Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

РАНКО БОЈАНИЋ

АСИМПТОТИКА РЕШЕЊА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

— ТЕЗА —

УВОД

0.1 Класични проблем малих осцилација еластичне мембране састоји се у томе да се у извесној области S, x, y-равни нађу решења једначине

$$\Delta u + \lambda u = 0, \tag{0.1}$$

која на рубу S' посматране области у најједноставнијем случају задовољавају гранични услов

$$u = 0.$$

Као што је познато, таква решења постоје само за специјалне вредности параметра λ или, другим речима, једначина (0.1) има решења која нису идентички једнака нули у области S само кад је λ такозвана сопствена вредност. Свакој сопственој вредности одговара највише коначно много сопствених функција, односно решења посматраног граничног задатка.

Велики број проблема механике и физике, нарочито оних у вези са осцилацијама, своди се на решавање сличних граничних задатака. Са математичке тачке гледишта сваки такав проблем је или проблем егзистенције или проблем процене сопствених вредности и сопствених функција неког граничног задатка.

Проблемима егзистенције сопствених вредности и сопствених функција граничних задатака парцијалних диференцијалних једначина бавили су се многи математичари. Ти проблеми у радовима Римана, Шварца, Поенкареа и нарочито Хилберта заузимају централно место. Међутим тек почетком овог века могло се прићи проблему њихове асимптотске процене који је са гледишта механике и физике од далеко већег значаја. Физичари H. A. Lorenz [1] и A. Sommerfeld [2] први су дошли до закључка да довољно велике сопствене вредности мембране која трепери не зависе од облика мембране већ само од њене површине. Непосредно затим је H. Weyl [**3**], на основу теорије линеарних интегралних једначина, доказао да је

$$N(t) \sim \frac{S}{4\pi} t\,, \quad t \to \infty\,,$$

где је $N(t)$ број сопствених вредности које су мање од t, а S површина посматране мембране, што је показало да су претпоставке физичара биле тачне. R. Courant [**4**, стр. 321—380] је касније, помоћу варијационог рачуна, добио много прецизније резултате. Специјално, у случају мембране која трепери он је доказао да је

$$N(t) = \frac{S}{4\pi} t + O(\sqrt{t} \lg t)\,, \quad t \to \infty\,.$$

0.2 Међутим, за физичара значајнији, а и са гледишта теориске математике дубљи и тежи проблем асимптотског понашања сопствених функција подухватили су тек тридесетих година овог века A. Hammerstein [**5**] и нарочито T. Carleman [**6**]. Док је Хамерштајн, служећи се теоријом линеарних интегралних једначина, испитивао понашање сопствених функција за велике вредности индекса n, дотле је Карлеман дао један потпуно нов и оригиналан метод за испитивање асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција који се састоји у следећем.

Нека је S коначна и отворена област x, y-равни, S' њен руб и нека су $\{\lambda_n\}$ сопствене вредности, а $\{\Phi_n(P)\}$ одговарајуће ортонормиране сопствене функције граничног задатка

$$\Delta u + \lambda u = 0\,, \quad P \in S\,,$$
$$u = 0\,, \quad P \in S'\,.$$

Ако са $G(P, Q; \lambda)$ означимо Гринову функцију овог граничног задатка, а са $G(P, Q)$ Гринову функцију граничног задатка

$$\Delta u = 0\,, \quad P \in S\,,$$
$$u = 0\,, \quad P \in S'$$

тада је, као што је познато,

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)}{\lambda_n (\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) - G(P, Q; -\lambda)\,.$$

Овај образац био је основа на којој је Карлеман изградио свој поступак за процену суме квадрата сопствених функција. Он је најпре доказао да је

$$(0.2)\qquad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \frac{1}{4\pi}\lg\lambda + b + O(e^{-c\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda\to\infty,$$

где су b и $c>0$ константе које не зависе од λ. Доказ овог обрасца своди се очевидно на процену асимптотског понашања функције $G(P, Q; -\lambda)$ кад $\lambda\to\infty$, а почива на елементарним особинама Гринове функције. Како је, наиме,

$$G(P, Q; -\lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}) - H(P, Q; -\lambda),$$

где је

$$K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}\, t}}{\sqrt{t^2-1}}\, dt,$$

а $H(P, Q; -\lambda)$ регуларно решење једначине

$$(0.3)\qquad \Delta u - \lambda u = 0$$

које на рубу S' задовољава услов

$$(0.4)\qquad H(P, Q; -\lambda) = \frac{1}{2\pi} K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}), \quad P\in S',$$

и слично томе

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi}\lg\frac{1}{r_{PQ}} - H(P, Q),$$

то је

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{P=Q}\left\{\lg\frac{1}{r_{PQ}} - K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda})\right\} - H(Q, Q) + H(Q, Q; -\lambda) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\lg\lambda + \gamma - \lg 2 - H(Q, Q) + H(Q, Q; -\lambda),$$

где је γ Ајлерова константа. На основу Парафовог става свако решење једначине (0.3) достиже своју најмању, односно највећу вредност на рубу S'. Стога је, према (0.4), за утврђено Q и произвољно $P\in S$

$$|H(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Max}_{P\in S'} K_0(r_{PQ}\sqrt{\lambda}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} K_0(l_Q\sqrt{\lambda}),$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S'. Специјално за $P=Q$ је

$$|H(Q,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{1}{2\pi}K_0(l_Q\sqrt{\lambda})=O(e^{-l_Q\sqrt{\lambda}}),\quad \lambda\to\infty,$$

а одатле непосредно следи (0.2).

Други део Карлемановог поступка састоји се у примени ставова Тауберове природе помоћу којих се коначно добија процена асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција. Наиме, из обрасца (0.2) следи да је функција

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n^2(Q)\,\lambda_n^{-s}$$

регуларна у целој равни осим у тачки $s=1$, где има пол првог реда са резидуумом $1/4\,\pi$, а одатле на основу познатог Икехариног става следи да је

$$\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}\Phi_n^2(Q)\sim\frac{1}{4\pi}\lambda,\quad \lambda\to\infty. \tag{0.5}$$

0.3 На овај Карлеманов рад надовезао се низ радова A. Pleijel-a [7] и S. Minakshisundaram-a [8] који су се бавили углавном генерализацијама Карлеманових резултата. Плејел и Минакшисундарам, који је независно од Карлемана дошао од сличних резултата, проширили су Карлеманов метод на општије класе парцијалних диференцијалних једначина елиптичног типа, добијајући на тај начин као и Карлеман, прву апроксимацију за асимптотско понашање суме квадрата сопствених функција посматраног граничног задатка. Овим испитивањима биле су обухваћене парцијалне диференцијалне једначине вишег степена, парцијалне диференцијалне једначине поларног типа, као и једначине малих осцилација у Римановим просторима, где Белтрамијев оператор игра ону улогу коју у Еуклидовом простору игра Лапласов оператор.

Из радова Карлемана, Плејела и Минакшисундарама произлази да је за добијање прве апроксимације асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција довољна процена потенцијалног типа за Гринову функцију. Међутим, познато је да Гринова функција опада експоненцијалном брзином кад $\lambda\to\infty$, што се не искоришћава у потпуности ни код једног става Тауберове природе кога они употребљавају. Јасно је према томе да је за добијање прецизнијих резултата био потребан један нов став Тауберове природе. Тај проблем подухватио је још T. Carleman [6] и он је дао један став те врсте, али је тек В. Г. Авакумовић [9,] дао став који је стварно омогућио да се експоненцијална процена Гринове функције у потпуности искористи. Његов став гласи:

Нека је $S(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека интеграл

$$f(x) = x \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x}$$

конвергира за једно па према томе за свако $x > 0$. *Тада из*

$$f(x) = O(e^{-c\sqrt{x}}), \quad x \to \infty, \quad c > 0,$$

и услова конвергенције

$$\sqrt{u}\,\{S(v) - S(u)\} \geqslant -m, \quad u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$$

следи

$$S(u) = O(1/\sqrt{u}), \quad u \to \infty.$$

Применом овог става код дводимензионалног проблема уместо (0.5) Авакумовић је добио

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty,$$

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q) = O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty.$$

0.4 (i) Побољшавајући с једне стране Плејелов поступак за процену регуларног дела Гринове функције који се заснива на варијационом рачуну, а с друге стране уопштавајући поменути Авакумовићев став Тауберове природе, В. Вучковић и аутор [10] показали су да се и код граничног задатка малих осцилација еластичне плоче може добити друга апроксимација асимптотског понашања суме квадрата сопствених функција, као и прецизна процена асимптотског понашања суме производа сопствених функција.

Међутим при покушају да се на тај начин добију слични резултати за суме сопствених функција уопштеног граничног задатка малих осцилација k-димензионалног континуума

$$\Delta_k u - A(P)u + \lambda u = 0, \quad P \in S,$$

$$u = 0, \quad P \in S',$$

где је Δ_k k-димензионални Лапласов оператор и где S претставља отворену и ограничену област k-димензионалног простора, а S' њен руб, наилази се како на принципијелне тако и на техничке тешкоће. За процену регуларног дела Гринове функције могу се и овде применити ставови аналогни Парафовом ставу, али се тешкоћа састоји у томе што се не зна експлицитно сингуларни део Гринове функције који је у општем случају решење једне нехомогене линеарне интегралне једначине Фредхолмовог типа. Због тога се нарочито код примене ставова Тауберове природе аналогних ставу из тачке **0.3** јављају нови проблеми, као што је на пример проблем претстављања сингуларног дела Гринове функције у облику Стилтјесове трансформације.

(ii) Да би смо што прегледније изложили овај поступак за процену асимптотског понашања суме квадрата и производа сопствених функција уопштеног граничног задатка малих осцилација, задржаћемо се овде на тродимензионалном проблему

$$(A)\qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\,u + \lambda\, u = 0, \quad P \in S \\ &u = 0, \quad P \in S'. \end{aligned}$$

Основни резултати које ћемо овде доказати су

$$(\mathrm{I})\qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{6\pi^2}\lambda^{3/2} + O(\lambda), \quad \lambda \to \infty,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q) = O(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Специјални случај овог граничног задатка кад је функција $A(P)$ једнака нули посматрао је у својој тези Å. Pleijel [7]. Он је ту поред осталог доказао да је

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) \sim \frac{1}{6\pi^2}\lambda^{3/2}, \quad \lambda \to \infty.$$

В. Г. Авакумовић [9] је касније добио обрасце (I) и (II), али опет у специјалном случају кад је $A(P) = 0$.

(iii) У првој глави у тачки **1.1** даћемо, прегледности ради, дефиницију Гринове функције граничног задатка (A) као и њеног сингуларног и регуларног дела. У тачки **1.2** доказаћемо егзистенцију решења интегралне једначине

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi\, r_{PQ}} - \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi\, r_{PT}} A(T)\, \Gamma(T, Q; -\lambda)\, dS_T,$$

као и да је то решење сингуларни део Гринове функције. Затим ћемо у тачки **1.3** дати процену асимптотског понашања сингуларног и регуларног дела Гринове функције. У тачки **1.4** доказаћемо да се у довољно малој околини тачке Q функција $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ понаша као функција $\Gamma_r(P, Q; -\lambda)$ која је решење једначине

(0.6) $$\Gamma_r(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\, \Gamma_r(T, Q; -\lambda)\, dS_T,$$

где је $K(Q; r)$ лопта полупречника r са центром у тачки Q; за довољно мало r је $K(Q; r) \subset S$. Другим речима, доказаћемо да је за произвољно $P \in K(Q; r)$

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma_r(P, Q; -\lambda) + O(e^{-1/2 r\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty.$$

Функцију $\Gamma_r(P, Q; -\lambda)$ увели смо зато што се једначина (0.6) може решити сукцесивном апроксимацијом кад је област $K(Q; r)$ довољно мала. То даље омогућава да докажемо да постоји функција $\Omega(Q; u)$ таква да је

$$\int_0^\infty \frac{d\,\Omega(Q; u)}{u+\lambda} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q} \left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda)\right\}$$

и да је

(0.7) $$\Omega(Q; u) = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1), \quad u \to \infty.$$

На основу тога доказаћемо

Став 1. *За утврђено* $Q \in S$ *је*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q} \left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P,Q;-\lambda)\right\} - \frac{1}{\lambda} M(Q) + O(e^{-1/2 r\sqrt{\lambda}}),$$
$$\lambda \to \infty,$$

где је $M(Q)$ *ограничена функција променљиве* Q, *a* $r > 0$ *константа која не зависи од* λ. *Осим тога је за* $P \neq Q$

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = G(P, Q) + O(e^{-1/2 c\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty.$$

где је $c = \min(r_{PQ}, l_Q)$.

(iv) У другој глави доказаћемо следећи став Тауберове природе:

Став 2. *Нека је* $S(u)$ *ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека интеграл*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x}$$

конвергира за једно па према томе за свако $x > 0$. *Тада из услова*

$$(a) \qquad f(x) = O(e^{-c\sqrt{x}}), \quad x \to \infty,$$

где је $c > 0$, *и услова конвергенције*

$$(b) \qquad S(v) - S(u) > -m, \quad u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$$

следи

$$S(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

Први ставови ове врсте, као што смо напоменули, потичу од Карлемана и Авакумовића, док је најопштије ставове тог типа дао у својој тези В. Вучковић [11]. Како се међутим и ту случај кад је Стилтјесова трансформација реда $O(e^{-c\sqrt{x}})$ мора засебно посматрати, то ћемо у другој глави, целине ради, дати директан доказ става **2**.

(v) Из ставова **1** и **2** добијају се обрасци (I) и (II) на следећи начин. Ако ставимо

$$E(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q; u) + M(Q), \qquad E(0) = 0,$$

тада је, према ставу **1**,

$$\int_0^\infty \frac{dE(u)}{u + \lambda} = O(e^{-1/2\, r\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty.$$

Према томе, услов (a) става **2** је задовољен. На основу обрасца (0.7) имамо даље да је за $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$

$$E(v) - E(u) = \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q; v) + \Omega(Q; u) =$$

$$= \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \frac{1}{2\pi^2}(\sqrt{v} - \sqrt{u}) + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant -1/2\pi^2(\sqrt{1 + 1/\sqrt{u}} + 1) + O(1) \geqslant -m.$$

Према томе, и услов конвергенције (b) става **2** је задовољен, па је на основу тога става

$$E(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q; u) + M(Q) =$$

$$= O(1), \quad u \to \infty,$$

тj.

$$E^*(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} =$$

$$= \Omega(Q; u) + M(Q) + O(1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1), \quad u \to \infty.$$

Одавде непосредно следи образац (I), јер је

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \int_0^\lambda u\, d\, E^*(u) =$$

$$= u\, E^*(u) \Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda E^*(u)\, d\, u =$$

$$= \frac{1}{6\pi^2} \lambda^{3/2} + O(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Да би смо доказали неједначину (II) ставимо

$$I(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n} - G(P, Q), \quad I(0) = 0.$$

Тада је, према ставу **1**,

$$\int_0^\infty \frac{d\, I(u)}{u + \lambda} = O\left(e^{-\frac{1}{2} c \sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

тако да је услов (a) става **2** испуњен. Даље, из

$$\{I(v) - I(u)\}^2 = \left\{ \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n} \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n} \sum_{u \leqslant \lambda_n < v} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n}$$

и обрасца (I), који смо мало пре доказали, добијамо да је за $u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u}$

$$I(v) - I(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

Према томе, и услов конвергенције је задовољен, тако да применом става **2** добијамо непосредно неједначину (II).

I ГЛАВА

1.1 Гринова функција $G(P, Q; -\lambda)$. (i) Нека је S коначна и отворена област тродимензионалног Еуклидовог простора са делимично глатким рубом S'. Означимо, као и раније, са $\{\lambda_n\}$ сопствене вредности, а са $\{\Phi_n(P)\}$ одговарајуће ортонормиране функције граничног задатка

$$(A) \qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\, u + \lambda u = 0, \quad P \in S \\ &u = 0, \quad P \in S'. \end{aligned}$$

За функцију $A(T)$ претпоставићемо да је позитивна и да је заједно са својим првим изводима непрекидна у области S. Тада су све сопствене вредности граничног задатка (A) позитивне.

Означимо са $G(P, Q; \lambda)$ Гринову функцију овог граничног задатка, а са $G(P, Q)$ Гринову функцију граничног задатка

$$(A^*) \qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\, u = 0, \quad P \in S, \\ &u = 0, \quad P \in S'. \end{aligned}$$

Функција $G(P, Q; -\lambda)$ је резолвента језгра $G(P, Q)$ па је према томе

$$(1.1) \qquad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) - G(P, Q; -\lambda).$$

(ii) Нека је Q утврђена, иначе произвољна, тачка области S. Гринова функција $G(P, Q; -\lambda)$ за $P \neq Q$ је решење једначине

$$(1.2) \qquad \Delta u - A(P)\, u - \lambda u = 0$$

које на рубу S' задовољава услов

$$(1.3) \qquad G(P, Q; -\lambda) = 0, \quad P \in S'.$$

Кад $P \to Q$, функција $G(P, Q; -\lambda)$ тежи бесконачности, али тако да је

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial G(P, Q; -\lambda)}{\partial r}\, dS_{P'} = -1,$$

где је $\varkappa(Q; \varepsilon)$ руб лопте полупречника ε са центром у тачки Q.

На основу ове дефиниције конструисаћемо Гринову функцију $G(P, Q; -\lambda)$ на следећи начин.

Означимо са $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ функцију која је за $P \neq Q$ решење једначине (1.2) и која задовољава услов

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int\limits_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial \Gamma(P, Q; -\lambda)}{\partial r} dS_{P'} = -1. \tag{1.4}$$

Овако дефинисана функција $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ зове се елементарно решење једначине (1.2), односно сингуларни део Гринове функције $G(P, Q; -\lambda)$.

Ако ставимо

$$\gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma(P, Q; -\lambda) - G(P, Q; -\lambda), \tag{1.5}$$

тада из претходне дефиниције Гринове функције и њеног сингуларног дела следи да је функција $\gamma(P, Q; -\lambda)$ заједно са своја прва два извода непрекидна у области S и да је решење једначине (1.2) које на рубу области S, с обзиром на (1.3), задовољава услов

$$\gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma(P, Q; -\lambda), \quad P \in S'. \tag{1.6}$$

Функција $\gamma(P, Q; -\lambda)$ зове се регуларни део Гринове функције.

1.2 Егзистенција функција $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ и $\gamma(P, Q; -\lambda)$. (i) Доказ егзистенције функције $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ коју смо дефинисали у претходној тачки заснива се на следећој леми:

Лема 1.1 *Нека је S произвољна ограничена област тродимензионалног простора. Ако са r_{PQ} означимо растојање тачака P и Q, тада је за произвољну функцију $\varphi(P)$, интеграбилну у области S, и $\sigma \geqslant 0$*

$$\int\limits_S \int\limits_S \frac{e^{-\sigma r_{PQ}}}{r_{PQ}} \varphi(P) \varphi(Q) \, dS_P \, dS_Q \geqslant 0.$$

Доказ. За доказ ове леме потребан нам је познати интеграл [12, стр. 195]

$$e^{-\sigma\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sigma}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(au+bv+cw)}}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2} du \, dv \, dw.$$

Како је $r_{PQ}^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, то је, према претходном обрасцу,

$$e^{-\sigma r_{PQ}} = \frac{\sigma}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\{(x-\xi)u+(y-\eta)v+(z-\zeta)w\}}}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2}\,du\,dv\,dw,$$

па је за $\sigma > 0$

$$I(\sigma) = \int_S\int_S e^{-\sigma r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q =$$

$$=\frac{\sigma}{\pi^2}\int_S\int_S \varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\{(x-\xi)u+(y-\eta)v+(z-\zeta)w\}}}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2}\,du\,dv\,dw=$$

$$=\frac{\sigma}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_S e^{i(xu+yv+zw)}\varphi(P)\,dS_P\right|^2\frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2+\sigma^2)^2}\geqslant 0.$$

Међутим, из чињенице да је $I(\sigma)\geqslant 0$ за $\sigma\geqslant 0$ следи да је и

$$\int_{\sigma}^{\sigma'} I(t)\,dt\geqslant 0,$$

тј.

$$\int_S\int_S \frac{e^{-\sigma r_{PQ}}}{r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\geqslant\int_S\int_S\frac{e^{-\sigma' r_{PQ}}}{r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q.$$

Кад у овој неједначини пустимо да $\sigma'\to\infty$, добијамо коначно да је

$$\int_S\int_S\frac{e^{-\sigma r_{PQ}}}{r_{PQ}}\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\geqslant 0,$$

што је требало доказати.

(ii) Ако једноставности ради ставимо

$$K(P,Q;-\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}\sqrt{A(P)A(Q)}, \tag{1.7}$$

тада је на основу претходне леме

$$\int_S\int_S K(P,Q;-\lambda)\varphi(P)\varphi(Q)\,dS_P\,dS_Q\geqslant 0$$

за сваку функцију $\varphi(P)$ која је делимично непрекидна у области S.

Другим речима, језгро $K(P,Q;-\lambda)$ хомогене интегралне једначине

$$(1.8)\qquad u(P;\lambda)=\varkappa\int\limits_S K(P,T;-\lambda)\,u(T;\lambda)\,dS_T$$

је симетрично и позитивно дефинитно за свако $\lambda\geqslant 0$. Одатле непосредно следи да су све сопствене вредности те интегралне једначине позитивне [4, стр. 112]. Према томе, нехомогена интегрална једначина

$$(1.9)\qquad u(P;\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}\sqrt{A(P)}-\int\limits_S K(P,T;-\lambda)\,u(T;\lambda)\,dS_T$$

на основу Фредхолмових ставова [4, стр. 99] има једно и само једно решење јер $\varkappa=-1$ није сопствена вредност одговарајуће хомогене интегралне једначине (1.8).

Ако у једначини (1.9) ставимо

$$u(P;\lambda)=\sqrt{A(P)}\,\Gamma(P,Q;-\lambda),$$

тада је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ решење интегралне једначине

$$(1.10)\ \Gamma(P,Q;-\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}-\int\limits_S\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T\,.$$

(iii) Да би смо доказали да је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ сингуларни део Гринове функције $G(P,Q;-\lambda)$, треба према **1.1** (ii) да докажемо 1° да у тачки $P=Q$ $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ има сингуларитет карактеристичан за Гринову функцију, тј. да задовољава услов (1.4), и 2° да је за $P\neq Q$ функција $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ решење диференцијалне једначине (1.2).

1° Ако једначину (1.10) помножимо са $A(P)\,\Gamma(P,Q;-\lambda)$ и интегришемо по P у области S, добићемо

$$\int\limits_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T=$$

$$=\int\limits_S\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{4\pi r_{TQ}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T-$$

$$-\int\limits_S\int\limits_S\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,A(P)\,\Gamma(P,Q;-\lambda)\,dS_P\,dS_T\,.$$

Како је, према леми **1.1**, последњи интеграл на десној страни позитиван, то је

$$\int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{4\pi r_{TQ}} A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{(4\pi r_{TQ})^2} A(T)\,dS_T \right\}^{1/2} \left\{ \int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \right\}^{1/2},$$

тј.

$$\int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{(4\pi r_{TQ})^2} A(T)\,dS_T.$$

Помоћу ове неједначине доказаћемо најпре да је функција $r_{PQ}\,\Gamma(P,Q;-\lambda)$ ограничена у области S. Једноставности ради ставимо

$$W(P,Q;-\lambda) = \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T.$$

Тада из претходне неједначине следи да је за $\lambda \geqslant 0$

$$W^2(P,Q;-\lambda) = \left\{ \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{(4\pi r_{PT})^2} A(T)\,dS_T \cdot \int_S A(T)\,\Gamma^2(T,Q;-\lambda)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{PT}}}{(4\pi r_{PT})^2} A(T)\,dS_T \cdot \int_S \frac{e^{-2\sqrt{\lambda}\,r_{TQ}}}{(4\pi r_{TQ})^2} A(T)\,dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^2}{(4\pi)^4} \int_S \frac{1}{r_{PT}^2}\,dS_T \cdot \int_S \frac{1}{r_{TQ}^2}\,dS_T,$$

где је $A = \max\limits_{T \in S} A(T)$.

Означимо са $K(C;r)$ лопту полупречника r са центром у тачки C, а са d пречник најмање лопте која садржи област S. Како је

$$\int_S \frac{1}{r_{CT}^2} dS_T \leqslant \int_{K(C;d)} \frac{1}{r_{CT}^2} dS_T =$$

$$\leqslant \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 4\pi d,$$

то је

$$|W(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{Ad}{4\pi};$$

$W(PQ;-\lambda)$ је према томе ограничена функција променљивих P и Q. У том случају из

$$\Gamma(P,Q;-\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - W(P,Q;-\lambda) \tag{1.11}$$

следи да је

$$|\Gamma(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{1}{4\pi r_{PQ}} + \frac{Ad}{4\pi} \leqslant \frac{M'}{r_{PQ}}, \tag{1.12}$$

тј. да је $r_{PQ}\Gamma(P,Q;-\lambda)$ ограничена функција променљивих P и Q у области S.

Даље је, с обзиром на (1.12),

$$|W_{x_i}'(P,Q;-\lambda)| = \left| -\int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}^2} (\sqrt{\lambda}\, r_{PT}+1) \frac{x_i - t_i}{r_{PT}} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda) dS_T \right| \leqslant$$

$$\leqslant M'' \int_S \frac{1}{r_{PT}^2 r_{TQ}} dS_T.$$

Како је

$$\int_S \frac{1}{r_{PT}^2 r_{TQ}} dS_T \leqslant \frac{1}{r_{PQ}} \int_S \frac{r_{PT}+r_{TQ}}{r_{PT}^2 r_{TQ}} dS_T =$$

$$\leqslant \frac{1}{r_{PQ}} \int_S \frac{1}{r_{PT} r_{TQ}} dS_T + \frac{1}{r_{PQ}} \int_S \frac{1}{r_{PT}^2} dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\pi d}{r_{PQ}},$$

то је коначно

$$|W_{x_i}'(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{M}{r_{PQ}}.$$

Према томе је

(1.13) $$\left|\frac{\partial W(P, Q; -\lambda)}{\partial r}\right| \leqslant \frac{3M}{r_{PQ}}.$$

Из ове неједначине као последицу добијамо да функција $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ задовољава услов (1.4). Наиме, из (1.11) и чињенице да функција $e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}/4\pi r_{PQ}$ задовољава услов (1.4), следи да је довољно доказати да је

$$\lim_{\varepsilon=0} \int\limits_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial W(P,Q;-\lambda)}{\partial r}\, dS_P' = 0.$$

Ово, међутим, непосредно следи из неједначине (1.13). Према томе, функција $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ задовољава услов (1.4).

2⁰ Доказ да је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ за $P \neq Q$ решење диференцијалне једначине (1.2) је нешто сложенији због тога што функције $e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}/4\pi r_{PQ}$ и $\Gamma(P,Q;-\lambda)$, као функције од P и Q, нису ограничене у области S.

Нека је $P \neq Q$. Једноставности ради ставимо

$$R(P,Q;-\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}.$$

Тада је

$$\Gamma(P,Q;-\lambda) = R(P,Q;-\lambda) - \int\limits_S R(P,T;-\lambda) A(T) \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T.$$

Како је

(1.14) $$R_{x_i}'(P,T;-\lambda) = -R_{t_i}'(P,T;-\lambda),$$

то је

$$\Gamma_{x_i}'(P,Q;-\lambda) = R_{x_i}'(P,Q;-\lambda) + \int\limits_S R_{t_i}'(P,T;-\lambda) A(T) \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T.$$

Парцијалном интеграцијом добијамо

$$\Gamma_{x_i}'(P,Q;-\lambda) = R_{x_i}'(P,Q;-\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{S'} R(P,T;-\lambda) \cos(n,t_i) A(T) \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' -$$
$$- \int\limits_S R(P,T;-\lambda) \{A(T) \Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\, dS_T,$$

где је (n, t_i) угао који спољашња нормала на рубу S' заклапа са t_i-осом. Поновно диференцирање, с обзиром на (1.14), даје

$$\Gamma_{x_i x_i}''(P,Q;-\lambda) = R_{x_i x_i}''(P,Q;-\lambda) -$$

$$-\int_{S'} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\cos(n,t_i)\,A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T' +$$

$$+\int_{S} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T .$$

Сабирањем ових једначина по i од $i=1$ до 3, с обзиром на

$$\Delta R(P,Q;-\lambda) - \lambda R(P,Q;-\lambda) = 0,$$

добијамо

$$\Delta\Gamma(P,Q;-\lambda) = \lambda R(P,Q;-\lambda) -$$

$$-\int_{S'} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n}\,A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\,dS_T' +$$

(1.15)

$$+\int_{S} \sum_{i=1}^{3} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T ,$$

где је $\partial/\partial n$ извод у правцу спољашње нормале на рубу S'.

Означимо са S^* област која се добија из области S исецањем две лопте полупречника ε са центром у тачкама P и Q. Руб тих лопти означимо са $\varkappa(P;\varepsilon)$, односно $\varkappa(Q;\varepsilon)$. Тада је

$$I = \int_{S} \sum_{i=1}^{3} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \int_{S^*} \sum_{i=1}^{3} R_{t_i}'(P,T;-\lambda)\,\{A(T)\,\Gamma(T,Q;-\lambda)\}_{t_i}'\,dS_T .$$

На последњи интеграл можемо применити Гринов образац

$$\int_{S^*} \sum_{i=1}^{3} U_{t_i}'\,V_{t_i}'\,dS_T = -\int_{S^*} U\Delta V\,dS_T + \int_{S^{*\prime}} U\,\frac{\partial V}{\partial n}\,dS_T',$$

јер су подинтегралне функције као и њихови изводи непрекидни у области S^*. На тај начин добијамо да је

$$I = -\lambda \int_S R(P,T;-\lambda)\, A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T +$$

$$+ \int_{S'} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' -$$

$$- \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{\varkappa(P;\varepsilon)} + \int_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \right\} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T'.$$

Из чињенице да функција $R(P,Q;-\lambda)$ задовољава услов (1.4), као и да се према (1.11) $\Gamma(T,Q;-\lambda)$ понаша као $1/4\pi r_{TQ}$ кад $T \to Q$, следи да је

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varkappa(P;\varepsilon)} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' = -A(P)\Gamma(P,Q;-\lambda)$$

и

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varkappa(Q;\varepsilon)} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' = 0,$$

па се за I коначно добија

$$I = -\lambda \int_S R(P,T;-\lambda)\, A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T +$$

$$+ \int_{S'} \frac{\partial R(P,T;-\lambda)}{\partial n} A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)\, dS_T' + A(P)\Gamma(P,Q;-\lambda).$$

Кад ову вредност за I унесемо у једначину (1.15), она постаје

$$\Delta\Gamma(P,Q;-\lambda) - A(P)\, I(P,Q;-\lambda) =$$

$$= \lambda \{ R(P,Q;-\lambda) - \int_S R(P,T;-\lambda)\, A(T)\, \Gamma(T,Q;-\lambda) dS_T \},$$

тј.

$$\Delta\Gamma(P,Q;-\lambda) - A(P)\Gamma(P,Q;-\lambda) - \lambda\Gamma(P,Q;-\lambda) = 0.$$

Тиме смо доказали да је $\Gamma(P,Q;-\lambda)$ сингуларни део Гринове функције $G(P,Q;-\lambda)$.

(iv) Регуларни део $\gamma(P, Q; -\lambda)$ Гринове функције према тачки **1.1** (ii) је решење једначине (1.2) које на рубу S' задовољава услов (1.6). Функција $\gamma(P, Q; -\lambda)$ је према томе решење једног нехомогеног граничног задатка, а егзистенција решења непосредно следи из чињенице да одговарајући хомогени гранични задатак нема решења.

(v) На исти начин као у претходним тачкама може се показати да је сингуларни део Гринове функције $G(P, Q)$ граничног задатка (A*) решење интегралне једначине

$$\Gamma(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \int_S \frac{1}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T,Q)\, dS_T$$

коју добијамо из (1.10) за $\lambda = 0$. Регуларни део $\gamma(P, Q)$ је решење једначине

$$\Delta u - A(P)\,u = 0$$

које на рубу S' задовољава услов

$$\gamma(P, Q) = \Gamma(P, Q), \quad P \in S'.$$

Према томе је

(1.5*) $$G(P, Q) = \Gamma(P, Q) - \gamma(P, Q)$$

1.3 Процена асимптотског понашања функција $\Gamma(P,Q; -\lambda)$ **и** $\gamma(P, Q; -\lambda)$. (i) За испитивање асимптотског понашања функције $\Gamma(P, Q; -\lambda)$ за велике вредности параметра λ потребна нам је

Лема 1.2 *За* $\alpha \geqslant 0$ *је*

$$\int_S \frac{e^{-\alpha r_{PQ}}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \leqslant \frac{4\pi}{\alpha}\left\{\frac{1 - e^{-\alpha r_{PQ}}}{\alpha r_{PQ}} - e^{-\alpha d}\right\};$$

специјално за $\alpha = 0$ *је*

$$\int_S \frac{1}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \leqslant 4\pi\,(2d - r_{PQ}),$$

где је d *пречник најмање лопте која садржи област* S.

Доказ. Нека је $K(C; r)$ лопта са средиштем у тачки C полупречника r и нека је d пречник најмање лопте која садржи област S. Тада је за свако $P \in S$

$$\int_S \frac{e^{-\alpha r_{PT}}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \leqslant \int_{K(P;d)} \frac{e^{-\alpha r_{PT}}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T = J,$$

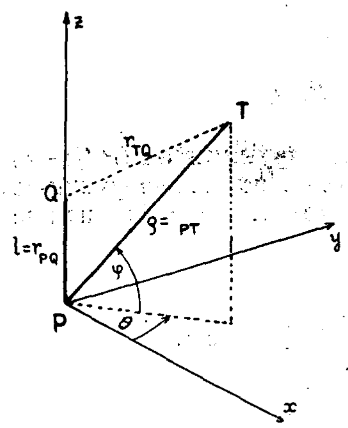
јер је $S \subset K(P; d)$. Ставимо почетак координатног система у тачку P, тако да z-оса пролази кроз тачку Q, и краткоће ради $r_{PQ} = l$. Тада је (в. сл. 1)

$$J = \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-\alpha\rho}\,\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}}\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^d e^{-\alpha\rho}\,\rho\, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}}.$$

Како је уопште за $a > 0$ и $b > 0$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\sqrt{a^2 - 2ab\sin\varphi + b^2}\right) \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - 2ab\sin\varphi + b^2}} = \frac{1}{ab} \int_{|a-b|}^{a+b} f(t)\, dt,$$



Сл. 1.

то је

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}} = \frac{1}{l\rho}(\rho + l - |\rho - l|),$$

па је

$$J = \frac{2\pi}{l} \int_0^d e^{-\alpha\rho}(\rho + l - |\rho - l|)\, d\rho =$$

$$= 4\pi \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l e^{-\alpha\rho}\,\rho\, d\rho + \int_l^d e^{-\alpha\rho}\, d\rho \right\},$$

тј.

$$J = \frac{4\pi}{\alpha} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha r_{PQ}}}{\alpha r_{PQ}} - e^{-\alpha d} \right\}.$$

Друга неједначина доказује се на исти начин.

Лема 1.3 *За* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *је*

(1.16) $$|\Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi r_{PQ}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}.$$

Доказ. Функција $r_{PQ}\Gamma(P, Q; -\lambda)$ је према (1.12) ограничена функција променљивих P и Q у области S. За утврђено Q и

$\lambda > 0$ нека је

$$M = \operatorname*{Max}_{P \in S} |4\pi r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda} r_{PQ}} \Gamma(P, Q; -\lambda)|.$$

Тада из (1.10) и $0 \leqslant A(T) \leqslant A$ добијамо да је

$$|4\pi r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda} r_{PQ}} \Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-1/2\sqrt{\lambda} r_{PQ}} + \frac{MA}{4\pi} r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda} r_{PQ}} \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(r_{PT} + 1/2 r_{TQ})}}{r_{PT} r_{TQ}} dS_T \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{MA}{4\pi} r_{PQ} \int_S \frac{e^{-1/2\sqrt{\lambda} r_{PT}}}{r_{PT} r_{TQ}} dS_T,$$

јер је $r_{PT} + r_{TQ} \geqslant r_{PQ}$. Интеграл на десној страни можемо мајорирати помоћу претходне леме. На тај начин добијамо да је

$$|4\pi r_{PQ} e^{1/2\sqrt{\lambda} r_{PQ}} \Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant 1 + \frac{4MA}{\lambda}.$$

Ова неједначина важи за свако $P \in S$, па је према томе и

$$M \leqslant 1 + \frac{4MA}{\lambda}.$$

Изаберимо λ_0 тако да буде $4A \leqslant 1/2\, \lambda_0$. Тада из претходне неједначине непосредно следи да је $M \leqslant 2$ за $\lambda \geqslant \lambda_0$, а тиме је лема очевидно доказана.

(ii) Процена функције $\gamma(P, Q; -\lambda)$ своди се уствари на то да се докаже да решење једначине (1.2) достиже своју екстремну вредност на рубу посматране области S.

Лема 1.4 *За* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *и произвољно* $P \in S$ *је*

$$|\gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi l_Q} e^{-1/2\sqrt{\lambda} l_Q}, \tag{1.17}$$

где је l_Q *најкраће отстојање тачке* Q *од руба* S'.

Доказ. Нека је при утврђеном Q

$$u(P) = \gamma^2(P, Q; -\lambda).$$

Из

$$\Delta u(P) = 2\sum_{i=1}^{3} \gamma'^2_{x_i}(P, Q; -\lambda) + 2\gamma(P, Q; -\lambda)\,\Delta\gamma(P, Q; -\lambda)$$

и једначине (1.2) чије је решење функција $\gamma(P,Q;-\lambda)$ следи да је

$$\Delta u(P) = 2\sum_{i=1}^{3} \gamma'^2_{x_i}(P,Q;-\lambda) + 2A(P)\gamma^2(P,Q;-\lambda) + 2\lambda\,\gamma^2(P,Q;-\lambda) \geqslant 0.$$

То значи да функција $u(P)$ нема екстремума у области S и према томе своју највећу вредност достиже на рубу S', тј.

$$|\gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \operatorname*{Max}_{P\in S'} |\gamma(P, Q; -\lambda)|.$$

Одавде, с обзиром на (1.6) и (1.16) непосредно следи да је за $\lambda \geqslant \lambda_0$

$$|\gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \operatorname*{Max}_{P\in S'} |\Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{P\in S'} \frac{1}{2\pi r_{PQ}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi l_Q} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\, l_Q},$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S'. Тиме је лема доказана.

1.4 Функција $\Gamma_r(P, Q; -\lambda)$. У овој тачки доказаћемо следећу лему:

Лема 1.5 *Нека је $r = \min(l_Q, 1/\sqrt{A})$, где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S', и $A = \operatorname{Max} A(T)$. Тада је за $P \in K(Q;r)$*

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma_r(P, Q; -\lambda) + O(e^{-\frac{1}{2} r\sqrt{\lambda}}),\quad \lambda \to \infty,$$

где је

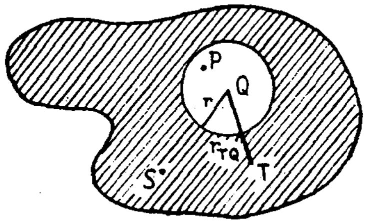
$$(1.18)\quad \Gamma_r(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \int_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma_r(T, Q; -\lambda)\, dS_T$$

Доказ. Из (1.10) следи да је

$$\Gamma(P,Q;-\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}-\left\{\int\limits_{K(Q;r)}+\int\limits_{S^*}\right\}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)dS_T.$$

За $\lambda\geqslant\lambda_0$ према леми **1.3** је

$$|\Gamma(T,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{1}{2\pi r_{TQ}}e^{-1/2\sqrt{\lambda}r_{TQ}}.$$



Сл. 2

Како је $r_{TQ}\geqslant r$ за $T\in S^*$ (в. сл. 2), то је

$$|\Gamma(T,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{1}{2\pi r_{TQ}}e^{-1/2r\sqrt{\lambda}},\ T\in S^*,$$

па је према леми **1.2**

$$\left|\int\limits_{S^*}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)dS_T\right|\leqslant\frac{Ae^{-1/2r\sqrt{\lambda}}}{8\pi^2}\int\limits_{S^*}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{r_{PT}r_{TQ}}dS_T\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Ae^{-1/2r\sqrt{\lambda}}}{8\pi^2}\int\limits_{S}\frac{1}{r_{PT}r_{TQ}}dS_T\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A\,d}{\pi}e^{-1/2r\sqrt{\lambda}}.$$

Према томе је

$$\Gamma(P,Q;-\lambda)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}}+e^{-1/2r\sqrt{\lambda}}B(P,Q;-\lambda)-$$
$$-\int\limits_{K(Q;r)}\frac{e^{-\sqrt{\lambda}r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}A(T)\Gamma(T,Q;-\lambda)dS_T,\tag{1.19}$$

где је

$$|B(P,Q;-\lambda)|\leqslant\frac{A\,d}{\pi}.$$

Нека је $P\in K(Q;r)$ и нека је $\Gamma_r(P,Q;-\lambda)$ решење једначине (1.18). Ставимо

$$D(P,Q;-\lambda)=\Gamma(P,Q;-\lambda)-\Gamma_r(P,Q;-\lambda).$$

Тада из (1.18) и (1.19) следи да је за $\lambda \geqslant \lambda_0$.

$$D(P,Q;-\lambda) = e^{-\frac{1}{2} r \sqrt{\lambda}} B(P,Q;-\lambda) -$$

$$-\int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda} r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T) D(T,Q;-\lambda)\, dS_T .$$

Нека је

$$M = \operatorname*{Max}_{P \in K(Q;r)} |D(P,Q;-\lambda)|.$$

Тада из претходне једначине добијамо да је

$$|D(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{A\,d}{\pi} e^{-\frac{1}{2} r \sqrt{\lambda}} + \frac{A\,M}{4\pi} \int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}}\, dS_T \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A\,d}{\pi} e^{-\frac{1}{2} r \sqrt{\lambda}} + \frac{A\,M\,r^2}{2},$$

јер је за $P \in K(Q;r)$

$$\int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}}\, dS_T = 2\pi \left(r^2 - \frac{1}{3} r^2_{PQ}\right).$$

Претходна неједначина важи за свако $P \in K(Q;r)$ па је према томе

$$M \leqslant \frac{A\,d}{\pi} e^{-\frac{1}{2} r \sqrt{\lambda}} + \frac{A\,M\,r^2}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A\,d}{\pi} e^{-\frac{1}{2} r \sqrt{\lambda}} + \frac{M}{2},$$

јер је $A\,r^2 \leqslant 1$, тј.

$$M \leqslant \frac{2\,A\,d}{\pi} e^{-\frac{1}{2} r \sqrt{\lambda}},$$

а тиме је лема доказана.

1.5 Проблем претстављања. У овој тачки доказаћемо најпре да се једначина (1.18) може решити сукцесивном апроксимацијом, а затим ћемо на основу тога доказати да постоји функција $\Omega(Q;u)$ таква да је

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\Omega(Q;u)}{u+\lambda} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q} \left\{ \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P,Q;-\lambda) \right\} \tag{1.20}$$

за коју важи процена

$$\Omega(Q; u) = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1),\ u \to \infty. \tag{1.21}$$

(i) Нека је

$$u_0(P; \lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}},$$

$$u_1(P; \lambda) = \frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(r_{PT}+r_{TQ})}}{r_{PT}\, r_{TQ}}\, dS_T \tag{1.22}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n(P; \lambda) =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{n+1}} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(r_{PT_1}+r_{T_1T_2}+\dots+r_{T_nQ})}}{r_{PT_1}\, r_{T_1T_2}\cdots r_{T_nQ}}\, A(T_1)\dots A(T_n)\, dS_{T_1}\dots dS_{T_n}.$$

Низ функција $\{u_n(P; \lambda)\}$ дефинисан је рекурентним обрасцем

$$u_0(P; \lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} \tag{1.23}$$

$$u_{n+1}(P; \lambda) = \int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}\, A(T)\, u_n(T; \lambda)\, dS_T. \tag{1.24}$$

Ако за утврђено Q и неко λ ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(P; \lambda)$$

конвергира униформно по P, тада је

$$\Gamma_r(P, Q; -\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(P; \lambda). \tag{1.25}$$

Заиста, према (1.23), (1.24) и (1.25) је тада

$$\int\limits_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}}\, A(T)\, \Gamma_r(T, Q; -\lambda)\, dS_T = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_{n+1}(P; \lambda) =$$

$$= u_0(P;\lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(P;\lambda) =$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda).$$

(ii) Доказаћемо најпре да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(P;\lambda)$$

конвергира униформно по P ако је област $K(Q;r)$ довољно мала.

Из (1.22) видимо да су све функције $\{u_n(P;\lambda)\}$ позитивне, а из (1.23) и (1.24) следи да је за $\lambda \geqslant 0$

$$u_0(P;\lambda) \leqslant \frac{1}{4\pi r_{PQ}},$$

$$u_{n+1}(P;\lambda) \leqslant \frac{A}{4\pi} \int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}} u_n(T;\lambda)\, dS_T.$$

Ставимо

$$v_0(r_{PQ}) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}},$$

(1.26) $$v_{n+1}(r_{PQ}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{K(Q;r)} \frac{1}{r_{PT}} v_n(r_{TQ})\, dS_T.$$

Тада индукцијом добијамо да је

(1.27) $$u_n(P;\lambda) \leqslant A^n v_n(r_{PQ}),\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ако даље ставимо $r_{PQ} = l$ и уведемо сферне координате, једначине (1.26) постају

$$v_0(l) = \frac{1}{4\pi l}$$

$$v_{n+1}(l) = \frac{1}{4\pi}\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{v_n(\rho)\,\rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r v_n(\rho)\,\rho^2\, d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2l\rho\sin\varphi + l^2}} =$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^r \frac{\rho + l - |\rho - l|}{2}\, v_n(\rho)\,\rho\, d\rho,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Коначно, из

$$v_{n+1}(l) = \frac{1}{l}\int_0^l v_n(\rho)\,\rho^2\,d\rho + \int_l^r v_n(\rho)\,\rho\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^r v_n(\rho)\,\rho\,d\rho$$

индукцијом добијамо да је

$$v_n(l) \leqslant \frac{1}{2r\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из ове последње неједначине и (1.27) добијамо да је

$$u_n(P;\lambda) \leqslant \frac{1}{2\,r\pi}\left(\frac{A\,r^2}{2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.28}$$

Одавде међутим непосредно следи да ред

$$\sum_{u=1}^{\infty}(-1)^n u_n(P;\lambda)$$

конвергира униформно по P за утврђено Q и произвољно $\lambda \geqslant 0$, јер r можемо увек изабрати тако да буде $A\,r^2 < 2$.

(iii) Остало је још да докажемо обрасце (1.20) и (1.21). Нека је

$$u_n^*(Q;u) =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{n+1}}\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{K(Q;r)} h\,(r_{QT_1}+r_{T_1T_2}+\ldots+r_{T_nQ};u)\frac{A(T_1)\ldots A(T_n)}{r_{QT_1}r_{T_1T_2}\ldots r_{T_nQ}}\,dS_{T_1}\ldots dS_{T_n}$$

где је

$$h(a;u) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{\sin a\sqrt{t}}{t}\,dt.$$

Из $|h(a;u)| \leqslant h$ где константа h не зависи ни од a ни од u, и неједначине (1.28) следи да је

$$|u_n^*(Q;u)| \leqslant \frac{h}{(4\pi)^{n+1}} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{K(Q;r)} \frac{A(T_1)\ldots A(T_n)}{r_{QT_1} r_{T_1T_2} \ldots r_{T_nQ}} dS_{T_1} \ldots dS_{T_n} =$$

(1.29) $$\leqslant h\, u_n(Q;0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{2r\pi}\left(\frac{Ar^2}{2}\right)^n, \quad u = 1, 2, \ldots$$

Према томе ред

(1.30) $$\frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^*(Q;u) = \Omega(Q;u)$$

конвергира униформно по u. За $u = 0$ нека је $\Omega(Q;0) = 0$. Како је даље

$$\int_0^\infty \frac{h(a;u)}{(u+\lambda)^2} du = \int_0^\infty \left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{\sin a\sqrt{t}}{t} dt\right\} \frac{du}{(u+\lambda)^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\sqrt{t}}{t} \frac{dt}{t+\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-a\sqrt{\lambda}}) = \frac{1}{\lambda} e^{-a\sqrt{\lambda}},$$

то је најпре, према (1.22)

$$\int_0^\infty \frac{u_n^*(Q;u)}{(u+\lambda)^2} du =$$

$$= \frac{1}{\lambda(4\pi)^{n+1}} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{n}_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}(r_{QT_1} + r_{T_1T_2} + \ldots + r_{T_nQ})}}{r_{QT_1} r_{T_1T_2} \ldots r_{T_nQ}} A(T_1) \ldots A(T_n)\, dS_{T_1} \ldots dS_{T_n} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} u_n(Q;\lambda), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а одатле према (1.30) и (1.25) следи да је

$$\int_0^\infty \frac{\Omega(Q;u)}{(u+\lambda)^2}\,du = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(Q;\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\lim_{P=Q}\left\{\frac{1-e^{-\sqrt{\lambda}\,r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(P;\lambda)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\lim_{P=Q}\left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda)\right\}.$$

Одавде коначно парцијалном интеграцијом добијамо образац (1.20).

(iv) Из неједначине (1.29) следи да је за произвољно утврђено $Q \in S$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(Q;u) = O(1),\quad u\to\infty,$$

па је према (1.30)

$$\Omega(Q;u) = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1),\quad u\to\infty.$$

1.6 Доказ става 1. Кад се P налази у близини тачке Q према леми **1.5** је

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma_r(P, Q; -\lambda) + O(e^{-\frac{1}{2}r\sqrt{\lambda}}),\quad \lambda\to\infty.$$

Како процена (1.17) за $\gamma(P, Q; -\lambda)$ важи за произвољно $P \in S$, то према (1.1) и (1.5) за $P \in K(Q;r)$ имамо да је

$$\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = G(P, Q) - \Gamma_r(P, Q; -\lambda) +$$

$$+ O(e^{-\frac{1}{2}r\sqrt{\lambda}}) + O(e^{-\frac{1}{2}l_Q\sqrt{\lambda}}) =$$

$$= G(P,Q) - \Gamma_r(P,Q;-\lambda) + O(e^{-\frac{1}{2}r\sqrt{\lambda}}),\quad \lambda\to\infty,$$

јер је $l_Q \geqslant r$. Даље, из (1.5*),

$$\Gamma(P,Q) = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \int_S \frac{1}{4\pi r_{PT}}A(T)\,\Gamma(T,Q)\,dS_T$$

и претходног обрасца следи да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda)\right\} - \frac{1}{\lambda} M(P, Q) +$$

$$+ O\left(e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

где смо једноставности ради ставили

$$M(P, Q) = \int_S \frac{1}{4\pi r_{PT}} A(T)\,\Gamma(T, Q)\, dS_T + \gamma(P, Q).$$

$M(P, Q)$ је очевидно непрекидна функција променљивих P и Q. Према томе, кад $P \to Q$ добијамо да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q} \left\{\frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda)\right\} - \frac{1}{\lambda} M(Q) +$$

$$+ O\left(e^{-1/2 r \sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

где је $M(Q) = M(Q, Q)$. Тиме је прва неједначина става **1** доказана.

Друга неједначина става 1 непосредно следи из обрасца (1.1) и процена (1.16) и (1.17) које смо добили за $\Gamma(P; Q; -\lambda)$ и $\gamma(P, Q; -\lambda)$.

II ГЛАВА

2.1 (i) Овде ћемо доказати став **2** који спада у групу ставова Тауберове природе за Стилтјесову трансформацију која опада експоненцијалном брзином. Доказ става **2** као и докази осталих сличних ставова заснивају се у суштини на једном ставу J. Карамате **[13]** који у нешто измењеном облику гласи:

Нека је $K(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} K(u)\, du$$

конвергира за $R(s) > 0$. Тада из услова конвергенције

$$K(v) - K(u) \geqslant -m, \quad u \leqslant v \leqslant u+1$$

и регуларносӣи функције $F(s)$ *у ӣачки* $s=0$ *следи*

$$K(u)=O(1),\ u\to\infty.$$

(ii) За доказ става **2** потребне су нам следеће леме.

Лема 2.1 *За* $y>x\geqslant 0$ *из услова конвергенције* (b) *сӣава* **2** *следи да је*

$$S(y)-S(x)\geqslant -m-m_1(\sqrt{y}-\sqrt{x}). \tag{2.1}$$

Доказ. Нека је $1<\mu<e$ и

$$\alpha(x)=e^{\sqrt{x}},\quad \beta(x)=\lg^2 x.$$

Тада је

$$\beta[\mu\,\alpha(x)]\leqslant x+\sqrt{x}.$$

Према томе је

$$S(x')-S(x)\geqslant -m,\quad x\leqslant x'\leqslant\beta[\mu\,\alpha(x)]. \tag{2.2}$$

Нека је $y>x$ и

$$x_0=x$$

$$x_\nu=\beta[\mu\,\alpha(x_{\nu-1})]=\beta[\mu^\nu\alpha(x)],\ \nu=1,2,\ldots,n.$$

Број n изабраћемо тако да буде $x_n<y\leqslant x_{n+1}$. Из неједначине (2.2) следи

$$S(x_\nu)-S(x_{\nu-1})>-m,\quad \nu=1,2,\ldots,n-1,$$

$$S(y)-S(x_n)>-m.$$

Ове неједначине, кад их саберемо, дају

$$S(y)-S(x)>-m-nm.$$

Како је међутим $x_n<y$, тј. $n<(\sqrt{y}-\sqrt{x})/\lg\mu$, то је

$$-nm>-\frac{m}{\lg\mu}(\sqrt{y}-\sqrt{x}),$$

одакле непосредно следи (2.1).

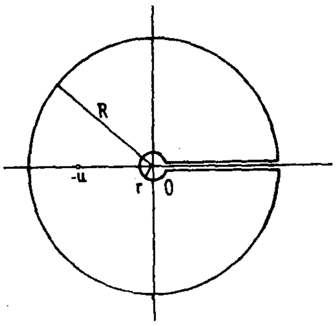
Лема 2.2 *Нека су* δ, ν, s *и* u *ӣозиӣивни бројеви и нека је* $\nu\delta<s$. *Тада је*

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^\nu\frac{\sin s\sqrt{x}}{x+u}\,dx=\pi e^{-s\sqrt{u}}\left(\frac{\operatorname{sh}\delta\sqrt{u}}{\delta\sqrt{u}}\right)^\nu. \tag{2.3}$$

Доказ. Нека је

$$f(z) = \left(\frac{\sin \delta \sqrt{z}}{\delta \sqrt{z}}\right)^{\nu} e^{siz}.$$

Ако са C означимо контуру приказану на сл. 3, према Кошиевом ставу биће



Сл. 3

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ставимо овде $z = ue^{i\pi}$. Тада је

$$f(-u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w + u} dw,$$

или

$$2\pi i \left(\frac{\operatorname{sh} \delta \sqrt{u}}{\delta \sqrt{u}}\right)^{\nu} e^{-s\sqrt{u}} = \int_r^R \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}}\right)^{\nu} \frac{e^{si\sqrt{x}}}{x + u} dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \delta \sqrt{R}\, e^{ti/2}}{\delta \sqrt{R}\, e^{ti/2}}\right)^{\nu} \frac{e^{si\sqrt{R}\, e^{ti/2}}}{Re^{ti} + u} Rie^{ti} dt +$$

$$+ \int_R^r \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}}\right)^{\nu} \frac{e^{-si\sqrt{x}}}{x + u} dx -$$

$$- \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \delta \sqrt{r}\, e^{ti/2}}{\delta \sqrt{r}\, e^{ti/2}}\right)^{\nu} \frac{e^{si\sqrt{r}\, e^{ti/2}}}{re^{ti} + u} rie^{ti} dt,$$

тј.

$$\text{(2.4)} \qquad \left(\frac{\operatorname{sh} \delta \sqrt{u}}{\delta \sqrt{u}}\right)^{\nu} e^{-s\sqrt{u}} = \int_r^R \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}}\right)^{\nu} \frac{\sin s \sqrt{x}}{x + u} dx + I_1 + I_2.$$

Како је за произвољно комплексно z увек

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant 2\, e^{|z|},$$

то је најпре

$$|I_1| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{R}\,e^{ti/2}}{\delta\sqrt{R}\,e^{ti/2}}\right)^{\nu}\frac{e^{si\sqrt{R}\,e^{ti/2}}}{R\,e^{ti}+u}\,R\,i\,e^{ti}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-(s-\delta\nu)\sqrt{R}\sin\frac{t}{2}}}{\sqrt{R^2+2Ru\cos t+u^2}}\,dt \to 0, \quad R\to\infty,$$

јер је $\delta\nu < s$. Даље,

$$|I_2| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{r}\,e^{ti/2}}{\delta\sqrt{r}\,e^{ti/2}}\right)^{\nu}\frac{e^{si\sqrt{r}\,e^{ti/2}}}{r\,e^{ti}+u}\,r\,i\,e^{ti}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-(s-\delta\nu)\sqrt{r}\sin\frac{t}{2}}}{\sqrt{r^2+2\,r\,u\cos t+u^2}}\,dt \to 0, \quad r\to 0.$$

Из ових неједначина и (2.4) непосредно следи (2.3).

Лема 2.3 *Нека је $S(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека*

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du$$

конвергира за једно па према томе за свако $x > 0$. Ако је

(2.5) $$f(x) = O(1/x^{1+\varepsilon}), \quad x\to\infty, \quad \varepsilon > 0,$$

тада је

(2.6) $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\,\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-su}\,S(u^2)\,du.$$

Доказ ове леме своди се уствари на то да докажемо да је

(2.7) $$\int_0^{\infty}\sin s\sqrt{x}\,dx\int_0^{\infty}\frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du = \int_0^{\infty}S(u)\,du\int_0^{\infty}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx.$$

Наиме, из

$$\int_0^\infty \frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx = \frac{\pi s}{2\sqrt{u}}\,e^{-s\sqrt{u}}$$

и претходног обрасца следи да је

$$\int_0^\infty f(x)\sin s\sqrt{x}\,dx = \pi s\int_0^\infty e^{-s\sqrt{u}}\,S(u)\frac{du}{2\sqrt{u}},$$

одакле сменом $u\,|\,u^2$ добијамо (2.6).

1^0. Доказаћемо најпре да је за $\delta > 0$

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\sin s\sqrt{x}\,dx\int_0^\infty\frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du =$$

(2.8)

$$=\int_0^\infty S(u)\,du\int_0^\infty\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx.$$

За коначне R_1 и R_2 је

$$\int_0^{R_1}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\sin s\sqrt{x}\,dx\int_0^{R_2}\frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du =$$

$$=\int_0^{R_2} S(u)\,du\int_0^{R_1}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx =$$

$$=\int_0^{R_2} S(u)\,du\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx -$$

$$-\int_0^{R_2} S(u)\,du\int_{R_1}^{\infty}\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(x+u)^2}\,dx.$$

Како је

$$\left|\int_R^\infty\left(\frac{\sin\delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k}\frac{\sin s\sqrt{x}}{(u+x)^2}\,dx\right| \leqslant \int_R^\infty\frac{du}{(u+x)^2} = \frac{1}{u+R},$$

то кад у претходном обрасцу пустимо да $R_1 \to \infty$ добијамо да је

$$\int_0^{R_2} S(u)\,du \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \frac{\sin s\sqrt{x}}{(u+x)^2}\,dx =$$

(2.9)
$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \sin s\sqrt{x}\,dx \int_0^{R_2} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \sin s\sqrt{x}\,dx \int_0^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du -$$

$$- \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \delta\sqrt{x}}{\delta\sqrt{x}}\right)^{2k} \sin s\sqrt{x}\,dx \int_{R_2}^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du .$$

Нека је, даље,

$$g(u) = \int_0^{u} \frac{S(u)}{(u+1)^2}\,du \quad \text{и} \quad f(x) = \int_0^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du .$$

Тада из

$$\int_R^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du = f(1) - g(R)\left(\frac{R+1}{R+x}\right)^2 - 2(x-1)\int_R^{\infty} \frac{u+1}{(u+x)^3}\,g(u)\,du$$

и ограничености функције $g(u)$ следи да је

$$\left|\int_R^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du\right| \leqslant |f(1)-g(R)|\left(\frac{R+1}{R+x}\right)^2 + \left|1-\left(\frac{R+1}{R+x}\right)^2\right| |f(1)| +$$

$$+ 2M(x+1)\int_R^{\infty} \frac{u+1}{u^3}\,du \leqslant$$

$$\leqslant |f(1)-g(R)|\left(\frac{R+1}{R}\right)^2 +$$

$$+2|f(1)|\frac{x+1}{R} + |f(1)|\frac{x^2+1}{R^2} + 2M(x+1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2R^2}\right).$$

За $R > 1$ је

$$\left|\int_R^{\infty} \frac{S(u)}{(u+x)^2}\,du\right| \leqslant 4|f(1)-g(R)| + \frac{M'}{R}(x^2+x+1).$$

Према томе је за $k \geqslant 4$

$$\left| \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}} \right) \sin s\sqrt{x}\, dx \int_{R_2}^\infty \frac{S(u)}{(u+x)^2}\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}} \right)^{2k} dx \left| \int_{R_2}^\infty \frac{S(u)}{(u+x)^2}\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\, | f(1) - g(R_2) | \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}} \right)^{2k} dx +$$

$$+ \frac{M'}{R_2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}} \right)^{2k} (x^2 + x + 1)\, dx .$$

Коначно, из (2.9) кад $R_2 \to \infty$, и ове последње неједначине непосредно следи (2.8).

2°. Остало је још да докажемо да се у (2.8) гранични прелаз $\delta \to 0$ испред знака интеграла може заменити граничним прелазом $\delta \to 0$ иза знака интеграла. При томе ћемо користити познати Арзела-Лебегов став за несвојствене интеграле у следећем облику:

Нека је $\lim\limits_{\delta=0} F(x, \delta) = F(x)$ *и нека интеграли*

$$\int_0^\infty F(x, \delta)\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty F(x)\, dx \tag{2.10}$$

постоје. Ако је за свако $x > 0$ *и* $\delta \geqslant 0$

$$| F(x, \delta) | \leqslant G(x) \tag{2.11}$$

и ако интеграл

$$\int_0^\infty G(x)\, dx \tag{2.12}$$

постоји, тада је

$$\lim_{\delta=0} \int_0^\infty F(x, \delta)\, dx = \int_0^\infty F(x)\, dx .$$

На основу неједначине $\left| \dfrac{\sin x}{x} \right| \leqslant 1$, која важи за свако реално x, и процене (2.6) за функцију $f(x)$ може се лако показати да су сви услови Арзела-Лебеговог става на левој страни обрасца (2.8) задовољени и да према томе гранични прелаз $\delta \to 0$ испред знака интеграла можемо заменити граничним прелазом $\delta \to 0$ иза знака интеграла.

Да би смо доказали да је то дозвољено и на десној страни обрасца (2.8) ставимо

$$F(u, \delta) = S(u) \int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}}\right)^{2k} \frac{\sin s \sqrt{x}}{(u+x)^2} dx.$$

Из (2.3) диференцирањем по u добијамо да је

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin \delta \sqrt{x}}{\delta \sqrt{x}}\right)^{2k} \frac{\sin s\sqrt{x}}{(u+x)^2} dx =$$

$$= \frac{\pi e^{-s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} \left\{\left(s + \frac{2k}{\sqrt{u}}\right)\left(\frac{\operatorname{sh} \delta \sqrt{u}}{\delta \sqrt{u}}\right)^{2k} - \frac{2k}{\sqrt{u}}\left(\frac{\operatorname{sh} \delta \sqrt{u}}{\delta \sqrt{u}}\right)^{2k-1} \operatorname{ch} \delta \sqrt{u}\right\}.$$

Према томе је

$$F(u, \delta) = \pi S(u) \frac{e^{-s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} \left\{\left(s + \frac{2k}{\sqrt{u}}\right)\left(\frac{\operatorname{sh} \delta \sqrt{u}}{\delta \sqrt{u}}\right)^{2k} - \frac{2k}{\sqrt{u}}\left(\frac{\operatorname{sh} \delta \sqrt{u}}{\delta \sqrt{u}}\right)^{2k-1} \operatorname{ch} \delta \sqrt{u}\right\}.$$

Како је осим тога

$$F(u) = \frac{\pi s}{2\sqrt{u}} e^{-s\sqrt{u}} S(u),$$

то је услов (2.10) Арзела-Лебеговог става очевидно задовољен. Даље, на основу неједначине $\left|\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right| \leqslant e^x$, која важи за свако реално x, имамо да је

$$|F(u, \delta)| \leqslant \pi |S(u)| \frac{e^{-s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} \left\{\left(s + \frac{2k}{\sqrt{u}}\right) e^{2\delta k \sqrt{u}} + \frac{2k}{\sqrt{u}} e^{2\delta k \sqrt{u}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \pi |S(u)| \left(s + \frac{4k}{\sqrt{u}}\right) \frac{e^{-(s-2\delta k)\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}.$$

Ако је $2\delta k \leqslant s/2$ тада је

$$|F(u, \delta)| \leqslant \pi |S(u)| \left(s + \frac{4k}{\sqrt{u}}\right) \frac{e^{-1/2 s\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}}, \quad \delta \geqslant 0.$$

Из ове неједначине следи да су и услови (2.11) и (2.12) задовољени. Применом Арзела-Лебеговог става добијамо коначно (2.7), а тиме је лема доказана.

2.2. Доказ става 2. Нека је најпре s реалан и позитиван број. Према леми (2.3) је

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin s\sqrt{x}}{s}\,dx = \int_0^\infty e^{-su}\,S(u^2)\,du.$$

Функција $\varphi(s)$, као функција комплексне променљиве s, регуларна је у десној полуравни, тј. за $R(s) > 0$, што непосредно следи из чињенице да се може написати у облику Лапласове трансформације. На основу неједначине $\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant 2e^{|z|}$, која важи за свако комплексно z и процене (a) за функцију $f(x)$ непосредно следи да је функција $\varphi(s)$ регуларна и у тачки $s=0$. Коначно, из неједначине (2.1) следи да је

$$S(v^2) - S(u^2) > -m, \quad u \leqslant v \leqslant u+1.$$

Функција $S(u^2)$ задовољава дакле услове поменутог Караматиног става, па је

$$S(u^2) = 0(1), \; u \to \infty.$$

Тиме је став **2** доказан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. A. Lorenz — Vortrag auf dem internationalen Kongresse in Rom, 1908, *Phys. Zeitschrift* **11** (1910), 1248.

[2] A. Sommerfeld — *Phys. Zeitschrift* **11** (1910), 1057—1066.

[3] H. Weyl — Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, *Göttinger Nachrichten* (1911), 110—117.

[4] R. Courant—D. Hilbert — Methoden der Mathematischen Physik I, Berlin, 1931.

[5] A. Hammerstein — Über die asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen linearer Integralgleichungen, *Math. Ann.* **95**, 101—109.

[6] T. Carleman — Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. *Förhandlingar Skandinaviska Matematikerkongressen Stockholm*, 1934, 34 — 44.

[7] Å. Pleujel — Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations. *Arkiv för Matematik, Astronomy och Fysik* **27** A, No 13 (1940); — Asymptotic relations for the eigenfunctions of certain boundary value problems of polar type. *American J. of Math.* **70** (1948), 892 — 907.

[8] S. Minakshisundaram — A generalization of Epstein Zeta functions. *Canadian Journ. of Math.* **1** (1949), 320—327; — and Å. Pleijel, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. *Canadian Journ. of Math.* **1** (1949), 242—256.

[9] V. G. Avakumović — Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman, *Math. Zeitschrift* **53** (1950), 53—58, — Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung, *Publ. de l'Institut Math. de l'Acad. Serbe des Sciences*, **4** (1952), 95—96.

[10] Р. Бојанић и В. Вучковић — О сопственим функцијама граничног задатка малих осцилација еластичне плоче. *Зборник радова Математичког института САН*, **3** стр. 107—128.

[11] В. Вучковић — Стилтјесова трансформација која опада брзином експоненцијалне функције, *Зборник радова Математичког института САН*, **3** (1954).

[12] S. Bochner — Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932.

[13] J. Karamata – Über einen Satz von H. Heilbron und E. Landau *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade* **5** (1936), 28—38.

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINEAIRES

Par

RANKO BOJANIĆ

Le problème classique de la théorie des membranes vibrantes, dans le cas le plus simple, consiste à trouver dans un domaine S du plan les solutions de l'équation

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

qui s'annulent sur le bord du domaine considéré. T. Carleman [**6**] a donné une méthode pour l'évaluation asymptotique de la somme de carrés des fonctions propres $\{\Phi_n(Q)\}$ en montrant que

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) \sim \frac{1}{4\pi}\lambda, \quad \lambda \to \infty,$$

où $\{\lambda_n\}$ sont les valeurs propres du problème considéré. Å. Pleijel [**7**] et S. Minakshisundaram [**8**] ont complété et étendu cette méthode aux cas plus généraux, mais tous ces résultats sont de la même portée que celui de Carleman quant aux évaluations du comportement asymptotique. Une amélioration dans cette direction a été récemment donnée par V. G. Avakumović* qui a montré que

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{4\pi}\lambda + O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty$$

et

$$\sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q) = O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty\,.$$

---

* Ces résultats découlent de l'évaluation de la fonction de Green donnée par Carleman [**6**] et d'un théorème de nature taubérienne de Avakumović [**9_1**].

Quant aux évaluations plus précises relatives au comportement asymptotique des fonctions propres dans les cas plus généraux, les problèmes sont restés ouverts.

Dans cette ordre d'idées, quoique la méthode permet de traiter le cas à n dimensions, nous avons considéré le problème généralisé de la membrane à trois dimensions

$$(A)\qquad \begin{aligned} &\Delta u - A(P)\, u + \lambda u = 0, \quad P \in S, \\ &u = 0 \quad \text{sur le bord de } S, \end{aligned}$$

où $A(P)$ est une fonction positive, avec les dérivées partielles du premier ordre continues dans S. Pour les fonctions propres orthonormées de ce problème nous avons montré que

$$(\mathrm{I})\qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(Q) = \frac{1}{6\pi^2}\lambda^{3/2} + O(\lambda), \quad \lambda \to \infty,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q) = O(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Dans la méthode de Pleijel le problème central consiste dans l'évaluation de la partie régulière, c. à d. de la compensatrice de la fonction de Green. Par contre la méthode dont nous nous sommes servi repose sur l'étude de la partie singulière de cette fonction et sur l'application d'un théorème de nature taubérienne, analogue à celui de Avakumović.

Nous avons en premier lieu démontré l'existence de la solution de l'équation intégrale

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \int_S \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\, \Gamma(T, Q; -\lambda)\, dS_T$$

où r_{PQ} est la distance entre les points P et Q, et montré que cette solution est la partie singulière de la fonction de Green du problème aux limites (A). De ce résultat on obtient les évaluations suivantes

$$|\Gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi r_{PQ}}\, e^{-{}^1/_2\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}, \quad \lambda \geqslant \lambda_0,$$

ainsi que

$$|\gamma(P, Q; -\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi l_Q}\, e^{-{}^1/_2\sqrt{\lambda}\, l_Q},$$

où $\gamma(P, Q; -\lambda)$ est la partie régulière de la fonction de Green et où l_Q représente la borne inférieure de la distance du point fixe Q au bord de S.

En seconde lieu, nous avons introduit la fonction $\Gamma_r(P, Q; -\lambda)$, solution de l'équation intégrale

$$(*) \quad \Gamma_r(P, Q; -\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PQ}}}{4\pi r_{PQ}} - \int_{K(Q;r)} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}\, r_{PT}}}{4\pi r_{PT}} A(T)\, \Gamma_r(T, Q; -\lambda)\, dS_T$$

où $K(Q;r)$ est la sphère de centre Q et de rayon r suffisamment petit, telle que $K(Q;r) \subset S$. Pour tout $P \in K(Q;r)$, on a

$$\Gamma(P, Q; -\lambda) = \Gamma_r(P, Q; -\lambda) + O(e^{-1/2 r\sqrt{\lambda}}), \quad \lambda \geqslant \lambda_0 .$$

Lorsque r est suffisamment petit, l'équation (*) peut être résolue par des approximations succesives. On peut alors montrer l'existence d'une fonction $\Omega(Q;u)$ telle que

$$(**) \qquad \int_0^\infty \frac{d\,\Omega(Q;u)}{u+\lambda} = \frac{1}{\lambda} \lim_{P=Q} \left\{ \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda) \right\}$$

et

$$\Omega(Q;u) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{u} + O(1), \quad u \to \infty .$$

De ces évaluations et de la formule

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) - G(P, Q; -\lambda)$$

où $G(P, Q) = G(P, Q; 0)$ et

$$G(P, Q; -\lambda) = \Gamma(P, Q; -\lambda) - \gamma(P, Q; -\lambda)$$

il s'ensuit que

$$(***) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = \lim_{P=Q} \left\{ \frac{1}{4\pi r_{PQ}} - \Gamma_r(P, Q; -\lambda) \right\} -$$

$$- \frac{1}{\lambda} M(Q) + O(e^{-1/2 r\sqrt{\lambda}}), \ \lambda \to \infty .$$

Pour $P \neq Q$ on obtient

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = G(P, Q) + O(e^{-1/2 c\sqrt{\lambda}}), \lambda \to \infty .$$

où $c = \min(r_{PQ}, l_Q)$.

En troisième lieu nous avons établi le théorème suivant**

Soit $S(u)$ *à variation bornée dans tout intervalle fini et soit l'intégrale*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x}$$

convergeant pour tout $x > 0$. *Alors de*

$$f(x) = O(e^{-c\sqrt{x}}),\quad x \to \infty,\quad c > o,$$

et

$$S(v) - S(u) > -m \quad pour \quad u \leqslant v \leqslant u + \sqrt{u},$$

il résulte que

$$S(u) = O(1),\quad u \to \infty.$$

Pour obtenir l'évalution (I) il suffit de poser dans le théorème précédent

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q;u) + M(Q),\quad S(0) = 0.$$

En tenant compte de (***) il s'ensuit que

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} - \Omega(Q;u) + M(Q) = O(1),$$

c. à d.

$$\sum_{\lambda_n \leqslant u} \frac{\Phi_n^2(Q)}{\lambda_n} = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{u} + O(1),\quad u \to \infty,$$

d'où l'on déduit l'aftirmation (I) après une sommation par parties. La formule (II) s'obtient d'une manière analogue.

** Récemment V. Vučković [11] a donné quelques théorèmes plus généraux de ce genre.