

С. АЉАНЧИЋ, Р. БОЈАНИЋ и М. ТОМИЋ

## ДВА СТАВА О АСИМПТОТСКОМ ПОНАШАЊУ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ РЕДОВА

Асимптотско понашање тригонометриског реда  $\sum a_n \sin nx$  за  $x \rightarrow +0$ , када су коефицијенти  $a_n$  облика  $a_n = n^{-\alpha} L(n)$ ,  $0 \leq \alpha < 2$ , где је  $L(t)$  споро променљива функција.

### 1. Асимптотско понашање тригонометриског реда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

кад  $x \rightarrow +0$ , у случају када су коефицијенти  $a_n$  монотони и задовољавају услов

$$a_n \sim n^{-\alpha}, \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

испитивао је Hardy [1, 2]. Између осталог он је показао да је

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2 \Gamma(\alpha) \sin \alpha \pi / 2} x^{\alpha-1}, \quad x \rightarrow +0.$$

Heuwood [3] је показао да ова асимптотска релација важи за  $0 < \alpha < 2$ .

Овде ћемо дати два става који проширују класу тригонометриских редова за које важе сличне асимптотске релације. Та проширења добијају се увођењем класе споро променљивих функција.

За функцију  $L(t)$  кажемо да је споро променљива ако је дефинисана за  $t \geq 0$ , позитивна и

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

за свако утврђено  $\lambda > 0$  [4].

СТАВ 1. Нека је  $0 < \alpha < 2$  и нека је  $L(t)$  производ две монотоне споро променљиве функције. Тада тригонометрички ред

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L(n) n^{-\alpha} \sin nx$$

конвергира за  $0 < x < 2\pi$  и

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi/2} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +0.$$

СТАВ 2. Нека је  $L(t)$  конвексна споро променљива функција која  $\rightarrow 0$  кад  $t \rightarrow \infty$ . Тада је

$$\sum_{v=1}^{\infty} L(v) \sin vx \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +0.$$

Из става 2, на пример, следи за  $L(t) = \log t$

$$\sum_{v=2}^{\infty} \frac{\sin vx}{\log v} \sim \frac{1}{x \log(1/x)}, \quad x \rightarrow +0,$$

док код Zygmund-a [5, стр. 116] постоји само

$$\frac{A}{x \log(1/x)} < \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\sin vx}{\log v} < \frac{B}{x \log(1/x)}, \quad x \rightarrow +0, \quad 0 < A < B.$$

Аналогни резултати за ред

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos vx$$

следе из чињенице да је за  $x \neq 0$

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos vx = \frac{1}{2 \sin x} \sum_{v=1}^{\infty} (a_{v-1} - a_{v+1}) \sin vx.$$

2. Најважније особине споро променљивих функција које ће нам бити потребне за доказ наведених ставова су следеће:

(i) Ако је  $0 < a \leq \lambda \leq b < \infty$ , тада

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

униформно по  $\lambda$ .

(ii) Ако је  $L^*(t) \sim L(t)$ ,  $t \rightarrow \infty$ , тада је и  $L^*(t)$  споро променљива функција.

(iii) Ако је  $\gamma > 0$ , тада

$$t^\gamma L(t) \rightarrow \infty, \quad t^{-\gamma} L(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

(iv) Нека је  $\alpha > 0$  и

$$L^{(1)}(t) = t^{-\alpha} \operatorname{Max}_{0 \leq x \leq t} \{x^\alpha L(x)\}, \quad L^{(2)}(t) = t^\alpha \operatorname{Max}_{t \leq x < \infty} \{x^{-\alpha} L(x)\}.$$

Тада је  $L^{(k)}(t) \sim L(t)$ ,  $t \rightarrow \infty$  ( $k = 1, 2$ ), и према (ii),  $L^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, 2$ , су такође скоро променљиве функције. Функција  $t^\alpha L^{(1)}(t)$  очевидно монононо расте, док  $t^{-\alpha} L^{(2)}(t)$  монононо опада.

(v) Ако је  $L(n)$  производ две скоро променљиве функције и  $\eta > 0$  тада је

$$(1) \quad \sum_{v=n}^{\infty} |v^{-\eta} L(v) - (v+1)^{-\eta} L(v+1)| \leq M(\eta) n^{-\eta} L(n).$$

Све особине скоро променљивих функција које смо навели познате су (в. [4]), осим последње, и због тога ћемо овде дати њен доказ.

Нека је  $L(n) = a_n b_n$  и нека  $a_n \uparrow$ , а  $b_n \downarrow$ . Стаavimo  $L_n = L(n)$ . Тада је

$$\begin{aligned} \sum_{v=n}^m |v^{-\eta} L_v - (v+1)^{-\eta} L_{v+1}| &\leq \\ &\leq \sum_{v=n}^m L_v \{v^{-\eta} - (v+1)^{-\eta}\} + \sum_{v=n}^m (v+1)^{-\eta} |L_v - L_{v+1}| \leq \\ &\leq \sum_{v=n}^m L_v \{v^{-\eta} - (v+1)^{-\eta}\} + \sum_{v=n}^m (v+1)^{-\eta} b_v \{a_{v+1} - a_v\} + \\ &\quad + \sum_{v=n}^m (v+1)^{-\eta} a_{v+1} \{b_v - b_{v+1}\} = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Оценићемо сваку од ових сума посебно. Најпре је

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{v=n}^m v^{-\eta/2} L_v v^{-\eta/2} \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{1}{v} \right)^{-\eta} \right\} \leq \\ &\leq \max_{n \leq v < \infty} \{v^{-\eta/2} L_v\} \int_{n-1}^{\infty} t^{-\eta/2} \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-\eta} \right\} dt \leq \\ &\leq M(\eta) n^{-\eta/2} L_n^{(2)} (n-1)^{-\eta/2}, \end{aligned}$$

где је  $L_n^{(2)} \sim L_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Према томе је

$$(2) \quad S_1 \leq M(\eta) n^{-\eta} L_n. *$$

\*) Константе  $M$  које се јављају у разним неједначинама не морају бити увек исте.

Како  $b_n \downarrow$ , то је даље

$$\begin{aligned} S_2 &\leq b_n \sum_{v=n}^m (v+1)^{-\eta} (a_{v+1} - a_v) = \\ &\leq b_n \sum_{v=n}^m \{v^{-\eta} - (v+1)^{-\eta}\} a_v + b_n \{m^{-\eta} a_m - n^{-\eta} a_n\} \leq \\ &\leq b_n \sum_{v=n}^m \{v^{-\eta} - (v+1)^{-\eta}\} a_v + m^{-\eta} a_m b_n, \end{aligned}$$

па је према (2)

$$(3) \quad S_2 \leq M(\eta) n^{-\eta} L_n + m^{-\eta} a_m b_n.$$

Најзад је

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \sum_{v=n}^m (v+1)^{-\eta} a_{v+1} \{b_v - b_{v+1}\} \leq \\ &\leq \max_{n \leq v < \infty} \{v^{-\eta} a_v\} \sum_{v=n}^{\infty} \{b_v - b_{v+1}\} = \\ &\leq n^{-\eta} a_n^{(2)} b_n, \end{aligned}$$

где је  $a_n^{(2)} \sim a_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ , па је

$$(4) \quad S_3 \leq M(\eta) n^{-\eta} L_n.$$

На основу процена (2), (3) и (4) добијамо да је

$$\sum_{v=n}^m |v^{-\eta} L_v - (v+1)^{-\eta} L_{v+1}| \leq M(\eta) n^{-\eta} L_n + m^{-\eta} a_m b_n.$$

Одавде коначно следи неједначина (1) кад пустимо да  $m \rightarrow \infty$ .

3. Доказ става 1. (i) На основу особине (v) споро променљивих функција, конвергенција тригонометриског реда којим је дефинисана функција  $f(x)$  следи из

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{v=n+1}^m L(v) v^{-\alpha} \sin vx \right| \leq \\ (5) \quad &\leq \frac{1}{\sin x/2} \left\{ \sum_{v=n+1}^m |v^{-\alpha} L(v) - (v+1)^{-\alpha} L(v+1)| + \right. \\ &\quad \left. + (n+1)^{-\alpha} L(n+1) + (m+1)^{-\alpha} L(m+1) \right\} \leq \\ &\leq \frac{M}{\sin x/2} \{(n+1)^{-\alpha} L(n+1) + (m+1)^{-\alpha} L(m+1)\}, \end{aligned}$$

јер на основу особине (iii) споро променљивих функција, десна страна неједначине (5) тежи нули када  $n$  и  $m \rightarrow \infty$  независно један од другог.

(ii) за доказ става 1 потребна нам је следећа Хардијева [2] процена

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\alpha} \sin \nu x = \frac{\pi}{2 \Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2} x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), \quad x \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Нека је  $q = [1/x]$ . Како је  $L(q) \sim L(1/x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , и како је

$$\begin{aligned} \frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu) \nu^{-\alpha} \sin \nu x - \frac{\pi}{2 \Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2} &= \\ &= x^{1-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \frac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x + o(1) = \\ &= S(x, \alpha) + o(1), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

то је довољно показати да

$$S(x, \alpha) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Нека је  $0 < \delta < 1 < \Delta < \infty$ . Ставимо  $p = [\delta/x]$  и  $r = [\Delta/x]$ . Тада је

$$S(x, \alpha) = x^{1-\alpha} \left( \sum_{\nu=1}^p + \sum_{\nu=p+1}^r + \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \right) \left\{ \frac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x,$$

па је

$$\begin{aligned} |S(x, \alpha)| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} \left| \sum_{\nu=1}^p L(\nu) \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| + x^{1-\alpha} \left| \sum_{\nu=1}^p \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| + \\ &+ x^{1-\alpha} \left| \sum_{\nu=p+1}^r \left\{ \frac{L(\nu)}{L(q)} - 1 \right\} \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| + \\ &+ \frac{x^{1-\alpha}}{L(q)} \left| \sum_{\nu=r+1}^{\infty} L(\nu) \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| + x^{1-\alpha} \left| \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \nu^{-\alpha} \sin \nu x \right| = \\ (6) \quad &\leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5. \end{aligned}$$

Проценићемо сваку од сума  $\Sigma_i$  посебно.

Нека је  $\alpha < \beta < 2$ . Водећи рачуна о томе да је  $\sin x \leq x$ ,  $x \geq 0$  и о особини (iv) споро променљивих функција, налазимо

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 &\leq \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \sum_{v=1}^p v^{1-\alpha} L(v) = \\
 &\leq \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \sum_{v=1}^p v^{\beta-\alpha} L(v) \cdot v^{1-\beta} \leq \\
 (7) \quad &\leq \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} \operatorname{Max}_{1 \leq v \leq p} \{v^{\beta-\alpha} L(v)\} \cdot \sum_{v=1}^p v^{1-\beta} \leq \\
 &\leq M \frac{x^{2-\alpha}}{L(q)} p^{\beta-\alpha} L^{(1)}(p) p^{2-\beta} \leq \\
 &\leq M (px)^{2-\alpha} \frac{L(p)}{L(q)}.
 \end{aligned}$$

За  $\Sigma_2$  лако добијамо процену

$$(8) \quad \Sigma_2 \leq x^{2-\alpha} \sum_{v=1}^p v^{1-\alpha} < M (px)^{2-\alpha}.$$

Даље је

$$\begin{aligned}
 \Sigma_3 &\leq x^{1-\alpha} \operatorname{Max}_{p+1 \leq v \leq r} \left| \frac{L(v)}{L(q)} - 1 \right| \cdot \sum_{v=p+1}^r v^{-\alpha} \leq \\
 &\leq x^{1-\alpha} \operatorname{Max}_{p+1 \leq v \leq r} \left| \frac{L(v)}{L(q)} - 1 \right| \cdot \int_p^r t^{-\alpha} dt,
 \end{aligned}$$

па је

$$(9) \quad \Sigma_3 \leq \begin{cases} \frac{(rx)^{1-\alpha} - (px)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \operatorname{Max}_{p+1 \leq v \leq r} \left| \frac{L(v)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha \neq 1, \\ \log \frac{r}{p} \cdot \operatorname{Max}_{p+1 \leq v \leq r} \left| \frac{L(v)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Када у (5) пустимо да  $m \rightarrow \infty$ , добићемо неједначину

$$\left| \sum_{v=n+1}^{\infty} L(v) v^{-\alpha} \sin vx \right| \leq \frac{M}{\sin x/2} (n+1)^{-\alpha} L(n+1)$$

па је према томе

$$(10) \quad \Sigma_4 \leq M \frac{x}{\sin x/2} (rx)^{-\alpha} \frac{L(r+1)}{L(q)}.$$

Најзад, парцијалним сабирањем добијамо

$$(11) \quad \begin{aligned} \Sigma_5 &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\sin x/2} \left\{ \sum_{v=r+1}^{\infty} |v^{-\alpha} - (v+1)^{-\alpha}| + (r+1)^{-\alpha} \right\} < \\ &< 2 \frac{x^{1-\alpha}}{\sin x/2} (rx)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Користећи процене (7—11) неједначина (6) постаје

$$\begin{aligned} |S(x, \alpha)| &\leq M \left\{ (px)^{2-\alpha} \frac{L(p)}{L(q)} + (px)^{2-\alpha} + \right. \\ &+ \frac{x}{\sin x/2} (rx)^{-\alpha} \frac{L(r+1)}{L(q)} + \frac{x}{\sin x/2} (rx)^{-\alpha} \left. \right\} + \\ &+ \begin{cases} \frac{(rx)^{1-\alpha} - (px)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \text{Max}_{p+1 \leq v \leq r} \left| \frac{L(v)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha \neq 1, \\ \log \frac{r}{p} \cdot \text{Max}_{p+1 \leq v \leq r} \left| \frac{L(v)}{L(q)} - 1 \right|, & \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ако овде пустимо да  $x \rightarrow 0$  и водимо рачуна о значењу величина  $p, q, r$  добићемо

$$(12) \quad \limsup_{x=0} |S(x, \alpha)| \leq M \{ \delta^{2-\alpha} + \Delta^{-\alpha} \},$$

јер, према особини (i) споро променљивих функција

$$\text{Max}_{p+1 \leq v \leq r} \left| \frac{L(v)}{L(q)} - 1 \right| \rightarrow 0 \quad \text{када } x \rightarrow 0.$$

Како величине  $\delta$  и  $\Delta$  подлежу једино ограничењу да је  $0 < \delta < 1$  и  $1 < \Delta < \infty$ , то када у (12) пустимо да  $\delta \rightarrow 0$  и  $\Delta \rightarrow \infty$ , добијамо коначно

$$\limsup_{x=0} |S(x, \alpha)| \leq 0, \quad 0 < \alpha < 2,$$

тј.

$$S(x, \alpha) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Тиме је став 1 доказан.

4. Доказ става 2. Нека је  $0 < \delta < 1$  и  $p = [\delta/x]$ ,  $q = [\pi/2x]$ . Тада је

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{v=1}^{\infty} L(v) \sin vx = \\ (13) \quad &= \left( \sum_{v=1}^{p-1} + \sum_{v=p}^q + \sum_{v=q+1}^{\infty} \right) L(v) \sin vx = \\ &= S_1(x) + S_2(x) + S_3(x). \end{aligned}$$

Нека је даље  $0 < \eta < 1$ . Прво је

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{v=1}^{p-1} L(v) \sin vx \leq \\ &\leq \text{Max}_{1 \leq v \leq p} \{v^\eta L(v)\} \sum_{v=1}^p v^{-\eta} \leq \\ &\leq p^\eta L^{(1)}(p) \int_0^p t^{-\eta} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{1-\eta} p L^{(1)}(p). \end{aligned}$$

Како је  $L^{(1)}(p) \sim L(1/x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , то је

$$S_1(x) \leq \delta M(\eta) \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

тј.

$$(14) \quad S_1(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \rightarrow 0,$$

јер  $\delta$  можемо изабрати произвољно мало.

Следећа сума  $S_2(x)$  даје уствари асимптотско понашање функције  $f(x)$  кад  $x \rightarrow 0$ . Да би смо то доказали приметимо најпре да је

$$\begin{aligned} S_2(x) - \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} L(q) - \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} L(q) \left\{ x \sum_{v=p}^q \sin vx - 1 \right\} + \\ (15) \quad &+ \sum_{v=p}^q \{L(v) - L(q)\} \sin vx. \end{aligned}$$

Како је

$$x \sum_{v=p}^q \sin vx - 1 = \left\{ \cos(p - 1/2)x - \cos(q - 1/2)x - \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} \right\} / \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}$$



и

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=p}^q \{L(v) - L(q)\} \sin vx \right| &\leq \{L(p) - L(q)\} (q - p + 1) = \\ &\leq \frac{1}{x} L(q) \left\{ \frac{L(p)}{L(q)} - 1 \right\} (q - p + 1) x \leq \\ &\leq \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \left\{ \frac{L(p)}{L(q)} - 1 \right\} \left( \frac{\pi}{2} - \delta + 2x \right), \end{aligned}$$

то је према (15)

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_2(x)}{1/x L(1/x)} - 1 \right| &\leq 1 - \frac{L(q)}{L(1/x)} + \\ &+ \frac{\left| \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} - \cos\left(p - \frac{1}{2}\right)x + \cos\left(q - \frac{1}{2}\right)x \right|}{\frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}} \\ &+ \left( \frac{\pi}{2} - \delta + 2x \right) \left\{ \frac{L(p)}{L(q)} - 1 \right\}, \end{aligned}$$

па је с обзиром на особину (i) скоро променљивих функција

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \left| \frac{S_2(x)}{1/x L(1/x)} - 1 \right| \leq 1 - \cos \delta.$$

То значи да је

$$(16) \quad S_2(x) = \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + o\left\{ \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \right\}, \quad x \rightarrow 0,$$

јер у претходној неједначини  $\delta$  можемо изабрати произвољно мало.

Код процене последње суме долази до изражаја претпоставка о конвексности функције  $L(n)$ . Најпре је

$$\begin{aligned} (17) \quad S_3(x) &= \sum_{v=q+1}^{\infty} L(v) \sin vx = \\ &= \cos qx \sum_{v=1}^{\infty} L(q+v) \sin vx + \sin qx \sum_{v=1}^{\infty} L(q+v) \cos vx. \end{aligned}$$

Парцијалним сабирањем добијамо

$$\begin{aligned} S_3^*(x) &= \sum_{v=1}^{\infty} L(q+v) \sin vx = \\ &= \frac{1}{\sin x/2} \sum_{v=1}^{\infty} \{L(q+v) - L(q+v+1)\} \sin(v+1) \frac{x}{2} \sin v \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Одавде следи

$$\begin{aligned}
 |S_3^*(x)| &\leq \frac{1}{\sin x/2} \sum_{v=1}^{\infty} \{L(q+v) - L(q+v+1)\} = \\
 (18) \quad &\leq \frac{1}{\sin x/2} L(q+1) \leq \\
 &\leq \frac{\pi}{2} L\left(\frac{1}{x}\right),
 \end{aligned}$$

јер је  $\sin x \geq 2x/\pi$  за  $0 \leq x \leq \pi/2$ .

Два узастопна делимична сабирања дају

$$\begin{aligned}
 S_3^{**}(x) &= \sum_{v=1}^{\infty} L(q+v) \cos vx = \\
 &= \frac{1}{4 \sin^2 x/2} \sum_{v=1}^{\infty} \{L(q+v) - 2L(q+v+1) + L(q+v+2)\} \sin^2(v+1/2)x.
 \end{aligned}$$

Због конвексности функције  $L(n)$  је

$$\begin{aligned}
 |S_3^{**}(x)| &\leq \frac{1}{4 \sin^2 x/2} \sum_{v=1}^{\infty} \{L(q+v) - 2L(q+v+1) + L(q+v+2)\} = \\
 &\leq \frac{L(q) - L(q+1)}{4 \sin^2 x/2}.
 \end{aligned}$$

За монотono опадајући споро променљив низ је за довољно велико  $p$

$$0 \leq L(q) - L(2q) \leq \varepsilon L(q).$$

Како је

$$\begin{aligned}
 L(q) - L(2q) &= \{L(q) - L(q+1)\} + \\
 &+ \{L(q+1) - L(q+2)\} + \dots + \{L(2q-1) - L(2q)\},
 \end{aligned}$$

и како је за свако  $v = 0, 1, 2, \dots$  због конвексности функције  $L(n)$

$$L(q+v) - L(q+v+1) \geq L(q) - L(q+1),$$

то је

$$q \{L(q) - L(q+1)\} \leq L(q) - L(2q) \leq \varepsilon L(q),$$

па је за довољно мало  $x$

$$|S_3^{**}(x)| \leq \varepsilon \frac{1}{4 \sin^2 x/2} \frac{1}{q} L(q) \leq \varepsilon \frac{\pi^2}{4qx} \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

тј.

$$(19) \quad S_3^{**}(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \rightarrow 0.$$

Из (17), (18) и (19) добијамо да је

$$(20) \quad S_3(x) = \cos qx S_3^*(x) + \sin qx S_3^{**}(x) = o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \rightarrow 0$$

јер је  $\cos qx = o(1)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

Коначно из (13), (14), (16) и (20) следи

$$f(x) = \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + o\left\{\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \quad x \rightarrow 0,$$

а тиме је став 2 доказан.

(Саопштено на седници Мат. инст. 13-II-1953)

#### Н А В О Д И

- [1] G. H. Hardy — A theorem concerning trigonometrical series. *Journal London Math. Soc.*, 3 (1928), 12—13.
- [2] ————— Some theorems concerning trigonometrical series of a special type. *Proc. London Math. Soc.*, 32 (1931), 441—8.
- [3] P. Heywood — Note on a theorem of Hardy on trigonometrical series. *Journal London Math. Soc.*, 29 (1954), 373—8.
- [4] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. de Soc. Math. de France*, 61 (1933), 55—62.
- [5] A. Zygmund. — *Trigonometrical Series*, Warszawa 1935.

## DEUX THÉORÈMES RELATIFS AU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

par

S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić.

Soit  $L(t)$  une fonction à croissance lente [4], c.-à.-d. une fonction définie pour  $t \geq 0$ , positive, et telle qu'on ait

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

pour chaque  $\lambda > 0$  fixe.

Dans la présente note sont démontrés les deux théorèmes suivants:

**THÉORÈME 1.** Soit  $0 < \alpha < 2$  et  $L(t)$  le produit de deux fonctions monotones à croissance lente. Alors la série trigonométrique

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu) \nu^{-\alpha} \sin \nu x$$

converge pour  $0 < x < 2\pi$  et on a

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2 \Gamma(\alpha) \sin \alpha \pi / 2} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +0.$$

**THÉORÈME 2.**  $L(t)$  étant une fonction à croissance lente, convexe, qui tend vers zéro avec  $t \rightarrow \infty$ , alors on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} L(\nu) \sin \nu x \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +0.$$