*Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955*
*Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII*
*Institut Mathématique № 4, 1955*

В. ПОПОВИЋ

# О ЈЕДНОМ СТАВУ Н. ОБРЕШКОВА

Ако постоји $f^{(n-1)}(x)$ за свако $x$, тада из $f^{(n-1)}(x) \to \delta_1 (x \to +\infty)$ и из $f^{(n-1)}(x) \to \delta_2 (x \to -\infty)$ следи $f(x)/x^{n-1} \to \delta_1/(n-1)!$ $(x \to +\infty)$ и $f(x)/x^{n-1} \to \delta_2/(n-1)!$ $(x \to -\infty)$. Одавде следи један познати став Н. Обрешкова.

**1.** У овоме раду извешћемо просту везу између $n$ пута диференцијабилне функције и граничних вредности њених извода. Затим ћемо показати да из те везе, егзистенције $n$-тог извода једне функције и одређеног понашање те функције у бесконачном, произлази да та функција може бити само полином одређеног степена.

У ту сврху навешћу, пре свега, један став Н. Обрешкова [1]. Тај став, чак и у нешто општијем облику, следи из једног става који сам извео из врло корисне, али и мало употребљаване теореме Штолца, која гласи:

*Ако је функција $\Phi(x)$ реална и*

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty ,$$

*онда је*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\Phi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{\Phi'(x)}$$

*под услов да граница на десној страни постоји.*[1]

Овај став је општији од Лопиталовог утолико што не води рачуна о понашању функције $F(x)$. Уз то овај став не захтева непрекидност извода $F'(x)$ и $\Phi'(x)$.

Значај Штолцове теореме истакнут је нарочито у познатом Пероновом раду [2].

**2.** Поменути став Н. Обрешкова гласи:

*Нека је $f(x)$ реална функција таква да је*

$$f^{(n)}(x) \geqslant 0 \quad \text{за} \quad -\infty < x < +\infty . \tag{1}$$

[1] Штолцов став важи такође и тада кад је граница на десној страни у овом изразу $\infty$.

*Претпоставимо да постоји низ* $y_\lambda$, *неограничен са обе стране, тако да је*

$$\lim_{\lambda\to-\infty} y_\lambda = -\infty, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} y_\lambda = +\infty$$

*и цео број* $m < n$ *такав да је*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = 0. \tag{2}$$

*Тада је функција* $f(x)$ *полином степена* $\leqslant m-1$.

Ми ћемо доказати следећи став:

СТАВ 1. *Ако је* $f(x)$ *реална функција, и ако за свако* $x$ *постоји* $f^{(n-1)}(x)$, *и ако постоје границе*

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n-1)}(x) = \delta_1, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f^{(n-1)}(x) = \delta_2, \tag{4}$$

*где* $\delta_1$ *и* $\delta_2$ *не морају бити коначни, онда је*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n-1}} = \frac{\delta_1}{(n-1)!}, \tag{5}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \frac{f(x)}{x^{n-1}} = \frac{\delta_2}{(n-1)!}. \tag{6}$$

Из овог става следи непосредно наведени став Н. Обрешкова ако још узмемо у обзир услове (1) и (2); јер ако (5) и (6) напишемо сада у облику

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{(n-1)-m}} \cdot \frac{f(x)}{x^m} = \frac{\delta_1}{(n-1)!}, \tag{5a}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{(n-1)-m}} \cdot \frac{f(x)}{x^m} = \frac{\delta_2}{(n-1)!}, \tag{6a}$$

онда за $m \leqslant n-1$ из услова (2) следи, узимајући за $x = y_\lambda$ $(\lambda \to \pm\infty)$, да је $\delta_1 = \delta_2 = 0$. С обзиром на (1), функција $f^{(n-1)}(x)$ монотоно расте за све $x$, и то, према (3) и (4), између граница $\delta_1$ и $\delta_2$.

Стога, из $\delta_1 = \delta_2 = 0$, тј. кад се границе поклопе, следи да је

$$f^{(n-1)}(x) = 0 \quad \text{за све } x,$$

одакле закључујемо да је функција $f(x)$ полином степена $\leqslant n-2$, тј. $\leqslant m-1$.

**3.** Доказ става 1. Из услова (3), по Штолцовој теореми следи да је

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f^{(n-1)}(x)\,dx}{\int_0^x 1\cdot dx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n-1)}(x)}{1}=\delta_1, \tag{7}$$

јер написани интеграли имају $f^{(n-1)}(x)$ и 1 као изводе по горњој граници $x$. Кад те интеграле израчунамо, из (7) добивамо да је:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(0)}{x}=\delta_1. \tag{8}$$

На исти начин, по Штолцовој теореми, из (8) следи

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x [f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(0)]\,dx}{\int_0^x x\,dx}=\delta_1,$$

тј.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(n-3)}(x)-xf^{(n-2)}(0)-f^{(n-3)}(0)}{\frac{x^2}{2!}}=\delta_1.$$

Кад овај поступак применимо укупно $(n-1)$ пут добивамо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\left\{\frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(0)+\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}f^{(n-3)}(0)+\dots+xf'(0)+f(0)\right\}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}=\delta_1, \tag{9}$$

а одавде, како је израз у великој загради у (9) полином степена $(n-2)$, добивамо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}}=\frac{\delta_1}{(n-1)!}. \tag{10}$$

На аналоган начин, из услова (4) добивамо да је:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^{n-1}}=\frac{\delta_2}{(n-1)!}. \tag{11}$$

**3.1.** Из овог нашег става следи да став Н. Обрешкова можемо дати у нешта општијем облику:

Из услова (1) користимо само чињеницу да је функција $f^{(n-1)}(x)$ монотона; стога тај услов можемо заменити нешто општијим условом да је функција $f^{(n)}(x)$ монотона за $-\infty<x<+\infty$, што према ставовима повлачи егзистенцију $n$-тог извода $f^{(n)}(x)$ скоро свугде.

Број $m$ не мора бити увек цео број.

У услову (2) десна страна може бити и константна различита од 0, тј. да је

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^m} = C.$$

Из једначина (5а) и (6а) следи да је функција $f(x)$:

α) полином степена $n-1$ за $C \neq 0$ и притом $m = n-1$;

β) полином степена $< n-1$ ако је или $C = 0$ или $m < n-1$.

Уместо низа $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ можемо узете низ $\{y_\lambda\}_0^{\infty}$, али онда претпоставци $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ морамо додати на пр.

$$f^{(n+1)}(x) \geqslant 0.$$

Тада функција $f^{(n-1)}(x)$ не само да је монотона, већ и конкавна, а ово је немогуће због услова

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(y_\lambda)}{y_\lambda^m} = 0,$$

из којег следи, према претходном ставу, да је функција $f^{(n-1)}(x)$ конвексна.

Дакле:

$$f^{(n-1)}(x) \equiv 0 \quad \text{за све } x.$$

*(Саопштено на седници Мат. инст. 31-III-1954)*

## ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Obrechkoff — Sur quelques propriétés des dérivées des fonctions d'une variable réelle. *Acta Sci. Math. Szeged* **XII** (B) (1950), стр. 231.

[2] O. Perron — Über einen Grenzwertsatz. *Math. Zeit.* **17** (1923), стр. 149.

## SUR UN THÉORÈME DE N. OBRECHKOFF

par

V. Popović

Dans [1] N. Obrechkoff a donné le théorème suivant:

de (1) et de l'existence d'une suite à deux côtés $\{y_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$, avec

$$\lim_{\lambda \to +\infty} y_\lambda = -\infty , \quad \lim_{\lambda \to +\infty} y_\lambda = +\infty$$

et telle qu'on ait (2), avec un entier $m < n$, résulte que $f(x)$ est un polynome de degré $\leqslant m-1$.

On montre dans cet article que ce théorème est une conséquance de la proposition suivante:

de (3) et (4) résulte (5) et (6).

On obtient cette proposition aisément du théorème bien connu de l'Hospital-Stolz. De plus, on en déduit qu'on peut remplacer, dans la théorème de Obrechkoff, $m$ par un nombre quelconque ($< n$), ou, par exemple, la condition (2) par la condition:

$$\{y_\lambda\}_0^\infty, \quad y_\lambda \to \infty, \quad \lambda \to \infty,$$

mais avec l'hypothèse supplémentaire

$$f^{(n+1)}(x) \geqslant 0 .$$