Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

АНТОН БИЛИМОВИЋ

О ДЕВИЈАЦИОНОМ ЦЕНТРУ

У случају кретања чврстог тела око непомичне тачке, писац уводи појам вектора положаја девијационог центра оптерећеног девијационим оптерећењем; помоћу њега успоставља врло једноставну везу између тренутне угаоне брзине и главног момента количине кретања.

Садржај овог чланка се односи на неке појмове који стоје у вези са механиком чврстог тела. При томе је за третирање тих појмова довољно ако се зауставимо на специјалном случају кретања чврстог тела, наиме на обртању тог тела око непомичне тачке. У кинематици и динамици таквог кретања основну улогу играју два вектора: 1. тренутна угаона брзина обртања тела око непомичне тачке и 2. главни момент количина кретања у односу на исту тачку. Први вектор означимо са $\vec{\omega}$, други са $\vec{G}$.

Ако за осе чврсто везане са телом узмемо главне осе инерције за непомичну тачку O и координате вектора $\vec{\omega}$ означимо са p, q, r, координате вектора $\vec{G}$ имају вредности Ap, Bq, Cr, где су A, B, C главни моменти инерције. Према томе у изабраном систему координатних оса између координата вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$ постоји врло једноставна веза. У општем случају произвољних оса вектор $\vec{G}$ је производ тензора инерције тела за тачку O и угаоне брзине $\vec{\omega}$.

Наведена једноставно изражена веза између координата вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$ ипак не даје јасне геометриске повезаности та два вектора. Циљ ових редова је поставити непосредну геометриску везу између вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$.

Ако са $\vec{r}_i$ означимо вектор положаја масе m_i тачке тела у односу на тачку O, а са $\vec{v}_i$ брзину те тачке, онда можемо написати

$$\vec{G} = \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i],$$

где је збир проширен на све материјалне тачке тела. Заграде означавају векторски производ.

Како у нашем случају за чврсто тело имамо

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i],$$

добивамо ову вредност момента:

$$\vec{G} = \sum m_i \, [\vec{r}_i \, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]].$$

Раставимо сад вектор $\vec{r}_i$ у две компоненте: у правцу угаоне брзине $\vec{\omega}$ и у правцу нормалном на ту брзину. Прву компоненту означимо са $\vec{h}_i$, а другу са $\vec{d}_i$, тј. ставимо

$$\vec{r}_i = \vec{h}_i + \vec{d}_i .$$

Узимајући у обзир да је $[\vec{\omega}, \vec{h}_i] = 0$, $(\vec{\omega}, \vec{d}_i) = 0$, односно $(\vec{h}_i, \vec{d}_i) = 0$, где мале заграде означавају скаларни производ, можемо овако рачунати:

$$\begin{aligned}\vec{G} &= \sum m_i \, [\vec{h}_i + \vec{d}_i , [\vec{\omega}, \vec{h}_i + \vec{d}_i]] = \\ &= \sum m_i \, [\vec{h}_i + \vec{d}_i , [\vec{\omega}, \vec{d}_i]] = \\ &= \vec{\omega} \sum m_i d_i^2 - \sum m_i (\vec{\omega}, \vec{h}_i) \vec{d}_i .\end{aligned}$$

Како је $\sum m_i d_i^2$ момент инерције J_ω тела у односу на осу вектора $\vec{\omega}$ и $(\vec{\omega}, \vec{h}_i) = \omega h_i$, где смо са h_i означили алгебарску вредност растојања тачке m_i од равни π која пролази кроз тачку O и стоји управно на правац $\vec{\omega}$, претходни рачун доводи до резултата

$$\vec{G} = J_\omega \vec{\omega} - \omega \sum m_i h_i \vec{d}_i . \tag{1}$$

Први члан написане разлике, који ћемо звати *инерциони део момента*, једнак је производу момента инерције тела око осе обртања и угаоне брзине као вектора. Други члан те разлике звaћемо *девијациони део момента*. Тај члан има вредност производа интензитета угаоне брзине ω и израза

$$\sum m_i h_i \vec{d}_i .$$

У том збиру вектор $\vec{d}_i$ можемо сматрати као вектор положаја у погледу на тачку O пројекције тачке тела са масом m_i

на раније наведену раван π, управну на $\vec{\omega}$. Сваки од ових вектора је оптерећен у збиру скаларом $m_i h_i$. Слично случају увођења центра маса можемо и овде збир претставити овако:

$$\sum m_i h_i \vec{d}_i = m h \vec{d}_D, \tag{2}$$

где смо ставили

$$m = \sum m_i, \quad m h = \sum m_i h_i.$$

Тачку D са вектором положаја $\vec{d}_D$ дефинисаним једначином (2) зваћемо *девијациони центар тела за дати правац* $\vec{\omega}$. Скалар mh је његово *девијационо оптерећење*. Према томе је вектор

$$m h \vec{d} = \vec{S}_D$$

вектор положаја девијационог центра оптерећен девијационим оптерећењем. Тај вектор има димензију производа масе и квадрата дужине. Тачка D се налази у равни π, а исто тако и крај вектора $\vec{S}_D$.

На тај начин моменту $\vec{G}$ можемо дати овај облик

$$\vec{G} = J_\omega \vec{\omega} - \vec{S}_D \omega, \tag{3}$$

при чему је

$$(\vec{S}_D, \vec{\omega}) = 0.$$

Приметимо да скаларни производ $\vec{G}$ и $\vec{\omega}$ даје

$$(\vec{G}, \vec{\omega}) = J_\omega \omega^2 = 2T,$$

где је T жива сила чврстог тела.

Није тешко израчунати координате вектора $\vec{S}_D$ у односу на главне осе тела за тачку O. Ако те координате означимо са x, y, z, имамо из (3), рецимо, за x:

$$x\omega = J_\omega p - Ap,$$

одакле за x и слично за друге координате имамо

$$\begin{aligned} x &= (\quad * \quad - cv^2 + bw^2)\, u, \\ y &= (\quad cu^2 \quad * \quad - aw^2)\, v, \\ z &= (- bu^2 + av^2 \quad * \quad)\, w, \end{aligned} \tag{4}$$

где су $u = p/\omega$, $v = q/\omega$, $w = r/\omega$ косинуси правца вектора $\vec{\omega}$.

Према томе је

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{5}$$

и

$$a = B - C, \quad b = C - A, \quad c = A - B,$$

и на тај начин

(6) $$a + b + c = 0.$$

Према једначинама (4), сваком правцу (u, v, w) одговара једна тачка, крај вектора $\vec{S}_D$. Са променом тог правца ова тачка описује површину. Једначине (4) су параметарске једначине те површине са везом (5) између параметара u, v, w. Константе a, b, c задовољавају услов (6). Нисам проучавао у детаљима ту површину у општем случају. Да је у некој мери карактеришемо, узмимо на тој површини криву чије тачке одговарају правцу $\vec{\omega}$, који лежи у равни O_{yz}. За такве правце $u = 0$ и једначине (4) дају

$$x = 0, \quad y = -aw^2 v, \quad z = av^2 w;$$

према томе, наша крива у равни O_{yz} има једначину

$$(y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2$$

из које у поларним координатама следује једначина

$$\rho = \frac{a}{2} \sin 2\varphi,$$

а она не претставља ништа друго већ познати четворолисник.

Било аналитички помоћу једначина (4), било геометриски помоћу тачке одговарајуће површине, можемо за сваки правац вектора $\vec{\omega}$ према обрасцу (3) конструисати, прво, инерциони, а затим и девијациони део момента $\vec{G}$. На тај начин образац (3) заиста утврђује врло једноставну геометриску везу између вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{G}$.

(Саопштено на седници Мат. инст. 16-VI-1954)

SUR LE CENTRE DE DÉVIATION

par

A. Bilimović

Entre les coordonnées du vecteur de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et du moment des quantités de mouvement $\vec{G}$ d'un corps solide on a une relation analytique simple. L'auteur établit une relation géométrique directe entre ces vecteurs, à savoir

$$\vec{G} = J_\omega \vec{\omega} - \omega \sum m_i h_i \vec{d}_i = J_\omega \vec{\omega} - \vec{S}_D \omega.$$

Au second membre de cette relation figurent les parties inertiale et déviationnelle du moment. La partie déviationnelle s'interprète en introduisant un point spécial, le centre de déviation pour une direction déterminée et avec une charge déviationnelle déterminée. Puis, l'auteur étudie les changements de positions du centre de déviation relatifs aux changements de directions du vecteur $\vec{\omega}$.