Зборник радова С.А.Н. XLIII — Математички институт С.А.Н. књ. 4, 195
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XLIII
Institut Mathématique № 4, 1955

ВОЈИСЛАВ МАРИЋ

О АСИМПТОТСКОМ ПОНАШАЊУ ИНТЕГРАЛА ЈЕДНЕ КЛАСЕ НЕЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА

У овом се раду испитује асимптотско понашање интеграла једне класе диференцијалних једначина, која генералише Thomas-Fermi-ев диференцијални задатак теориске физике.

1. Диференцијални задатак

$$\text{(I)} \qquad y''(x) = f(x)\, y^{\lambda}(x); \quad y(0) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0, \quad \text{са} \quad \lambda > 1,$$

који генералише познати Thomas-Fermi-ев диференцијални задатак теориске физике, био је предмет испитивања више аутора који су доказали, за поједине класе функција $f(x)$, егзистенцију интеграла $y = y(x)$ који задовољава услове задатка и дали, било нумерички поступак за приближно израчунавање горњег интеграла, било његов асимптотски образац.

Најопштије резултате ове врсте добио је Авакумовић [1, 2]. Он је не само доказао [2] да једначина (I) има свега један интеграл који задовољава услове диференцијалног задатка (I), ако функција $f(x)$ задовољава услове

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1-\theta}}\right), \quad x \to \infty; \quad f(x) > \frac{1}{x^{1-\theta}}, \quad x \to \infty \quad \text{са} \quad \theta < 1;$$

већ је и испитао [1] асимптотско понашање тог интеграла под претпоставком да је $f(x) \sim \rho(x), x \to \infty$, при чему је $\rho(x) = \rho(x;\alpha)$ функција која задовољава услов

$$\text{(II)} \qquad \frac{\rho(xt)}{\rho(x)} \to t^{\alpha}, \quad x \to \infty,$$

за свако $t > 0$; осим тога показао је да је под претпоставком $\alpha > -2$,

$$y(x) \sim \left\{\frac{(1+\lambda+\nu)(2+\nu)}{(1-\lambda)^2}\right\}^{\frac{1}{\lambda-1}} \{x^2 \rho(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Као што је познато [3], функција $\rho(x)$ има канонички облик

$$\rho(x) = x^{\alpha} L(x),$$

где је $L(x)$ споро променљива функција, тј. функција која задовољава услов

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{L(xt)}{L(x)} \to 1, \quad x \to \infty \quad \text{за свако} \quad t > 0,$$

и има канонички облик

$$\text{(III)} \qquad L(x) = c(x)\, e^{\int^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}, \quad c(x) \to c, \quad \varepsilon(t) \to 0, \quad x \to \infty.$$

Овде ћу показати да се метод који је Авакумовић употребио може применити на испитивање асимптотског понашања интеграла једне општије класе диференцијалних једначина.

Да бисмо ову класу диференцијалних једначина лакше дефинасали, увешћемо неке скраћенице.

Тако, $L_n(x) = L_n(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ обележава функције једне специјалне класе споро променљивих функција. Ове функције имају облик

$$\text{(IIIa)} \qquad L_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \log_{\nu}^{\xi_\nu} x,$$

где су ξ_ν произвољни бројеви укључивши и нулу, а $\log_k x$ k-та итерација логаритма. Приметимо да функција $L_{n-1}(x)$, која ће нам касније бити потребна, има, према горњој дефиницији, облик

$$L_{n-1}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1} \log_{\nu}^{\xi_\nu} x.$$

Са $\rho_k(x)$ обележићемо функцију $\rho(e^{x^{1/k}}) = \rho(e^{x^{1/k}}; \alpha)$ са $\alpha > 0$. У овом раду испитаћемо асимптотско понашање интеграла $y = y(x)$ диференцијалног задатка

$$\text{(IV)} \qquad y''(x) = \rho_{\varkappa}(x)\, y^{\lambda}(x)\, L_n\!\left(\frac{1}{y(x)}\right), \qquad \lim_{x \to \infty} y(x) = 0,$$

са $\lambda > 1$, $\varkappa > 1$ и $\alpha > 0$.

Напоменимо одмах да, на основи напред споменуте теореме о егзистенцији интеграла задатка (I), услов $\alpha > 0$ осигурава решење задатка (IV).

СТАВ 1. *Ако је $y = y(x)$ неко решење диференцијалне једначине*

$$(*)\qquad y''(x) = \rho_{\varkappa}(x)\, y^{\lambda}(x)\, L_n\left(\frac{1}{y(x)}\right)$$

са $\lambda > 1$, $\alpha > 0$, $\varkappa > 1$, *које задовољава услов*

$$(**)\qquad y(x) \to 0, \quad x \to \infty,$$

тада је

$$(***)\quad y(x) = \left\{\frac{\xi_1\,\varkappa(\lambda-1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{x^{\frac{2\varkappa-2+\xi_1}{\varkappa}}\rho_{\varkappa}(x)\, L_{n-1}(x)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

Потребно је овде посебно истаћи да само функција, $(\log x)^{\xi_1}$ утиче на брзину којом интеграл $y(x)$ тежи нули као степен, док све остале функције $(\log_\nu x)^{\xi_\nu}$, $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ утичу само као различити чланови логаритамске скале. Та чињеница показује да је вероватно много теже одговорити на питање како се асимптотски понаша интеграл $y = y(x)$ задатка (*) где уместо функције $L_n(x)$ стоји ма каква L-функција.

Прво приметимо да једначина (*) сменом

$$y(x) = p(x)\, z\{\varphi(x)\},$$

где је $\varphi(x)$ решење Bernoulli-јеве једначине

$$(1)\qquad p(x)\,\varphi''(x) + 2\,p'(x)\,\varphi'(x) + \alpha\, p(x)\,\varphi'^2(x) = 0, \quad \alpha > 0,$$

прелази у једначину

$$(2)\qquad z_{\varphi\varphi} - \alpha\, z_{\varphi} = \chi\left\{\Omega\,\frac{\rho_n(pz)}{z\,\rho_n(p)} - 1\right\}$$

где је

$$\rho_n(x) = x^{\lambda} L_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad \chi = \frac{p''z}{p\,\varphi'^2}, \quad \Omega = \frac{\rho_{\varkappa}(x)\,\rho_n(y)}{p''}.$$

При томе смо $\varphi(x)$ одредили тако да је $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1/\alpha$: ове почетне вредности изабрали смо због лакше процене израза $p(x)\, e^{\alpha\varphi(x)}$, што ће нам бити потребно у леми 2.

Сада се проблем свео на испитивање асимптотског понашања интеграла једначине (2), за што нам је, међутим, потребно да повољно изаберемо функцију $p(x)$.

Доказ става 1 следи непосредно из ових помоћних ставова:

ЛЕМА 1. 1° *Нека је* $\alpha > 0$ *и нека су* $\Omega(x)$, $\chi(x)$, $\varphi(x$ *и* $p(x)$ *позитивне функције за* $x \geqslant 0$ *које задовољавају услове*

(i) $\Omega \to 1, \quad x \to \infty$; (ii) $\chi > c_1\, z(\varphi), \quad x \to \infty$; (iii) $p(x) \to 0, \quad x \to \infty$

2⁰ *Ако је* $z(\varphi)$ *оно решење диференцијалне једначине*

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_{\varphi} = \chi\left\{\Omega \frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1\right\} \tag{3}$$

које задовољава услове

(iv) $z(\varphi) > 0$ за све $x \geqslant 0$; (v) $\underset{\varphi\to\infty}{z(\varphi) = o(e^{\alpha\varphi})}$

онда

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty .$$

Ова лема, као што се види, упоређујући једначине (2) и (3), има нешто општији облик него што је то потребно за сам доказ става 1.

ЛЕМА 2. *Нека је* $p(x)$ *непрекидна конвексна функција која опада и задовољава услове*

$$p(x) \to 0, \quad x \to \infty , \tag{4}$$

$$\frac{p^2(x)}{x}\int_a^x \frac{dt}{p^2(t)} > \frac{c_2}{x^{1/k}}, \quad x > x_0 , \tag{5}$$

$$\frac{p''(x)}{p(x)} > c_3 x^{\frac{1}{k}-2}, \tag{6}$$

$$p''(x) \sim \rho_{\varkappa}(x)\rho_n(y), \quad x \to \infty , \tag{7}$$

тада су услови (i), (ii) *и* (v) *леме* 1. *задовољени.*

ЛЕМА 3. 1⁰ *Функција*

$$p(x) = \left\{\frac{\xi_1 \varkappa^{2\lambda-1}(\lambda-1)^{2\lambda-\xi_1}}{\alpha^{2\lambda-\xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \int_x^\infty dt \int_t^\infty \left\{\tau^{\frac{2\varkappa\lambda-2\lambda+\xi_1}{\varkappa}} \rho_{\varkappa}(x) L_{n-1}(x)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} dx \tag{8}$$

са $\lambda > 1$ *задовољава услове* (4), (5), (6) *и* (7) *леме* 2.

2⁰

$$p(x) \sim \left\{\frac{\xi_1 \varkappa (\lambda-1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{x^{\frac{2\varkappa-2+\xi_1}{\varkappa}} \rho_{\varkappa}(x) L_{n-1}(x)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad x \to \infty \tag{9}$$

Заиста, како према леми 3, функција $p(x)$ задовољава услове (4), (5), (6) и (7), то су, према леми 2, и услови (i) — (v) леме 1 задовољени, која са тако изабраном функцијом $p(x)$, даје

$$z(\varphi)\to 1, \quad \varphi\to\infty. \tag{10}$$

Како смо ставили

$$y(x)=p(x)\,z\{\varphi(x)\},$$

то је, због (10),

$$y(x)\sim p(x), \quad x\to\infty,$$

што је према (9), еквивалентно са тврдњом става.

Преостало је још да се докажу леме 1—3 што ћемо учинити у следећа три одељка.

2.1. Доказ леме 1. Метод који се овде користи познат је од раније [1] и само је унеколико модифициран.

Означимо са φ^* горњу границу нула (уколико их нема, за φ^* се може узети ма који коначан број) једначине

$$\Omega\frac{\rho(pz)}{z\rho(p)}-1=0, \tag{11}$$

Тада је или $\varphi^*<\infty$ или $\varphi^*=\infty$.

1. Нека је прво $\varphi^*<\infty$. Тада је или

a) $$\Omega\frac{\rho(pz)}{z\rho(p)}-1>0 \quad \text{за све } \varphi>\varphi^*,$$

или

b) $$\Omega\frac{\rho(pz)}{z\rho(p)}-1<0 \quad \text{за све } \varphi>\varphi^*.$$

У случају неједначине a) из (3), (ii) и (iv) следи

$$z_{\varphi\varphi}-\alpha z_{\varphi}>0 \quad \text{за све } \varphi>\varphi^*$$

или, ако двапут интегришемо,

$$z\gg c_4+c_5e^{\alpha\varphi}, \quad \text{за све } \varphi>\varphi^*,$$

што је у контрадикцији са (v); значи да у случају $\varphi^*<\infty$ неједначина a) не може постојати.

Ако, у случају неједначине b) функцију $\rho(x)$ напишемо у каноничком облику, следи да је

$$z^{\lambda-1} e^{\int_{p}^{pz} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} < \frac{c(p)}{c(pz)\,\Omega}. \tag{12}$$

Како је $-\delta < \varepsilon(t) < \delta$ чим је $\varphi > \varphi_0$, где је φ_0 неки довољно велики број, то због (i) из (12) добивамо

$$z^{\lambda-1+\delta} \leqslant 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \text{за све } \varphi > \varphi_0,$$

односно

$$\limsup z(\varphi) \leqslant 1, \quad \varphi \to \infty, \tag{13}$$

Како из (2), због b) следи

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha\, z_{\varphi} < 0 \quad \text{за све} \quad \varphi > \varphi_0, \tag{14}$$

то функција $z(\varphi)$ или стално расте или стално опада почев од неког $\varphi^{**} > \varphi^{*}$. Јер, уколико би постојало неко $\bar{\varphi} > \varphi^{*}$ такво да је $z_{\varphi}(\bar{\varphi}) = 0$, та би екстремна вредност због (14) била једина и то максимум. Постојало би, према томе, неко $\varphi^{**} > \varphi^{*}$ тако да би $z(\varphi)$ стално опадало за све $\varphi > \varphi^{**}$. Из те чињенице, из (iv) и из (13) добивамо да је

$$\lim_{\varphi \to \infty} z(\varphi) = \tau, \tag{15}$$

где је

$$0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Сада ћемо показати да је $\tau = 1$.

Из (14) и (15), према једном Tauber-ову ставу који потиче од Landau-a, следи да

$$z_{\varphi}(\varphi) \to 0, \quad \varphi \to \infty. \tag{16}$$

Претпоставимо прво да је $\tau = 0$. Тада је $z(\varphi)$ функција која опада, тј. $z_{\varphi} < 0$ за све $\varphi > \varphi^{**}$. У том случају је, према (14), $z_{\varphi\varphi} < 0$, па је $z(\varphi)$ конкавна функција почев од неког φ; то је, међутим, немогуће, због (15).

Претпоставимо затим да је

$$0 < \tau < 1. \tag{17}$$

Ако $\rho(p)$ напишемо у каноничком облику, тада из (3) због (15) и због $-\delta < \varepsilon(t) < \delta$, $\varphi > \varphi_0$ добивамо да је

$$z_{\varphi\varphi} > \chi \left\{ z^{\lambda-1+\delta} \frac{c(pz)}{c(p)} \Omega - 1 \right\}. \tag{18}$$

Како је, међутим, због (i), (ii) и (17)

$$\limsup \chi\left\{z^{\lambda-1+\delta}\,\frac{c\,(pz)}{c\,(p)}\,\Omega-1\right\}<-\varepsilon,\quad \varepsilon>0,$$

то из (18) следи

$$\limsup_{\varphi\to\infty} z_{\varphi\varphi}<-\varepsilon.$$

Ако горњи израз двапут интегришемо, добићемо

$$z(\varphi)<-\frac{\varepsilon'}{2}\varphi^2+c_6\varphi+c_7,\quad \varepsilon'>\varepsilon,\ \varphi>\varphi_0,$$

односно

$$\limsup_{\varphi\to\infty} z(\varphi)=-\infty,$$

што је у контрадикцији са (15). Следи према томе да је $\tau=1$.

2. Нека је најзад $\varphi^*=\infty$ и нека су φ_n, φ_{n+1} две узастопне нуле једначине (11). Тада је

(19) $$\frac{\rho\,(z_n\,p_n)}{z_n\,\rho\,(p_n)}-1=0,$$

тј.

(20) $$z_n^{\lambda-1}=\phi_n\,e^{-\int_{p_n}^{p_n z_n}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt},$$

где смо ставили

$$z\{\varphi_n(x)\}=z_n,\quad p\,(x_n)=p_n,\quad \frac{c\,(p_n)}{c\,(p_n\,z_n)\,\Omega_n}=\phi_n.$$

После логаритмовања (20) постаје

$$(\lambda-1)\log z_n=-\int_{p_n}^{p_n z_n}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt+\log\phi_n,$$

односно, с обзиром на једначину $-\delta<-\varepsilon(t)<\delta$ која важи за све $t>p_n$ чим је p_n тј. n довољно велико, рецимо веће од n_0,

$$\log\phi_n-\delta\log z_n<(\lambda-1)\log z_n<\delta\log z_n+\log\phi_n,\quad n>n_0.$$

Како $\phi_n\to 1$, то, чим буде $\delta<\lambda<1$, горње неједначине могу важити само ако је

(21) $$z_n\leqslant 1+\varepsilon,\quad n>n_0,$$

с друге стране је

$$\Omega\,\frac{c\,(p_n\,z_n)}{c\,(p)}\,e^{\int_{p_n}^{p_n z_n}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt}-1<\frac{c\,(p_n\,z_n)}{c\,(p_n)}\,\Omega\,z_n^{\lambda+\delta-1}-1.$$

Како је лева страна ове неједначине (јер је то у ствари друкчије написана лева страна једначине (19) једнака нули, то је

$$z_n^{\lambda+\delta-1} \geqslant \phi_n \geqslant 1-\varepsilon, \quad n > n_0,$$

што заједно са (21) даје

$$z_n \to 1, \quad n \to \infty.$$

Претпоставимо сада да z стално расте или опада у размаку $\{\varphi_n, \varphi_{n+1}\}$. Тада је

$$1-\varepsilon \leqslant z_n \leqslant z \leqslant z_{n+1} \leqslant 1+\varepsilon, \quad n > n_0,$$

или

$$1-\varepsilon \leqslant z_{n+1} \leqslant z \leqslant z_n \leqslant 1+\varepsilon, \quad n > n_0,$$

одакле непосредно следи да

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty,$$

ако φ стално расте или опада у размаку $\{\varphi_n, \varphi_{n+1}\}$.

Ако, напротив, у размаку $\{\varphi_n, \varphi_{n+1}\}$ постоји неко $\overline{\varphi}$ такво да је $\overline{z}_\varphi(\varphi)=0$, та екстремна вредност је минимум ако је

c) $$\Omega\,\frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 > 0, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1},$$

односно максимум ако је

d) $$\Omega\,\frac{\rho(pz)}{z\rho(p)} - 1 < 0, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}.$$

Претпоставимо да је минимум; тада из c) следи

$$z^{\lambda-1} e^{\int\limits_p^{pz} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt} > \phi \quad \text{за све} \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}, \quad n > n_0,$$

односно

(22) $$z^{\lambda-1+\delta} \geqslant 1-\varepsilon, \quad n > n_0.$$

Поред тога је

(23) $$z \leqslant \mathrm{Min}\,\{z_n, z_{n+1}\} \leqslant 1+\varepsilon, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}, \quad n > n_0.$$

Из (22) и (27) следи да

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty$$

Сличним резоновањем добива се за случај d)

$$z^{\lambda-1+\delta} \leqslant 1+\varepsilon, \quad n > n_0$$

и

$$z \geqslant \operatorname{Max}\{z_n, z_{n+1}\} \geqslant 1-\varepsilon, \quad \varphi_n < \varphi < \varphi_{n+1}, \quad n > n_0,$$

што заједно даје

$$z(\varphi) \to 1, \quad \varphi \to \infty,$$

чиме је лема 1 доказана.

2.2. Доказ леме 2. 1. На првом месту услов (i) следи непосредно из (7).

2. Како је

$$\chi = \frac{p''(x)\, z\{\varphi(x)\}}{p(x)} \left\{\frac{1}{\alpha} + \alpha \int_0^x \frac{dt}{p^2(x)}\right\}^2,$$

односно

$$\chi > \alpha^2 z\{\varphi(x)\} \frac{p''(x)}{p(x)} x^2 \left\{\frac{p^2(x)}{x} \int_a^x \frac{dt}{p^2(x)}\right\}^2,$$

то је због (5) и (6) услов (ii) задовољен.

3. Из (**) следи да и

(23) $$p(x)\, z\{\varphi(x)\} \to 0.$$

Како је с друге стране решење Bernoulli-јеве једначине (1) дато изразом

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} \log P(x),$$

где је

$$P(x) = 1 + \int_0^x \frac{dt}{p^2(x)},$$

то имамо

$$p(x)\, e^{\alpha\varphi(x)} = p(x)\left(1 + \int_0^x \frac{dt}{p^2(t)}\right)$$

$$> \frac{x}{p(x)} \frac{p^2(x)}{x} \int_0^x \frac{dt}{p^2(x)}, \quad x > x_0,$$

односно, с обзиром на (5),

$$p(x)\, e^{\alpha\varphi(x)} > c_2 \frac{x}{p(x)\, x^{1/\varkappa}}, \quad x > x_0,$$

што заједно са (24) даје услов (v), чиме је лема 2 доказана.

2.3. Доказ леме 3. Краткоће ради, у обрасцима (8) и (9) ставимо

$$(25)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\xi_1 \varkappa (\lambda-1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = A, & \left(\dfrac{\xi_1 \varkappa^{2\lambda-1} (\lambda-1)^{2\lambda-\xi_1}}{\alpha^{2\lambda-\xi_1}}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = A_1, \\ \dfrac{2\varkappa - 2 + \xi_1}{\varkappa(1-\lambda)} = \theta, & \dfrac{2\varkappa\lambda - 2\lambda + \xi_1}{\varkappa(1-\lambda)} = \theta_1. \end{cases}$$

1. Покажимо прво да је (10) тачно.

Ако у ту сврху извршимо у интегралу

$$J(t) = \int_t^\infty \{\rho_\varkappa(\tau)\, L_{n-1}(\tau)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\, \tau^{\theta_1}\, d\tau$$

смену

$$\tau = \log^\varkappa u, \quad d\tau = \frac{\varkappa}{u} \log^{\varkappa-1} u\, du,$$

он постаје

$$J(t) = \varkappa \int_{e^{t^{1/\varkappa}}}^\infty \{u^\alpha L(u)\, L_{n-1}(\log^\varkappa u)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\, u^{-1} (\log u)^{\varkappa\theta_1 + \varkappa - 1}\, du.$$

Ставимо даље

$$u = e^{t^{1/\varkappa}} v, \quad du = e^{t^{1/\varkappa}} dv;$$

тако добивамо

$$J(t) = \varkappa \{\rho_\varkappa(t)\, L_{n-1}(t)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\, t^{\theta_1 + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \int_1^\infty v^{\frac{\alpha}{1-\lambda}-1}\, \psi(v; t)\, dv,$$

где је

$$\Psi(v;t)=\frac{L(e^{t^{1/\varkappa}}v)\,L_{n-1}(\log^{\varkappa}e^{t^{1/\varkappa}}v)\,(\log e^{t^{1/\varkappa}}v)^{\varkappa\theta_1+\varkappa-1}}{L(e^{t^{1/\varkappa}})\,L_{n-1}(\log^{\varkappa}e^{t^{1/\varkappa}})\,(\log e^{t^{1/\varkappa}})^{\varkappa\theta_1+\varkappa-1}},$$

одакле, на основи особине (II) функције $L(x)$ (види [3]), следи

$$J(t)\sim\frac{\varkappa(\lambda-1)}{\alpha}\{\rho_{\varkappa}(t)\,L_{n-1}(t)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,t^{\theta_1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},\quad t\to\infty.$$

Ако сада овај поступак поновимо на интегралу

$$p(x)\sim A_1\frac{\varkappa(\lambda-1)}{\alpha}\int\limits_x^{\infty}\{\rho_{\varkappa}(t)\,L_{n-1}(t)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,t^{\theta_1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\,dt,\quad x\to\infty,$$

добивамо релацију (9), што је требало и показати.

2. Покажимо затим да функција $p(x)$ задовољава услов (5).

С обзиром на (9), услов (5) можемо писати у облику

$$u_1(x)\equiv A\,x^{2\theta-1}\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{2}{1-\lambda}}\int\limits_a^x(\rho_{\varkappa}(t)\,L_{n-1}(t))^{\frac{2}{\lambda-1}}\,t^{-2\theta}\,dt>\frac{c^2}{x^{1/\varkappa}}.$$

Ако у интегралу на левој страни горње неједначине извршимо смене као и мало пре, добићемо

$$u_1(x)\sim\frac{A}{x^{1/\varkappa}}>\frac{c^2}{x^{1/\varkappa}},\quad x\to\infty.$$

3. Услов (6) можемо због (9) и због

$$p''(x)=A_1\,x^{\theta_1}\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}},$$

што непосредно следи из (8), писати овако

$$u_2(x)\equiv\frac{A_1\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,x^{\theta_1+2}}{A\;\{\rho_{\varkappa}(x)\,L_{n-1}(x)\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\,x^{\theta}}>c_3\,x^{2/\varkappa}.$$

Како из леве стране горње неједначине следи одмах да је

$$u_2(x)\sim\frac{A_1}{A}\,x^{2/\varkappa}<c_3\,x^{2/\varkappa},$$

то је услов (6) испуњен.

4. Услов (7), према обрасцу (9) и уведеним ознакама (25) и с обзиром да је

$$L_n\left(\frac{1}{\rho}\right) \sim \frac{\xi_1}{\varkappa}\left(\frac{\alpha}{\lambda-1}\right)^{\xi_1} x^{\xi_1/\varkappa} \prod_{\nu=1}^{n-1} \log_\nu^{\xi_\nu} x\,,$$

можемо писати у облику

$$A_1\, x^{\theta_1}\, \rho_\varkappa^{\frac{1}{1-\lambda}}(x)\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} \log_\nu^{\xi_\nu} x\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \sim$$

$$\sim \frac{A\lambda\,\alpha}{1-\lambda}\, x^{\lambda\theta+\frac{\xi_1}{\varkappa}}\, \rho_\varkappa^{1+\frac{\lambda}{1-\lambda}}(x)\left(\prod_{\nu=1}^{n-1} \log_\nu^{\xi_\nu} x\right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}+1}.$$

Како је, очевидно,

$$1+\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}\,,$$

$$\lambda\theta+\frac{\xi_1}{\varkappa}=\theta_1\,,$$

$$A\lambda\left(\frac{\alpha}{\lambda-1}\right)^{\xi_1}\frac{\xi_1}{\varkappa}=A_1\,,$$

то је услов (7) задовољен.

5. Како, због $\alpha > 0$

$$A\left\{x^{\frac{2\varkappa-2+\xi_1}{\varkappa}}\,\rho_\varkappa(x)\, L_{n-1}(x)\right\} \to \infty, \quad x \to \infty\,,$$

то је, с обзиром на $\lambda > 1$, и услов (4), односно (iii), задовољен, па је лема доказана.

(Саопштено на седници Мат. инст. 14-X-1953)

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. G. Avakumović. — Sur l'Équation Differentielle de Thomas-Fermi. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe de Sci.* 1 (1947), стр. 101—113.

[2] В. Г. Авакумовић. — О диференцијалним једначинама Thomas-Fermi-ева типа. Егзистенција интеграла. *Глас САН*, **CXCI** (1948), стр. 163—185.

[3] J. Karamata. — Sur un Mode de Croissance Régulière. *Bull. de la Soc. Math. de France*, **LXI** (1953), стр. 55—62.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF INTEGRALS OF A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

by

V. Marić

The differential equation

(1) $$y''(x) = \rho_\varkappa(x)\, y^\lambda L_n\{1/y\}, \quad \lambda > 1, \quad \alpha > 0, \quad \varkappa > 1,$$

where $\rho_\varkappa(x) = \rho(e^{x^{1/\varkappa}})$, and $\rho(x)$, $L_n(x)$ are defined by (II) and (IIIa), has a unique solution $y = y(x)$ satisfying the conditions

(2) $$y(0) = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} y(x) = 0.$$

(This follows at once from [2], Theor. II and III.)

We proved that, under stated conditions

(3) $$y(x) \sim \left\{\frac{\xi_1 \varkappa (\lambda - 1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \left\{x^{\frac{2\varkappa - 2 + \xi_1}{\varkappa}} \rho_\varkappa(x) L_{n-1}(x)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}, \quad x \to \infty.$$

Putting

(4) $$y(x) = p(x)\, z\{\varphi(x)\},$$

(1) becomes

$$z_{\varphi\varphi} - \alpha z_\varphi = \chi\left[\Omega \frac{\rho_n(pz)}{z \rho_n(p)} - 1\right],$$

where

$$\chi = \frac{p'' z}{p \varphi'^2}, \quad \Omega = \frac{\rho_\varkappa(x)\, \rho_n(x)}{p''(x)}, \quad \rho_n(x) = x^\lambda L_n(1/x)$$

and $\varphi(x)$ is the solution of Bernoulli's differential equation

(5) $$p\varphi'' + 2p'\varphi' + \alpha p \varphi'^2 = 0, \quad \alpha > 0,$$

with $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1/\alpha$.

Choosing conveniently $p(x)$, i. e. putting

$$p(x) = \left\{\frac{\xi_1 \varkappa (\lambda - 1)^{2\lambda - \xi_1}}{\alpha^{2\lambda - \xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} \int_x^\infty dt \int_x^\infty \left\{\tau^{\frac{2\varkappa\lambda - 2\lambda - \xi_1}{\varkappa}} \rho_\varkappa(\tau) L_{n-1}(\tau)\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}} d\tau,$$

we proved that

$$z\{\varphi(x)\}\to 1, \tag{6}$$

when x and so, according to (5), $\varphi(x)$ tends to infinity. The method is similar to that first used by Avakumović (see [1]).

From (2) and (4) we have

$$y(x)\sim p(x). \tag{7}$$

Now, it is not difficult to prove, using the well-known properties of L-functions (see [3]), that

$$p(x)\sim\left\{\frac{\xi_1\,\varkappa\,(\lambda-1)^{2-\xi_1}}{\alpha^{2-\xi_1}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}\left\{\rho_\varkappa(x)\,L_{n-1}(x)\,x^{\frac{2\varkappa-2+\xi_1}{\varkappa}}\right\}^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

and so, according to (7), (3) is estabilished.