Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 1955
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О ЈЕДНОМ УОПШТЕЊУ LEGENDRE-ОВЕ РЕЛАЦИЈЕ

У овом се раду изводи једна трансформациона једначина која у себи кондензује два позната обрасца за трансформацију потпуних нормалних елиптичких интеграла III врсте и даје геометриску примену тога.

1. Означимо са F и E потпуне нормалне елиптичне интеграле I и II врсте са модулом k, са $F(k',\psi)$ и $E(k',\psi)$ нормалне елиптичне интеграле I и II врсте са комплементарним модулом

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

и са амплитудом ψ. Legendre је показао [1, t. I, стр. 133] да је

$$\begin{aligned} \sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} &= \\ = \frac{\pi}{2} - [FE(k',\psi)+EF(k',\psi)-FF(k',\psi)]& \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} k'^2\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{1-(1-k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} &= \\ = \frac{\pi}{2} - [FE(k',\psi)+EF(k',\psi)-FF(k',\psi)]. & \end{aligned} \tag{2}$$

Ако се први разломци подинтегралних функција напишу у облику

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\psi\cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\psi\cos^2\psi}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\psi\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\psi}$$

и

$$\frac{\sin^2\theta}{1-(1-k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta} = \frac{1}{-1+k'^2\sin^2\psi}\left[1-\frac{1}{1+(-1+k'^2\sin^2\psi)\sin^2\theta}\right],$$

једначине (1) и (2) дају обрасце помоћу којих се потпуни нормални елиптични интеграл III врсте

$$\Pi_0(n) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + n\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

може изразити комбинацијама нормалних елиптичних интеграла I и I врсте. Из прве, наиме, једначине следи

$$\Pi_0(\operatorname{ctg}^2\psi) = \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}\left[\frac{\pi}{2} + F\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi} - \mathrm{L}(k,\psi)\right], \quad (3)$$

док из друге следи

$$\Pi_0(-1 + k'^2\sin^2\psi) = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{k'^2\sin\psi\cos\psi}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{L}(k,\psi)\right] + F, \quad (4)$$

где је обележено

$$\mathrm{L}(k,\psi) = FE(k',\psi) + EF(k',\psi) - FF(k',\psi). \quad (5)$$

Кад величина ψ непрекидно расте од 0 до $\pi/2$, параметар $n = \operatorname{ctg}^2\psi$ у интегралу Π_0 једначине (3) непрекидно опада од $+\infty$ до 0, док за случај (4) параметар $n = -1 + k'^2\sin^2\psi$ непрекидно расте од -1 до $-k^2$. За $\psi = \pi/2$, интеграли $F(k',\psi)$ и $E(k',\psi)$ постају потпуни интеграли са комплементарним модулом. Ако их обележимо са F' и E', добива се за $\psi = \pi/2$ позната Legendre-ова релација [1]

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

која, уосталом, следи и из (1) или (2) за ту вредност ψ. Стога се релација (5) може сматрати као једно уопштење Legendre-ове релације па је

$$\mathrm{L}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Као што се видело, обрасци за изражавање интеграла III врсте помоћу оних I и II врсте важе за позитивне параметре и за оне који се налазе између -1 и $-k^2$. Напоменимо још да изрази (5) не долазе у обзир кад је параметар n интеграла Π_0 мањи од -1 јер, у таквом случају, за $\theta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{-n}}$ подинтегрална функција има дисконтинуитет, а како се та вредност налази у интегралним границама, интеграл Π_0 је у таквом случају дивергентан. Што се тиче случаја $-k^2 < n < 0$, за такве параметре постоји формула [2, § 49 и § 50]

$$\Pi_0(-k^2\sin^2\psi) = F + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}[FE(k,\psi) - EF(k,\psi)]$$

и у том случају израз $\mathrm{L}(k,\psi)$ не би био реалан, тј. не би довео до интеграла III врсте за чији је параметар $-k^2 < n < 0$.

Показало се да није оправдано дати једној извесној форми елиптичких интеграла III врсте неку нарочиту предност, а с тим у вези и једно нарочито функционално обележје, јер постоје још многе друге равноправне форме. При истраживањима веза између θ-функција и елиптичких интеграла III врсте, редукције на Legendre-ов нормални тип изискивала су многа рачунања, често и врло компликована. И, на основу Jacobi-ева става [2, § 49] да се Legendre-ов нормални тип елиптичног интеграла III врсте, а који садржи три аргумента, своди на функције у којима се појављују само два аргумента, ови интеграли би изгубили своју актуелност. Но, у великом броју случајева, нарочито у геометриским применама и када се ради о једноставнијим трансформацијама, узимање Legendre-вог типа за норму има своје оправдање, тим пре што се Legendre-ова метода одликује својим нарочито елементарним карактером. С друге стране, баш ове Legendre-ове методе инспирисале су Abel-а за његова класична открића. Стога и надаље могу бити актуелна испитивања Legendre-овог нормалног типа.

Чињеница да потпуни интеграли III врсте, и они са позитивним параметром као и они чији се параметар налази између -1 и $-k^2$ воде на исти израз $\mathrm{L}(k,\psi)$, указује да би и испитивање таквог израза било од интереса.

У овом раду, у т. 2 поставићу једну једноставну трансформациону једначину за изразе облика $\mathrm{L}(k,\psi)$, која у себи кондензује два позната обрасца за трансформацију потпуних нормалних елиптичких интеграла III врсте. У т. 3 показаћу да обрасци (3) и (4) добивају једноставнији облик кад се употреби трансформисан израз L, и даћу једну геометриску примену у том смислу. У т. 4 испитаћу израз L и поставићу доњу и горњу границу за такав израз. У т. 5 указаћу на геометриско значење уопштене Legendre--ове релације. На крају, у т. 6 даћу неколико специјалних вредности за израз L.

2. Из адиционих теорема за нормалне елиптичне интеграле I и II врсте [3, стр. 330—345]

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma),$$

$$E(k,\varphi) + E(k,\psi) = E(k,\sigma) + k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma,$$

при чему је

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma},$$

за $\sigma = \pi/2$ и за комплементаран модул k' следи

$$F(k',\varphi) + F(k',\psi) = F', \tag{8}$$

$$E(k',\varphi) + E(k',\psi) = E' + k'^2\sin\varphi\sin\psi, \tag{9}$$

при чему је

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}.$$

Множењем једначине (8) са E, једначине (9) са F и сабирањем, добија се

$$[FE(k',\varphi) + EF(k',\varphi)] + [FE(k',\psi) + EF(k',\psi)] =$$
$$= (FE' + EF') + Fk'^2\sin\varphi\sin\psi.$$

Како на основу једначине (5) израз у првој загради има вредност $\mathrm{L}(k,\varphi) + FF(k',\varphi)$, израз у другој загради има вредност $\mathrm{L}(k,\psi) + FF(k',\psi)$; како на основу Legendre-ове релације (6) израз у загради на десној страни има вредност $\pi/2 + FF'$, то следи

$$\mathrm{L}(k,\varphi) + \mathrm{L}(k,\psi) + F[F(k',\varphi) + F(k',\psi)] =$$
$$= \frac{\pi}{2} + FF' + Fk'^2\sin\varphi\sin\psi,$$

а због једначине (8),

$$\mathrm{L}(k,\varphi) + \mathrm{L}(k,\psi) = \frac{\pi}{2} + Fk'^2\sin\varphi\sin\psi, \tag{10}$$

при чему је

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}. \tag{11}$$

Једначина (10) даје могућност да се израз $\mathrm{L}(k,\psi)$ трансформише у други израз $\mathrm{L}(k,\varphi)$, при чему су величине φ и ψ везане једначином (11).

Помоћу горње једначине могу се добити два позната обрасца из теорије елиптичних интеграла.

Ставимо у једначини (3)

$$\operatorname{ctg}^2\psi = n.$$

Ова ће постати

$$\Pi_0(n) = \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\left[\frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n+k^2}{n(n+1)}} - \mathrm{L}(k,\psi)\right],$$

при чему је

$$\psi = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{n}\,,$$

а одавде следи

$$\mathrm{L}(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n+k^2}{n(n+1)}} - \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\,\Pi_0(n). \tag{12}$$

Ако овде уведемо величину φ на основи једначине (11), биће

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{k^2}{n} > 0\,,$$

па ће зато и за нови параметар $N = k^2/n$ важити једначина (12), тј. биће

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{N+k^2}{N(N+1)}} - \sqrt{\frac{(N+1)(N+k^2)}{N}}\,\Pi_0(N),$$

при чему је $\varphi = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{N}$; дакле,

$$\mathrm{L}(k, \varphi) = \frac{\pi}{2} + F\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} - \sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\,\Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right), \tag{13}$$

при чему је $\varphi = \operatorname{arc\,ctg} k/\sqrt{n}$. Сабирањем једначина (12) и (13), а на основу једначине (10), добива се

$$\Pi_0(n) + \Pi_0\left(\frac{k^2}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} + F. \tag{14}$$

Ово је позната формула за збир два потпуна нормална елиптична интеграла III врсте истог модула, а са различитим параметрима [4]. Ова формула изведена је уз претпоставку да су параметри n и k^2/n позитивни. Но она важи и за случај кад се параметри налазе између -1 и $-k^2$; јер када се у једначини (4) стави $-1 + k'^2 \sin^2 \psi = n$ и примени исти поступак као изложени, опет резултује једначина (14). Но ово је и разумљиво, јер и једначина (3) и једначина (4) воде на исти израз $\mathrm{L}(k, \psi)$.

Узмимо опет

$$n = \operatorname{ctg}^2 \psi\,.$$

Тада важи једначина (12). Узимајући за величину φ вредност на основи једначине (11), види се да ће се величина

$$-1 + k'^2 \sin^2 \varphi = -\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}$$

налазити између -1 и $-k^2$. Стога за величину φ важи једначина (4) у којој, сада, стоји φ место ψ, у којој је нови параметар

$$N = -\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}$$

и која се, сада, због $N = -1 + k'^2 \sin^2\varphi$ своди на облик

$$\mathrm{L}(k,\varphi) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{(N+1)(N+k^2)}{N}}\,[\Pi_0(N) - F],$$

тј.

$$\mathrm{L}(k,\varphi) = \frac{\pi}{2} - k'^2\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\left\{\Pi_0\left[-\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}\right] - F\right\},$$

при чему је

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}.$$

Сабирањем овог израза $\mathrm{L}(k,\varphi)$ са једначином (12) и водећи рачуна о једначини (10), добива се после краћег рачуна

$$\begin{aligned}\Pi_0(n) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} &+ \\ + \frac{F}{n+1} - \frac{n k'^2}{(n+1)(n+k^2)}\,\Pi_0&\left[-\frac{k^2(n+1)}{n+k^2}\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Ово је позната формула на основи које се потпуни нормални елиптични интеграл III врсте са позитивним параметром може изразити таквим интегралом, но у коме параметар има вредност која се налази између -1 и $-k^2$. Ова формула се обично даје у облику

$$\begin{aligned}\Pi_0(k^2\operatorname{tg}^2\alpha) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha}} &+ \\ + \frac{F}{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{k'^2\sin^2\alpha}{1+k^2\operatorname{tg}^2\alpha}\,\Pi_0&[-(\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha)],\end{aligned}$$

на основи смене $n = k^2\operatorname{tg}^2\alpha$ [4].

3. Ако се на једначину (4) примени образац (10), тј. ако се место израза у средњој загради те једначине стави вредност $\mathrm{L}(k,\varphi) - F k'^2 \sin\varphi \sin\psi$, то на основи везе (11) следи једначина

$$\Pi_0(-1 + k'^2\sin^2\psi) = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{k'^2\sin\varphi\cos\varphi}\,\mathrm{L}(k,\varphi), \tag{16}$$

при чему је

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{k \operatorname{tg} \psi},$$

и која је једноставнија од једначине (4).

Примењујући исти поступак на једначину (3), добива се

$$\Pi_0 (\operatorname{ctg}^2 \psi) = \cos^2 \varphi \cdot F + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \mathrm{L}(k, \varphi). \tag{17}$$

И овде је

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{k} \operatorname{ctg} \psi.$$

Једначина (17) такође је подеснија од једначине (3), јер даје могућност да се израз $\mathrm{L}(k, \varphi)$ ограничи, што ћу касније показати.

У обрасцу за омотач косе кружне купе [5]

$$M = 2r\sqrt{s_1 s_2}\left(E - F \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) + 2r^2 [E_1 F - (F - E) F_1]$$

је r полупречник основе купе, s_1 и s_2 већа и мања изводница карактеристичног пресека, а δ угао тога пресека наспрам пречника. Ако се још углови наспрам страна s_1 и s_2 означе са β и γ, модул потпуних елиптичних интеграла је

$$k = \sin \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Амплитуда непотпуних интеграла E_1 и F_1 је

$$\psi = \arcsin \frac{2r}{s_1 + s_2},$$

и њихов модул је

$$k' = \cos \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Из горњег обрасца за омотач види се да израз у средњој загради претставља величину $\mathrm{L}(k, \psi)$. Ако се, сада, уведе трансформисан израз $\mathrm{L}(k, \varphi)$ на основу једначине (10), због једначине (11) биће

$$\sin \varphi = \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \psi}}.$$

Водећи рачуна о релацијама између страна и углова карактеристичног троугла

$$\frac{s_1+s_2}{2r}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}=\frac{k'}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

$$\frac{s_1}{2r}\cdot\frac{s_2}{2r}=\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\delta},$$

израз $k'^2\sin\varphi\sin\psi$ у једначини (10) добива, после краћег рачуна, облик

$$\frac{k'^2\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{k'^2-\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{\sin\beta\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot\sqrt{\frac{s_1}{2r}\cdot\frac{s_2}{2r}\sin^2\delta}=\frac{\sqrt{s_1 s_2}}{r}\sin^2\frac{\delta}{2}.$$

Ако се вредност унесе у једначину (10), а тако добивени израз за $\mathrm{L}(k,\psi)$ из те једначине у израз за омотач купе, добива се једноставнији израз за омотач

$$M=r^2\pi+2r\sqrt{s_1 s_2}\,E-2r^2\,\mathrm{L}(k,\varphi),$$

при чему је

$$\varphi=\arccos\frac{s_1-s_2}{s_1+s_2},$$

што се лако увиђа после краћег рачуна.

4. Стављајући у једначини (17) $n=\operatorname{ctg}^2\psi$, из ове следи

$$\Pi_0(n)=\frac{k^2}{n+k^2}\cdot F+\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,\mathrm{L}(k,\varphi), \tag{18}$$

одакле је

$$\mathrm{L}(k,\varphi)=\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\left[\Pi_0(n)-\frac{k^2}{n+k^2}\cdot F\right], \tag{19}$$

а при чему је

$$\operatorname{ctg}\psi=k\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{n},$$

тј.

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{n}}{k}. \tag{20}$$

Ако се, сада, интеграли Π_0 и F скупе, добива се

$$\mathrm{L}(k,\varphi)=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+n\sin^2\theta}\,d\theta \tag{21}$$

или

$$\mathrm{L}(k,\varphi)=\sin\varphi\,\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi\sin^2\theta}\,d\theta. \tag{22}$$

Из једначине (22) се види да је $\mathrm{L}(k,\varphi)$ позитивна величина. Сам интеграл сматран као функција од φ је позитиван и монотоно расте, јер подинтегрална функција остаје позитивна. То исто је случај и са изразом испред интеграла. Услед тога и израз $\mathrm{L}(k,\varphi)$ монотоно расте. Ако тај израз, уз стално k, обележимо са $\mathrm{L}(\varphi)$, услед $\mathrm{L}(\varphi)=FE(k',\varphi)+EF(k',\varphi)-FF(k',\varphi)$,

$$\mathrm{L}'(\varphi)=\frac{E-Fk'^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

$$\mathrm{L}''(\varphi)=\frac{k'^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)^{3/2}}(E+Fk'^2\sin^2\varphi-2F)=$$

$$=-\frac{k'^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\int_0^{\pi/2}\frac{1+k^2\sin^2\theta-k'^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta,$$

види се да је $\mathrm{L}''(\varphi)<0$, па је функција $\mathrm{L}(\varphi)$ конвексна. Њена најмања вредност у размаку $(0,\pi/2)$ је $\mathrm{L}(k,0)=0$, а највећа вредност, на основу једначине (7), је $\pi/2$.

Од интереса је неједначина

$$\mathrm{L}\left(k,\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\pi}{4},$$

која излази на основи Jensen-ове неједначине за конвексне функције [6]

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

а доња граница је постигнута за $k=1$, јер је

$$\mathrm{L}(1,\varphi)=F(1)E(0,\varphi)+E(1)F(0,\varphi)-F(1)F(0,\varphi)=E(1)F(0,\varphi)=\varphi.$$

Ако се израз $\mathrm{L}(k, \varphi)$ посматра као функција од k, на основи познатих образаца [7, стр. 226—227]

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{F}{k} + \frac{E}{k k'^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E-F}{k},$$

$$\frac{\partial F(k', \varphi)}{\partial k} = \frac{k F(k', \varphi)}{k'^2} - \frac{E(k', \varphi)}{k k'^2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{k\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{\partial E(k', \varphi)}{\partial k} = \frac{k\,[F(k', \varphi) - E(k', \varphi)]}{k'^2},$$

добива се, према (5),

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial k} = \frac{(E-F)\sin\varphi\cos\varphi}{k\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = -\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

или

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial k} = -\,y(k)\,J(k),$$

где је $y(k)$ коефицијент уз интеграл $J(k)$. Тај коефицијент је позитиван и лако се можемо уверити да он монотоно расте. Како је сам интеграл позитиван и монотоно расте, то је

$$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial k^2} = -\left(J\frac{\partial y}{\partial k} + y\frac{\partial J}{\partial k}\right) < 0,$$

па је функција $\mathrm{L}(k)$ конвексна и монотоно опада од $\mathrm{L}(0, \varphi)$ до $\mathrm{L}(1, \varphi)$, тј. од ${}^1\!/_2\,\pi\sin\varphi$ до φ, јер је

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(0, \varphi) &= F(0)E(1, \varphi) + E(0)F(1, \varphi) - F(0)F(1, \varphi)\\ &= F(0)E(1, \varphi) = {}^1\!/_2\,\pi\sin\varphi.\end{aligned}$$

За функцију $\mathrm{L}(k, \varphi)$ лако се изналазе границе ако се употреби облик (21), и то на следећи начин. Услед

$$\sqrt{1-k^2} \leqslant \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} \leqslant 1,$$

множењем ове двоструке неједначине са $\dfrac{d\theta}{1+n\sin^2\theta}$, после интегралења у границама 0 и $\pi/2$ добива се

$$\frac{k'\pi}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{1+n\sin^2\theta}\,d\theta \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{n+1}},$$

а после множења са $\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}$,

$$\frac{\pi}{2} k' \sqrt{\frac{n}{n+k^2}} \leqslant \mathrm{L}(k, \varphi) \leqslant \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{n+k^2}}$$

или, због (20),

$$\frac{\pi}{2} k' \sin \varphi \leqslant \mathrm{L}(k, \varphi) \leqslant \frac{\pi}{2} \sin \varphi. \tag{23}$$

До истих се резултата, разумљиво, долази ако се пође од једначине (16). Исто тако, лако се увиђа да трансформисани израз $\mathrm{L}(k, \varphi)$ даје једноставније границе од израза $\mathrm{L}(k, \psi)$, јер је облик интеграла за овај други случај компликованији, а то је, онда, случај и са границама за тај израз.

5. Познато је да усправна елиптична купа са основним осовинама a и b и и са висином H има омотач [8, стр. 305—306]

$$M = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{H^2}{a^2} \cos^2 \psi + \frac{H^2}{b^2} \sin^2 \psi + 1}\, d\psi,$$

при чему величина ψ претставља ексцентричну аномалију елипсе. Ако се отвор омотачеве мреже обележи са Ω, а ма која изводница купе са ρ, тада мора бити

$$dM = {}^1\!/_2\, \rho^2 \, d\Omega,$$

а из ове једначине, услед симетрије купе, следи

$$\frac{1}{4} \Omega = ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2} \sqrt{\frac{H^2}{a^2} \cos^2 \psi + \frac{H^2}{b^2} \sin^2 \psi + 1}\, d\psi =$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2} \sqrt{\left(1 + \frac{H^2}{b^2}\right) - \left(\frac{H^2}{b^2} - \frac{H^2}{a^2}\right) \cos^2 \psi}\, d\psi,$$

тј.

$$\frac{1}{4} \Omega = a \sqrt{H^2 + b^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2} \sqrt{1 - \frac{H^2 \varepsilon^2}{H^2 + b^2} \cos^2 \psi}\, d\psi,$$

I 4

где $\varepsilon = e/a$ претставља нумерички ексцентрицитет елипсе. Обележимо ли са r полупречник основе који одговара изводници ρ, биће

$$\rho^2 = H^2 + r^2 = H^2 + (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) = (b^2 + H^2)\left(1 + \frac{e^2}{b^2 + H^2} \cos^2 \psi\right),$$

а уношењем ове вредности за ρ добива се

$$\frac{1}{4}\,\Omega = \frac{a}{\sqrt{H^2 + b^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{H^2 \varepsilon^2}{H^2 + b^2} \cos^2 \psi}}{1 + \dfrac{e^2}{H^2 + b^2} \cos^2 \psi}\, d\psi .$$

Због $\varepsilon \leqslant 1$, коефицијент уз $\cos^2 \psi$ у бројиоцу мањи је од јединице. Обележимо га са k^2. Коефицијент уз $\cos^2 \psi$ у имениоцу обележимо са n. Тада је

$$\frac{a}{\sqrt{H^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n + k^2}} .$$

Ако се још изврши смена $\psi = \pi/2 - \theta$, отвор омотача ће бити

$$\Omega = 4 \sqrt{\frac{n(n+1)}{n + k^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}{1 + n \sin^2 \theta}\, d\theta ,$$

тј., према једначини (21),

$$\Omega = 4\, \mathrm{L}(k, \varphi),$$

где је, због једначине (20),

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{H} .$$

Ако са α обележимо угао осовинског пресека који пролази кроз велику осовину елипсе и који лежи наспрам те осовине, биће

$$\frac{a}{H} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

па је зато

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} . \tag{24}$$

Из горњег излагања јасно се види геометриско значење израза $\mathrm{L}(k, \varphi)$. Тај израз претставља четвртину отвора омотачеве мреже усправне елиптичне купе. При томе, величина φ има значење (24), а величина k може се још изразити и у облику

$$k = \frac{H \varepsilon}{\sqrt{H^2 + b^2}} = \frac{\varepsilon \cos \alpha/2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha/2}} . \tag{25}$$

Истакнимо још геометриско значење неједначине (23). Тога ради, означимо са β угао осовинског пресека који пролази кроз малу осовину елипсе и који лежи наспрам те мале осовине. Тада ће, према једначини (25), бити

$$k = \varepsilon \cos \beta/2, \quad k' = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta/2}$$

и

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\sqrt{H^2 + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \beta/2}} = \frac{\sin \beta/2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta/2}},$$

па је

$$k' \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2}.$$

Услед тога, из неједначине (23) следи

$$2\pi \sin \frac{\beta}{2} \leqslant \Omega \leqslant 2\pi \sin \frac{\alpha}{2},$$

па нам ова неједначина изражава да се отвор омотачеве мреже усправне елиптичне купе налази између отвора двеју кружних купа чији су пречници основâ мала и велика осовина елипсе.

За случај кружне купе ($\beta = \alpha$), због $\varepsilon = 0$ следи $k' = 1$, па се у том случју границе поклапају и добива тачна вредност за Ω:

$$\Omega = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2},$$

што, уосталом, следи и из израза за $\Omega\,(k = 0)$, а што се и могло очекивати.

6. Из обрасца (14) следи за $n = k$:

$$\Pi_0(k) = \frac{\pi}{4(1+k)} + \frac{1}{2} F,$$

а на основу једначине (18) следи

$$\Pi_0(k) = \frac{k}{1+k} F + \frac{1}{k+1} \mathrm{L}(k, \varphi),$$

при чему је

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{n}}{k} = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{k}.$$

Стога је

$$\mathrm{L}(k, \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{k}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1-k}{2} F.$$

Као што се види, овде се функција L изражава само потпуним интегралом I врсте. Но постоји читав низ вредности за φ на основи којих је могуће такво изражавање. У једном свом ранијем раду [9] указао сам на једну методу добивања везе између параметра и модула потпуног нормалног елиптичног интеграла III врсте, чијом применом се такав интеграл изражава помоћу потпуног нормалног елиптичног интеграла I врсте. Замењујући такве вредности у једначине (16) или (19), из њих следе поменуте вредности за $L(k, \varphi)$.

Примера ради, ако је φ корен једначине

$$k'^2 \sin^4\varphi - 2k'^2 \sin^3\varphi + 2\sin\varphi - 1 = 0, \tag{26}$$

показао сам да ова једначина даје само једну реалну вредност за φ и да је

$$\Pi_0 (k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{\pi}{6k'} \sqrt{2\sin\varphi - 1} - \frac{F}{3} (\sin^2\varphi - \sin\varphi - 2).$$

Како је, на основи једначине (19),

$$L(k, \varphi) = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}{\sin\varphi \cos\varphi} (\Pi_0 - F\cos^2\varphi),$$

то је

$$L(k, \varphi) = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}{\sin\varphi \cos\varphi} \left[\frac{\pi}{6k'} \sqrt{2\sin\varphi - 1} + \frac{F}{3} (2\sin^2\varphi + \sin\varphi - 1)\right].$$

Ако се извуче пред заграду $\sqrt{2\sin\varphi - 1}$, а на основи (26) је

$$2\sin\varphi - 1 = 2k'^2 \sin^3\varphi - k'^2 \sin^4\varphi,$$

биће

$$\frac{\sqrt{(1 - k'^2 \sin^2\varphi)(2\sin\varphi - 1)}}{\sin\varphi \cos\varphi} = \frac{k' \sqrt{(1 - k'^2 \sin^2\varphi)(2\sin\varphi - \sin^2\varphi)}}{\cos\varphi} =$$

$$= \frac{k' \sqrt{(k'^2 \sin^4\varphi - 2k'^2 \sin^3\varphi + 2\sin\varphi) - \sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = k',$$

па је

$$L(k, \varphi) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} F k' (1 + \sin\varphi) \sqrt{2\sin\varphi - 1}.$$

Напоменимо само да је [9]

$$\sin\varphi = {}^1/_2 (1 - \sqrt{1 + A} + \sqrt{2 - A + 2\sqrt{1 - A + A^2}}),$$

где је

$$A = \sqrt[3]{\frac{4k'^2}{k^4}}.$$

Разумљиво је да би се и овде добио исти резултат да се пошло од једначине (16).

Лако се добива још једна вредност за L у наведеном смислу, ако се употребе једначине (10) и (11). Из (11), наиме, следи

$$\psi = \operatorname{arc\,ctg}(k \operatorname{tg} \varphi), \tag{27}$$

па је

$$\mathrm{L}(k, \psi) = \frac{\pi}{2} + F k'^2 \sin\varphi \sin\psi - \mathrm{L}(k, \varphi) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{F k'^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}} - \mathrm{L}(k, \varphi).$$

Водећи рачуна о једначини (26), други члан десне стране може се писати у облику

$$\frac{F k'^2 \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{2\sin\varphi - \sin^2\varphi}}{\sqrt{(k'^2 \sin^4\varphi - 2k'^2 \sin^3\varphi + 2\sin\varphi) - \sin^2\varphi}} = F k'^2 \sin\varphi \sqrt{2\sin\varphi - \sin^2\varphi} =$$

$$= F k' \sqrt{2k'^2 \sin^3\varphi - k'^2 \sin^4\varphi} = F k' \sqrt{2\sin\varphi - 1},$$

па ако се за $\mathrm{L}(k, \varphi)$ стави малопре добивена вредност, биће

$$\mathrm{L}(k, \psi) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} F k' (2 - \sin\varphi) \sqrt{2\sin\varphi - 1},$$

при чему важе једначине (26) и (27).

(Саопштено на седници Мат. инст. 18-XI-1953)

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Legendre — Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes. Paris 1825.

[2] K. G. Jacobi — Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg 1829.

[3] O. Schlömilch — Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis. Braunschweig 1879.

[4] W. Laska — Sammlung von Formeln der reinen u. angewandten Mathematik. Braunschweig 1888—94.

[5] S. Fempl — Komplanacija kose kružne kupe. *Glasnik matematičko-fizički i astronomski* **4** (1949), str. 127—134.

[6] J. L. W. V. Jensen — Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les moyennes. *Acta mat.* **30** (1905), str. 175—193.

[7] A. Enneper — Elliptische Functionen. У преради F. Müller-a. Halle a. S. 1890.

[8] E. Czuber: — Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung. Bd. II. Leipzig—Berlin 1919.

[9] С. Фемпл — О неким редукцијама потпуног нормалног елиптичног интеграла III врсте. *Зборник радова Математичког института САН* **3** (1953), стр. 129—146.

GÉNÉRALISATION D'UNE RELATION DE LEGENDRE

par

Stanimir Fempl

L'auteur étudie l'expression

$$L(k, \psi) = F E(k', \psi) + E F(k', \psi) - F F(k', \psi),$$

où F et E sont les intégrales elliptiques normales complètes de I et II espèces au module k et $F(k', \psi)$, $E(k', \psi)$ les intégrales elliptiques normales au module complémentaire $k' = \sqrt{1-k^2}$ et amplitude ψ.

Cette expression représente une généralisation de la relation de Legendre

$$F E' + E F' - F F' = \frac{\pi}{2},$$

ou F' et E' sont les intégrales elliptiques normales complètes au module complémentaire.

L' auteur établit une équation de transformation (équations (10) et (11)) renfermant les deux formules connues de transformation des intégrales elliptiques normales complètes de III espèce (formules (14) et (15)). Puis il montre que les formules, à l'aide desquelles les intégrales elliptiques normales complètes de III espèce aux paramètres $n > 0$ ou $-1 < n < -k^2$, s'expriment par des combinaisons des intégrales elliptiques normales de I et II espèces, se simplifient si l'on applique l'équation précédente (formules (16) et (17)) et donne en même temps les limites de l'expression L.

De l'interprétation géométrique de l'expression L il ressort que $4L$ représente l'angle au sommet de la surface développée d'un cône elliptique droit. A la fin, l'auteur donne quelques valeurs spéciales de L.