0$, тако да се сваки члан у збиру (1) налази десно од $T'T'_1$.

4.1. ПРИМЕНА. У [3] H. G o l d e n b e r g је показао да корени трансцендентне једначине

(7) $$\coth z=\frac{c}{z}-b, \quad c<1, \quad b>0$$

немају позитиван реални део.

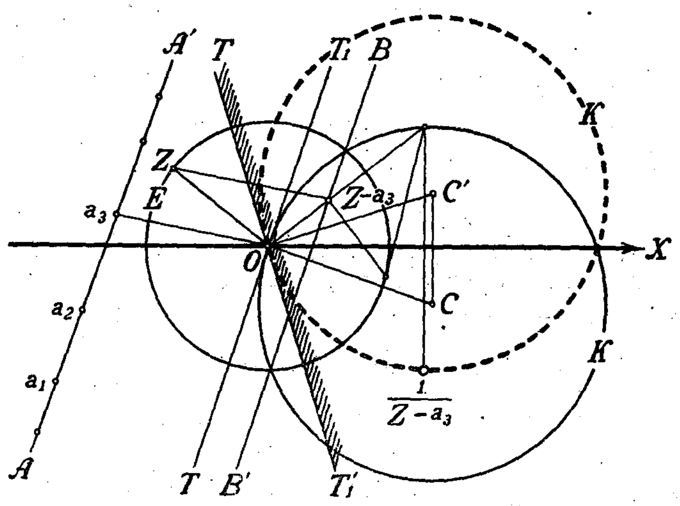
Водећи рачуна о

$$\coth z = \frac{1}{z} + 2z\left(\frac{1}{\pi^2 + z^2} + \frac{1}{4\pi^2 + z^2} + \cdots\right),$$

следи да се (7) може написати у облику

$$\cdots \frac{1}{z - 2\pi i} + \frac{1}{z - \pi i} + \frac{1 - c}{z} + \frac{1}{z - \pi i} + \frac{1}{z + 2\pi i} + \cdots + b = 0,$$

па се види да се сви полови налазе на имагинарној оси. У овом случају је даље $A_n > 0$ и $\lambda_n = b > 0$, па се може применити став 3. Права $T' T'_1$ прелази у имагинарну осу, а K' је сада круг који



Сл. 3

додирује имагинарну осу у почетку и чији је центар на реалној оси. Одатле следи одмах тврђење (сл. 4), ако се води рачуна о чињеницама $b > 0$, $1 - c > 0$, тако да су сви комплексни бројеви у последњем збиру десно од имагинарне осе.

4.2. Претходни став 3, односно његова примена наведена у **4.1.** може се употребити и у низу проблема, где се траже услови да трансцендентна једначина облика

$$e^z = \frac{az + b}{cz + d},$$

нема комплексних нула са позитивним реалним делом. Тако, например, стављајући у

$$\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \coth\frac{z}{2} = \frac{pz + q}{rz + s}, \tag{8}$$

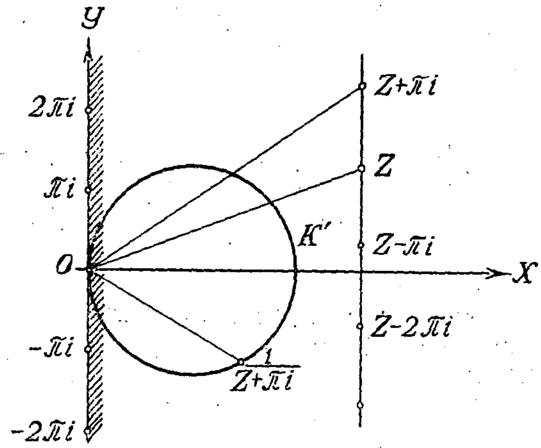
$$p = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \quad s = -\frac{1}{2}(a_1 + a_2), \quad q = \frac{1}{2}(a_1 - a_2),$$

добива се

$$\tau(z) \equiv z e^z - a_1 e^z - a_2 = 0. \tag{9}$$

(9) се може, због (8), написати као

$$\coth\frac{z}{2} + \frac{z-(a_1-a_2)}{z-(a_1+a_2)} = 0. \tag{8'}$$



Сл. 4

Како је према претходном примеру (4. 1, сл. 4)

$$\Re\left\{\coth\frac{z}{2}\right\} > 0 \quad \text{за} \quad \Re\left\{\frac{z}{2}\right\} > 0,$$

то једначина (8′) сигурно нема нула са позитивним реалним делом ако је још

$$\Re\left\{\frac{z-(a_1-a_2)}{z-(a_1+a_2)}\right\} \geqslant 0,$$

тј. ако је

$$[x-\Re(a_1)]^2 + [y-\Re(a_2)]^2 - \Re^2(a_2) - \Im^2(a_2) \geqslant 0.$$

Ово је очевидно испуњено за свако $\Re(z) > 0$, ако је

$$\Re(a_1) < 0$$

и

$$|a_2|^2 < \Re^2(a_1), \tag{10}$$

а ово је један познати резултат [4], добивен на други начин, употребом јачих аналитичких средстава.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. A. Hurwitz — Über die Wurzeln einiger transzendenten Gleichungen. *Mitteilungen der math. Gesell. in Hamburg* 2 (1890) 25—31 — Math. Werke, Basel 1932, str. 299.

[2] G. Pólya und G. Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Bd. I, II. Berlin 1925.

[3] H. Goldenberg: — Complex roots of a transcendental equation. *Math. Gazette.* 38 (1954), str. 161.

[4] S. Sherman — On the roots of a transcendental equation. *Journal. London Math. Soc.* 27 (3) (1952), str. 364.

REMARQUE SUR LES ZÉROS D'UNE CLASSE DES FONCTIONS MÉROMORPHES

par

M. Tomić

Le but de cette note est de donner, en s'appuyant sur des propriétés élémentaires de la transformation réciproque $1/z$ et n'utilisant aucun autre moyen analytique (tel que le théorème classique de Hurwitz [1], p. 25—31, etc) une démonstration géométrique des propositions suivantes.

THÉORÈME 1. *La fonction méromorphe* (1), *où* A_n, a_n *et* λ_n *satisfont aux conditions* (i) – (iii), *n'a pas de zéros complexes.*

Application. La fonction $\operatorname{cotg} z - 1/cz$ $(c>1)$ n'a pas de zéro complexes [1].

THÉORÈME 2. *La fonction méromorphe* (2), *où* a_i *et* A_i *satisfont aux conditions* $0<a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots$; $0<A_i<A_0\,(i=1,2,\ldots)$, *n'a pas de zéros complexes, à l'exception des zéros pures imaginaires.*

Application. [2] T. II, p. 69, problème № 173 e. t. c.

THÉORÈME 3. *La fonction méromorphe* (1), *avec* $A_n\geqslant 0$ *et* $\lambda_n\geqslant 0$, *et dont tous les poles* a_n *se trouvent sur une droîte* AA', *qui n'est pas parallèle à l'axe réel n'a pas de zéros dans le demi-plan à droite de* AA' (fig. 3).

Application. a) L'équation (7) ([3] p. 161) n'a pas de zéros avec la partie réelle positive. b) On a la même conclusion pour l'équation (9) si les conditions (10) sont remplies ([4] p. 364.)