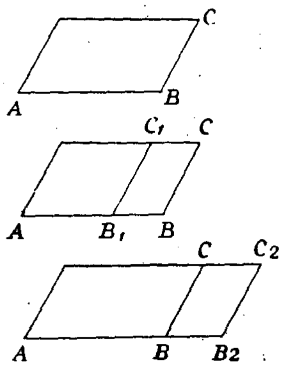
Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

АНТОН БИЛИМОВИЋ

О НЕКИМ СТАВОВИМА ШЕСТЕ КЊИГЕ ЕУКЛИДОВИХ ЕЛЕМЕНАТА

Писац анализира са историског гледишта теорему 27 и задатке 28, 29 и 30 из књиге шесте Еуклидових елемената.

Пета и шеста књига Еуклидових елемената посвећене су теорији пропорционалних дужи и површина. У петој књизи углавном је постављена општа теорија размера и пропорција и наведене су неке примене те теорије; теорија сличности и они геометриски ставови који се оснивају на тој теорији чине садржај шесте књиге. Шеста књига садржи пет дефиниција, двадесет три теореме и десет конструктивних задатака. Већина тих теорема и задатака је ушла у стандардну елементарну геометрију, а и сад улази и у најкраће уџбенике. Али има и таквих теорема које не улазе у обичан школски материјал. Има таквих теорема чији материјал не садржи битних нових елемената; ове теореме се лако могу укључити у вежбе из одговарајућег уобичајеног материјала. У ову категорију спадају, на пример, теореме о паралелограмима на дијагонали паралелограма. Али у шестој књизи постоји једна теорема и два конструктивна задатка, који не улазе у обичан курс, и још један уобичајен конструктивни задатак, који Еуклид решава на основу претходног неуобичајеног задатка. Пошто је тај неуобичајен материјал нарочито интересантан са историског гледишта у овим редовима вршим анализу неких особина тог материјала.



Сл. 1

Претходно ћемо навести неколико појмова, које Еуклид искоришћава у том материјалу, а који су сад испали из материјала школске геометрије.

Нека је дата дуж AB (сл. 1). У Еуклидовом тексту се каже да је неки паралелограм конструисан *на* дужи AB, и то без обзира на то да ли је страна паралелограма која лежи на правој дужи AB једнака, мања или већа од те дужи. Према томе су паралелограми AC, AC_1 и AC_2 *на* дужи AB.

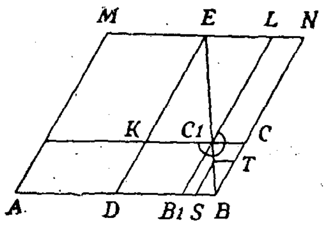
Ако је основица AB_1 паралелограма AC_1 мања од AB, паралелограм BC_1 на B_1B је ἐλλεῖπον (мањак) паралелограма AC_1 конструисаног на AB са страном AB_1. Другим речима, паралелограм BC_1 недостаје паралелограму AC_1 до паралелограма AC, паралелограм BC_1 служи као допуна паралелограму AC_1 до AC.

Ако је основица AB_2 паралелограма AC_2 већа од AB, паралелограм BC_2 је ὑπερβάλλον (сувишак) паралелограма AC_1 конструисаног на AB са страном AB_2.

Од та два назива постали су и називи елипсе и хиперболе.

Сад ћемо навести теорему која нас интересује:

ТЕОРЕМА 27. Од свих паралелограма тако конструисаних на датој дужи да им недостају паралелограми слични и у сличном положају са паралелограмом конструисаним на другој половини дужи онај је највећи који је конструисан на првој половини и сличан паралелограму који му недостаје.



Сл. 2

Нека је AB дата дуж (сл. 2), тачка D је средина AB и BE је паралелограм на DB. Треба доказати да је паралелограм AC_1 коме недостаје паралелограм BC_1, сличан и у сличном положају са паралелограмом BE, мањи од паралелограма AE који је сличан паралелограму BE.

Заиста, како је

$$\square AC_1 = \square AK + \square DC_1,$$

$$\square AE = \square AK + \square KM,$$

а

$$\square DC_1 = \square CL$$

и

$$\square CL < \square KM,$$

можемо закључити да је

$$\square AC_1 < \square DM.$$

Сем тога је очигледно да је паралелограм AE сличан паралелограму BE.

Овај став Еуклидове шесте књиге је једини став, који се односи на проблем екстремума једне променљиве величине. Али без обзира на то што у овом ставу очевидно фигурише једна променљива величина у вези са померањем тачке C_1 по дужи BE, ни у Еуклидовом формулисању ове теореме ни у доказу нема ни трага о појму променљивости, што нам сад изгледа невероватно, а још мање о функционалној вези између променљивих. Ова теорема јасно наглашује нарочиту особину Еуклидове геометрије као геометрије смрзнутих облика и константних величина.

Приметимо да се Еуклидов доказ ове теореме оснива на једнакости површине паралелограма AC_1 са површином гномона $C_1KDBNLC_1$ кратко означеног на слици помоћу кружног лука. Са функционалног гледишта је јасно да је површина гномона највећа кад се тачка C_1 поклопи са тачком E.

У вези са наведеном теоремом стоје ови задаци.

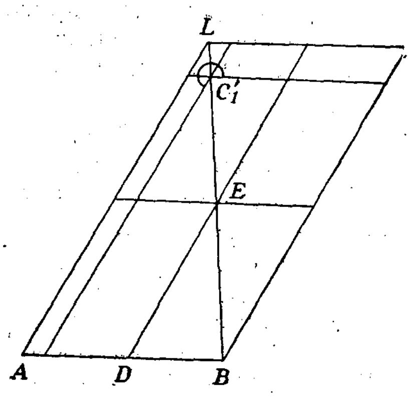
Задатак 28. На датој дужи конструисати такав паралелограм, једнак датој праволиниској слици, да паралелограм који му недостаје буде сличан датом паралелограму; при томе је неопходно да дата праволиниска слика (којој треба конструисати једнаки паралелограм) не буде већа од паралелограма конструисаног на половини дате дужи и сличног паралелограму који му недостаје.

Према томе, на дужи AB (сл. 2) треба конструисати паралелограм AC_1, једнак датој праволиниској слици, рецимо, P, тако да паралелограм BC_1 који недостаје паралелограму AC_1 буде сличан датом паралелограму, рецимо, Q.

Еуклидов поступак при решавању овог задатка углавном је овај.

На DB, као на страни, конструише се паралелограм BE сличан датом паралелограму $Q = ST$. Тиме се одређује и површина R паралелограма BE. Како је на слици означени гномон једнак паралелограму AC_1, чија је површина једнака површини P дате праволиниске слике, позната је и разлика тих површина $R - P$: међутим је та површина једнака површини паралелограма C_1E. Према томе је за одређивање положаја тачке C_1 потребно конструисати код тачке E паралелограм EC_1 једнак датој површини $R - P$ и сличан датом паралелограму Q, а то је решено у задатку 25 исте шесте књиге. Тако се одређује тачка C_1 и тражени паралелограм AC_1.

Како Еуклид не искоришћава промењљиве величине и функционалне везе, одмах се показује резултат тога. Чак и у овом врло једноставном задатку Еуклид је показао да кад се не узме у обзир област промењљивости третираних величина лако се долази до грубог пропуста у решењу проблема. Заиста, ако је површина P дате праволиниске слике мања од површине R парараралелограма AE, онда при кретању тачке C_1 од B у правцу тачке E површина паралелограма AC_1 прво расте од нуле до R и према томе пролази кроз тражену вредност $P < R$. Имамо тачку C_1 на дужи BE, која одговара првом решењу проблему. Ако сад тачка C_1 продужи своје кретање у правцу продужења дијагонале BE, површина одговарајућег паралелограма почне да опада и на том продужењу постоји тачка C'_1 (сл. 3) за коју поново паралелограм



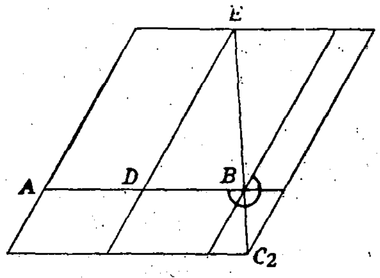
Сл. 3

AC'_1 има дату вредност $P < R$. Ова тачка C'_1 одговара другом решењу истог проблема. Конструкција те тачке се врши из услова да је површина паралелограма EC'_1 позната. Заиста, та површина је једнака разлици $R - P$ површине EL и површине означеног гномона која је једнака датој површини P.

Наредни Еуклидов задатак је аналоган претходном задатку и одговара случају кад је дата површина P већа од R. Задатак гласи.

Задатак 29. На датој дужи конструисати паралелограм са сувишком сличним датом паралелограму, а једнак датој праволиниској слици.

При решавању овог задатка улогу паралелограма EC_1 односно EC'_1 претходног задатка игра паралелограм EC_2 (сл. 4). Површина тог паралелограма једнака је збиру површине R паралелограма BE и површине означеног гномона; а површина тог гномона је једнака датој површини P. Конструкција паралелограма EC_2 код тачке E се врши на исти начин као и у претходном задатку. Паралелограм BC_2 игра улогу сувишка за паралелограм конструисан са страном AB.



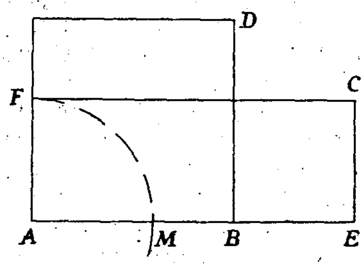
Сл. 4

Друго решење тог задатка се своди, како се то лако утврђује аналитички, на конструкцију истог сувишка BC_2 са леве стране од тачке A.

Природно је поставити питање: зашто је Еуклиду била потребна наведена теорема и ова два задатка, који се сами по себи могу сматрати као другостепени.

Непосредни одговор на ово питање, с једне стране, даје наредни задатак.

Задатак 30. Дату ограничену праву (дуж) поделити у крајњој и средњој размери (тј. непрекидно).



Сл. 5

Еуклид решава овај задатак овако. На основу претходног задатка на датој дужи $AB = a$ конструише се правоугаоник AC (сл. 5) једнак квадрату AD са сувишком BC исто тако у облику квадрата.

Ако страну квадрата сувишка означимо са x, тада из једнакости површина BC и FD имамо

$$x^2 = a(a - x),$$

одакле следује

$$a : x = x : (a - x)$$

и према томе тачка M (са $AM = AF = x$) дели дуж непрекидно.

Са друге стране, треба обратити пажњу на то да и наведена теорема и три конструктивна задатка стоје у вези са функционалним везама, које се изражавају квадратном једначином. Конструктивни задаци служе у суштини као графичка метода за решавање квадратне једначине. Не располажући апаратом једначина Еуклид је ипак разумео природу постављених задатака и, као и његови претходници, оценио, можда и недовољно свесно, те задатке као важан математички апарат и издвојио их на крају своје планиметрије која се завршава у шестој књизи Елемената.

(Саопштено на седници Мат. инст. 24-XI-1954)

SUR QUELQUES PROPOSITIONS DU SIXIÈME LIVRE D'ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

par

Anton Bilimović

Dans la présente note l'auteur analyse, d'abord, le Théorème 27 du sixième livre d'Éléments d'Euclide qui est ainsi énoncé:

De tous les parallélogrammes, construits sur une partie de droite donnée et amoindris des parallélogrammes semblables et semblablement situés sur l'autre partie du segment, le plus grand est celui qui est construit sur la première et semblable au parallélogramme dont il est amoindri.

Puis, il analyse les problèmes de construction se rattachant au théorème précédent.

Dans le théorème cité Euclide cherche à résoudre un problème des extrema, mais comme le montre l'analyse, n'y parvient pas complètement, ne disposant pas de l'appareil mathématique approprié. L'importance de ces problèmes est à chercher dans leur lien avec les méthodes géometriques qu'Euclide applique pour résoudre certaines équations du second degré.