Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

СЛОБОДАН АЉАНЧИЋ

О АСИМПТОТСКОМ РАЗВИЈАЊУ *A*-ЗБИРЉИВИХ ЛИНЕАРНИХ ФУНКЦИОНЕЛА

ТЕЗА

I Увод
II Проблематика и резултати
III Докази ставова
IV Примене

I УВОД

1.1. У Математичкој анализи се још почетком XIX века оперисало са дивергентним редовима, ово тим пре што су и нумерички резултати давали задовољавајућу тачност (у Астрономији). Тек појавом Абела и Кошиа, који су дали основе модерне Анализе, почело је да се устаљује схватање да докази не смеју почивати на операцијама са дивергентним редовима. Али, самим тиме, указала се и потреба да се протумачи зашто и дивергентни редови доводе до прихватљивих резултата. Коши [4] је то учинио на примеру Стирлинговог реда. Основна Кошиева идеја долази до изражаја и на следећем једноставном примеру.

Нека је

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{x+u}\,du, \quad x>0.$$

Ако овде ставимо

$$\frac{1}{x+u}=\frac{1}{x}-\frac{u}{x^2}+\frac{u^2}{x^3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^n}{x^{n+1}}+(1)^{n+1}\frac{u^{n+1}}{x^{n+2}}\theta,$$

где је

$$\theta=\frac{1}{1+u/x},$$

па према томе $0<\theta<1$, и интегришемо члан по члан, налазимо

$$F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+R_n, \tag{1.1.1}$$

где је

$$R_n=(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\theta_1, \quad 0<\theta_1<1.$$

Кад $n\to\infty$, ред (1.1.1) дивергира за свако x, али ипак може послужити за приближно израчунавање функције $F(x)$ за велике вредности x. Наиме, за дато $x\gg 1$ чланови реда по апсолутној вредности прво врло брзо опадају, да би затим неограничено расли. Један од њих, дакле, постиже минимум. Ако се, према томе, у реду задржимо на члану који претходи минималном, отступање од тачне вредности $F(x)$ биће, на основу облика остатка, само један део минималног члана. А овај може бити врло мали, често и довољно мали за тражену тачност. Наравно, отступање се за дато x не може учинити произвољно малим, јер је оно с доње стране ограничено апсолутном вредношћу минималног члана. То је битна разлика (у погледу нумеричког рачуна) оваквих дивергентних редова од конвергентних, а тиме се и објашњава зашто су они понекад погоднији од конвергентних за нумерички рад: довољно је да минимални члан нема сувише велики индекс.

1.2. Стилтјес [22*a*] и Поенкаре [18] су једновремено, независно један од другог, увели појам семиконвергентног односно асимптотског реда. У литератури је преовладао последњи термин.

Ред, био он конвергентан или дивергентан, асимптотски претставља функцију $f(x)$ за велике вредности x,

$$f(x)\sim c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots \tag{1.2.1}$$

ако за свако $n=0,1,2,\ldots$

$$x^n\left\{f(x)-\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}\right)\right\}\to 0, \quad x\to\infty. \tag{1.2.2}$$

Док се Стилтјес у свом раду задржао на овој дефиницији и дао примере, Поенкаре је отишао много даље. Он је показао да се, под извесним условима, на асимптотске редове могу применити алгебарске и инфинитезималне операције, и да свакој од њих примењеној на асимптотски ред одговара аналогна операција примењена на функцију $f(x)$.

Нека је

$$f(x)\sim\sum\frac{a_\nu}{x^\nu} \quad \text{и} \quad g(x)\sim\sum\frac{b_\nu}{x^\nu}.$$

Тада је:

1^0 $$\alpha f(x)+\beta g(x) \sim \sum \frac{\alpha a_\nu+\beta b_\nu}{x^\nu},$$

2^0 $$f(x)\, g(x) \sim \sum \frac{c_\nu}{x^\nu}, \quad c_\nu = \sum_{m=0}^{\nu} a_m\, b_{\nu-m}.$$

3^0 Ако је $R(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ рационална функција аргумената $y_1, y_2, \ldots, y_p$ и функције $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ имају асимптотске развитке, тада и функција

$$F(x)=R(f_1, f_2, \ldots, f_p)$$

има асимптотски развитак, под претпоставком да именитељ од R не тежи нули кад $x\to\infty$. Овај асимптотски развитак се израчунава формално као да су развици функција $f_i(x)$ конвергентни редови.

4^0 Ако

$$g(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n+\cdots$$

има полупречник конвергенције $r>0$, и

$$f(x) \sim \sum \frac{a_\nu}{x^\nu}, \quad x\to\infty,$$

тада и функција $F(x)=g(f)$ има асимптотски развитак, под претпоставком да је $|a_0|<r$. Израчунава се као да је ред $\Sigma a_\nu/x^\nu$ конвергентан.

5^0 Ако је функција $f(x)$ непрекидна за $x>x_0$ и

$$f(x) \sim \sum \frac{a_\nu}{x^\nu}, \quad x\to\infty,$$

тада је

$$\int_x^\infty \left\{f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right\} dt \sim \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu}{(\nu-1)\, x^{\nu-1}}, \quad x\to\infty.$$

Одавде следи: Ако, сем наведених претпоставки о $f(x)$, постоји непрекидан извод $f'(x)$ и овај допушта асимптотски развитак, онда је

$$f'(x) \sim -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu a_\nu}{x^{\nu+1}}, \quad x\to\infty.$$

Тек благодарећи томе што су наведене операције са асимптотским редовима дозвољене, могла је њихова теорија и примена да дође до пуног замаха. У томе је Поенкареова заслуга.

1.3. Ако функција $f(x)$ има асимптотски развитак, овај је Стилтјесовим алгоритмом (1.2.2) једнозначно одређен (мада се често, на тај начин, не може и ефективно израчунати). Обрнуто, међутим, не важи јер функције $f(x)$ и $f(x)+e^{-x}$ имају исти асимптотски развитак. Тиме се пред теорију асимптотских редова постављају два основна проблема:

1^0 Егзистенција асимптотског развитка када је дата функција и његово практично изналажење.

2^0 Како ограничити класу функција да би, када је дат асимптотски ред, овом одговарала једна једина функција.

Оба ова питања нису у потпуности и на задовољавајући начин решена.

(i) За асипмптотско развијање функција постоји читав низ метода, више или мање практичних, у зависности од облика у коме је дата функција. Први асимптотски развици добивени су из Ојлер-Маклореновог збирног обрасца, више-мање случајно. Али, тек се Лапласова [14] метода „функција великих бројева"[1]), коју је Коши проширио на комплексно подручје[2]), с правом може назвати првом методом асимптотског развијања. Базирала је дуго на једној плаузибилној примедби, наиме, да за велике вредности n интегралу

$$\int f(x)\,[g(x)]^n\,dx$$

у првом реду доприноси најужа околина максимума функције $g(x)$. Ригурозност долази тек са Пероном [17], а даља усавршавања у радовима Дебиа [6] и Ватсона [24c].

Дарбуова [5] метода користи зависност асимптотског понашања низа f_n $(n\to\infty)$ од сингуларитета које његова функција-генератриса

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,t^n$$

има на кругу конвергенције. Хар [8] преноси овај поступак на функције $f(x)$ $(x\to\infty)$, где улогу функције-генератрисе преузима Лапласова трансформација од $f(x)$.

Не мање значајне су метода Љувила и Стеклова [21], која даје асимптотски развитак за решење линеарне диферецијалне једначине, и метода Барнса [2a], Форда [8] и Њусама [16], која се односи на асимптотско развијање $(x\to\infty)$ функција дефинисаних Тајлоровим редовима специјалног типа

$$\sum \frac{x^n}{n!\,(n+\vartheta)},\qquad \vartheta\neq 0,-1,-2,\ldots$$

---

[1]) Fonctions des grands nombres.

[2]) Sattelpunktmethode, method of the steepest descent.

Први покушај да се бар један значајнији број метода асимптотског развијања сведе под један општи принцип учинио је Деч [7]. Нека функционална трансформација T пресликава функцију F на функцију f, тј.

$$f = T(F). \tag{1.4.1}$$

Тада, из асимптотског понашања једне од функција F и f, можемо закључити о понашању друге у околини извесне тачке. Ако из F закључујемо о f имамо асимптотику Абелове природе, у обрнутом случају Тауберове. Најзад, постоји и трећа врста, индиректна Абелова асимптотика, у случају да трансформација (1.4.1) допушта инверзију

$$F = T^{-1}(f),$$

а закључује се о функцији F.

(ii) У погледу другог проблема наведеног на почетку ове тачке први допринос дао је Стилтјес [17*b*]. Стилтјесова основна идеја састоји се у томе да дивергентном реду

$$\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots, \quad c_\nu \geqslant 0, \tag{1.4.2}$$

када c_ν испуњавају одређене услове, преко конвергентног верижног разломка

$$\cfrac{1}{a_1 x + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 x + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

координира одређени интеграл

$$\int_0^\infty \frac{f(u)}{x+u}\,du$$

и овај сматра сумом реда (1.4.2). Одређивање позитивне функције $f(u)$ из коефицијената реда (1.4.2) своди се на чувени Стилтјесов проблем момената.

Доцније су Ватсон [19*b*], Неванлина [11] и Карлеман [3*b*] дали низ услова под којим се из

$$f(x) \sim \sum \frac{c_\nu}{x^\nu}, \quad x \to \infty,$$

једнозначно може одредити $f(x)$ ако је ова функција регуларна у $-\pi/2\alpha < \varphi < \pi/2\alpha$, $r > R$ $(x = re^{i\varphi})$. Ти услови су типа

$$\left| x^n \left\{ f(x) - \sum_0^{n-1} \frac{\alpha_\nu}{x^\nu} \right\} \right| < \binom{n}{k}^{n/k} e^{-n/k} \rho^n \, (k \geqslant \alpha)$$

за довољно велико n и погодно $\rho > 0$.

1.4. Потенцијални асимптотски редови, какве су увели Поенкаре и Стилтјес, претрпели су у своме развоју низ генерализација.

У случају да функција $f(x)$ не испуњава већ први $(n=0)$ услов (1.2.2), Поенкаре проширује појам асимптотског реда на тај начин што погодним избором функција $g(x)$ и $h(x)$, уместо $f(x)$ развија у асимптотски ред функцију

$$\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} \sim \sum \frac{b_\nu}{x^\nu},$$

и тако добија уопштени асимптотски развитак

$$f(x) \sim g(x) + h(x) \sum \frac{b_\nu}{x^\nu}, \quad x \to \infty .$$

Променљива x може узимати и комплексне вредности. Но тада се мора прецизирати у ком правцу, односно у ком углу важе услови (1.2.2) кад $|x| \to \infty$, па према томе и асимптотски развитак. Ова генерализација на комплексно подручје омогућила је Неванлини [**15**] да употпуни круг дозвољених операција са асимптотским редовима. Он је показао да се диференцирањем асимптотског реда добија асимптотски ред извода, али само код асимптотских редова који важе у читавом углу а не само дуж кривих линија.

Карлеман [**3***a*, *b*] је први увео асимптотске редове облика

$$c_0(x) + \frac{c_1(x)}{x} + \frac{c_2(x)}{x^2} + \ldots, \quad x \to \infty ,$$

где коефицијенти $c_\nu(x)$ нису константе већ периодичке функције по x.

Најзад, Шмит [**20***a*, *b*] испитује асимптотске редове са општом, не више потенцијалном, скалом функција $\{q_\nu\}$, тј. облика

$$\frac{c_0(x)}{q_0(x)} + \frac{c_1(x)}{q_1(x)} + \frac{c_2(x)}{q_2(x)} + \ldots, \quad x \to \infty .$$

$c_\nu(x)$ су периодичке функције а низ функција скале $\{q_\nu\}$ мора задовољавати следећа два услова:

(1.3.1) $$q_\nu(x) \neq 0,$$

и $$\nu = 0, 1, 2, \ldots$$

(1.3.2) $$\frac{q_\nu(x)}{q_{\nu+1}(x)} \to 0, \quad x \to \infty .$$

Целисходност ових генерализација огледа се у првом реду у томе уколико су и које операције са таквим асимптотским редовима дозвољене. Тако већ множење код општих скала долази у питање, јер формалним множењем добијамо производе облика $(q_\chi q_\varkappa)^{-1}$ који сами не морају имати асимптотски развитак по скали $\{q_\nu\}$. Због тога Шмит издваја из општих скала оне које, например, дозвољавају множење, тј. код којих за свако χ, $\varkappa = 0, 1, \ldots$ важи

(1.3.3) $$[q_\chi(x)\, q_\varkappa(x)]^{-1} \sim \sum \frac{q_{\nu\chi\varkappa}}{q_\nu(x)},$$

затим оне који дозвољавају диференцирање, итд.

Тиме је питање примене основних операција и на асимптотске редове по општим скалама решено. Међутим, сложеније операције, на пример, општи гранични прелаз примењен на асимптотске редове, нису досада ни код асимптотских редова са потенцијалном скалом испитивани, ако се изузме случај униформних асимптотских редова, тј. таквих код којих сваки гранични прелаз (1.2.2) важи униформно. Ми ћемо се овде бавити и таквим сложенијим операцијама примењеним на асимптотске редове по општим скалама. Прецизније, испитаћемо услове под којим се на линеарну трансформацију датог асимптотског реда сме применити општи гранични прелаз.

II ПРОБЛЕМАТИКА И РЕЗУЛТАТИ

2.1. Под *функционелом* подразумева се функционална трансформација која сваком елементу $f(x)$ (свакој тачки) функционалног простора F придодаје одређен број $A[f]$ тела реалних или комплексних бројева K. Функционела је *линеарна* ако је

$$A[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 A[f_1] + c_2 A[f_2]$$

за свако

$$f_1 \text{ и } f_2 \in F \text{ и за свако } c_1 \text{ и } c_2 \in K.$$

Функционела је *ограничена* ако је (горња граница)

$$\sup |A[f]|$$

коначна за свако $f \in F$ за које је норма $\|f\| \leqslant 1$. Ако ову горњу границу обележимо са M_A тада је за свако $f \in F$

$$|A[f]| \leqslant M_A \cdot \|f\|.$$

Нека је F_c простор свих у размаку (a, b) непрекидних функција у коме је норма дефинсана са

$$\|f\| = \operatorname*{Max}_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Ф. Рис [19] је показао да свакој линеарној и ограниченој функционели $A[f]$ дефинисаној у простору F_c одговара одређена функција ограничене варијације $\alpha(x)$ (иста за свако f), тако да се линеарна функционела $A[f]$ да претставити Стилтјесовим интегралом

$$A[f] = \int_a^b f(t)\, d\alpha(t).$$

При томе је

$$M_A = \int_a^b |d\alpha(t)|.$$

$\alpha(x)$ је генератриса линеарне функционеле $A[f]$. Размак (a, b) може бити и бесконачан. — Сличне тврдње постоје и за друге функционалне просторе, на пример за простор L-интеграбилних функција.

Ф. Рис [19] је дао и један значајан став о граничном процесу код низа линеарних функционела у простору F_c. Наиме, нека су $A_1[f], A_2[f], \ldots, A[f]$ линеарне и ограничене функционеле и нека су $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha(x)$ њихове генератисе које задовољавају услов

$$\alpha_1(a) = \alpha_2(a) = \ldots = \alpha(a) = 0.$$

Да би тада

$$A_n[f] \to A[f], \quad n \to \infty$$

за сваку функцију f која припада F_c, потребно је и довољно да

1^0 $$\alpha_n(b) \to \alpha(b), \quad n \to \infty;$$

2^0 $$\int_a^x \alpha_n(t)\, dt \to \int_a^x \alpha(t), \quad n \to \infty, \quad a < x \leqslant b;$$

3^0 да варијација генератрисе $\alpha_n(x)$ остане ограничена, тј.

$$W_a^b\{\alpha_n(x)\} = O(1), \quad n \to \infty.$$

2.2. Проблематика овог рада односи се на развијање линеарних функционела

$$A_n[f]=\int_0^\infty f(t)\,d\alpha_n(t), \tag{2.2.1}$$

где n не мора бити цео позитиван број, у асимптотске редове $(n\to\infty)$, и то по општим скалама. Прецизније, које потребне и довољне услове мора задовољавати генератриса $\alpha_n(t)$, да би линеарна функционела $A_n[f]$ имала асимптотски развитак по скали $\{q_\nu(n)\}$, тј.

$$A_n[f]\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{q_\nu(n)},\quad n\to\infty, \tag{2.2.2}$$

где је

$$c_\nu=\int_0^\infty f(t)\,d\pi_\nu(t),\quad \nu=0,1,\ldots \tag{2.2.3}$$

Сукцесивном применом напред наведеног Рисовог става налазимо да је за то потребно и довољно да

$$1^0\quad \int_0^x \alpha_n(t)\,dt\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{q_\nu(n)}\int_0^x\pi_\nu(t)\,dt,\quad n\to\infty,\quad x>0;$$

$$2^0\quad \lim_{t=\infty}\left\{q_k(n)\left[\alpha_n(t)-\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{\pi_\nu(t)}{q_\nu(n)}\right]\right\}\to\lim_{t=\infty}\pi_k(t);\quad k=0,1\ldots$$
$$n\to\infty$$

$$3^0\quad W_0^\infty\left\{q_k(n)\left[\alpha_n(t)-\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{\pi_\nu(t)}{q_\nu(n)}\right]\right\}=O(1),\quad n\to\infty;\quad k=0,1,\ldots$$

Самим тиме што овај став важи за сваку функцију $f\in F_c$, у њему су садржана знатна ограничења за генератрису $\alpha_n(x)$ линеарне функционеле, тј. класа ових је прилично уска. О томе говори већ сама чињеница да генератриса $\alpha_n(x)$ мора бити таква да конвергира не само (2.2.1) за свако позитивно n, већ да конвергирају и сви несвојствени Стилтјесови интеграли (2.2.3) $(\nu=0,1\ldots)$. Међутим, баш у применама, конвергенција ових последњих долази у питање. Зато се поставља проблем да се на неки начин прошири класа линеарних функционела на које се може применити горњи став. У том погледу може се ићи у два правца. Или, класу линеарних функционела проширити на уштрб њеног дефиниционог поља, тј. сузити функционални простор F_c, или, што је од већег интереса, а за конкретну примену шта више и неизбежно, проширити појам саме линеарне функционеле. Ово на тај начин, што би се уместо конвергентних линеарних функционела, увео појам A-збирљивих линеарних фуикционела, тј. таквих које се осни-

вају на Абеловом збиру несвојствених Стилтјесових интеграла и код којих постоји

$$\lim_{\sigma=+0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha_n(t).$$

Аналогни став за развијање A-збирљивих линеарних функционела у асимптотске редове, почиваће на ставу који је сличан Рисовом ставу о граничном прелазу, али се односи на A-збирљиве линеарне функционеле.

Нека је

$$A_n[\sigma, f] = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha_n(t), \quad \sigma > 0,$$

што можемо написати и у облику

$$A_n[\sigma, f] = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\beta_n(\sigma'', t), \quad \sigma = \sigma' + \sigma'',$$

где је

$$\beta_n(\sigma'', t) = \int_0^t e^{-\sigma''\xi}\, d\alpha_n(\xi).$$

Ако онда функција $e^{-\sigma x} f(x)$ и генератриса $\beta_n(\sigma, x)$ испуњавају услове $1^0 - 3^0$ Рисовог става, и то за свако $\sigma > 0$, тада ће

$$A_n[\sigma, f] \underset{n\to\infty}{\to} A[\sigma, f] = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha(t) \tag{2.2.4}$$

и то за свако $\sigma > 0$ и за сваку непрекидну функцију $f(x)$, за коју

$$e^{-\sigma x} f(x) \to 0, \quad n \to \infty \text{ за свако } \sigma > 0.$$

Претпоставимо ли да оба израза који се јављају у (2.1.4) имају граничну вредност када $\sigma \to +0$, тј.

$$\lim_{\sigma=+0} A_n[\sigma, f] = A_n[+0, f]$$

и

$$\lim_{\sigma=+0} A[\sigma, f] = A[+0, f],$$

тада се основно питање састоји у томе под којим ће условима

$$A_n[+0, f] \to A[+0, f], \quad n \to \infty.$$

На овако општем ставу почивало би асимптотско развијање A-збирљивих линеарних функционела. Изгледа да у природи не лежи да се дају потребни и довољни услови под којим овакав став важи и стога овде дајемо извесне довољне услове, и то претпостављајући да функција $f(x)$ има специјалну структуру

$$f(x) = e^{-i\tau x} \psi(x)$$

и функција $\psi(x)$ задовољава извесне услове које ћемо накнадно навести.

Прецизније, проблем који ћемо овде третирати, а који ћемо одмах формулисати за асимтотске редове, своди се на питање под којим условима ће A-збирљива линеарна функционела

$$\mathfrak{A}[e^{-i\tau t}\psi(t)] = \lim_{\sigma=+0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t}\psi(t)\, d\varphi(t;\lambda),$$

чија генератриса $\varphi(t;\lambda)$ допушта асимтотски развитак по општој скали $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\varphi(t;\lambda) = \sum_{\mu=0}^{l} \frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{2.2.5}$$

сама имати асимтотски развитак по скали $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\mathfrak{A}[e^{-i\tau t}\psi(t)] = \sum_{\mu=0}^{l} \frac{P_\mu(\tau)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{2.2.6}$$

где се коефицијенти

$$P_\mu(\tau) = \lim_{\sigma=+0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t}\psi(t)\, d p_\mu(t), \quad \mu = 0,1,\ldots,l, \tag{2.2.7}$$

израчунавају формалном применом операције

$$\lim_{\sigma=+0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t}\psi(t)\, d\{\ \} \tag{2.2.8}$$

члан по члан на асимптотски развитак језгра $\varphi(t;\lambda)$.

2.3. Да би прегнатније могли формулисати услове под којим важи горе наведено тврђење, претходно ћемо дефинисати једну класу функција и прецизирати извесне појмове.

Са Ω_h^m означићемо класу функција облика

$$F(t) = \omega_0(t)\pi_m(t) + \omega_1(t)\pi_{m-1}(t) + \ldots + \omega_m(t), \tag{Ω_h^m}$$

где су $\pi_\mu(t)$ полиноми μ-тог степена по t, а $\omega_\mu(t)$ периодичке функције периоде $h > 0$. Специјално када $\omega_\mu(t)$ дегенеришу у константе, класа Ω_h^m се своди на класу полинома m-тог степена.

За функцију $\psi(t)$ казаћемо да припада класи Θ_t ако се може приказати Лаплас-Стилтјесовим интегралом

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, d\alpha(u), \quad t \geqslant 0,$$

где је $\alpha(t)$ ограничене варијације у $(0,\infty)$. Слично дефинишемо класу Θ_ν и код низова

$$a_\nu = \int_0^\infty e^{-\nu u}\, d\alpha(u), \quad \nu = 0,1,\ldots$$

Специјално ако је $\psi(t)$ тотално монотона функција у размаку $(0,\infty)$, тј. ако је

$$(2.3.1)\qquad \Delta_h^k \psi(t)=\psi(t)-\binom{k}{1}\psi(t+h)+\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}\psi(t+kh)\geqslant 0$$

за свако цело позитивно k и за свако $h>0$, тада она припада класи Θ_l. Наиме, на основу једног Хаусдорфовог [10] става, класа тотално монотоних функција је еквивалентна са класом функција које се могу приказати Лаплас-Стилтјесовим интегралом наведеног облика са позитивним неопадајућим језгром $\alpha(t)$. – Аналогно важи за тотално монотоне низове a_ν код којих је (2.3.1) (са $a_\nu=a(\nu)$) испуњено за свако цело позитивно k и за $h=1$.

2.4. Сада ћемо формулисати услове под којим важи асимптотски развитак (2.2.6) са (2.2.7).

Нека $\psi(t)$ припада класа Θ_l и нека коефицијенти $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ асимптотског развитка (2.2.5) припадају класи Ω_h^m. Ако тада постоји цео број $K>m$ тако да је

$$(2.4.1)\qquad \int_0^\infty |d\{\Delta_h^K\varphi(t-Kh;\lambda)\}| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

важиће (2.2.6), и то униформно по τ у размаку $(2s\pi/h+\varepsilon, 2(s+1)\pi/h-\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Нешто прецизиније и за примену погодније услове добијамо ако, задржавајући остале претпоставке, уместо услова (2.4.1) захтевамо да варијација W K-те диференције функције $\varphi(t;\lambda)$ задовољава у размаку $(0,T)$ услов

$$W_0^T\{\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)\}<\frac{M}{q_l(\lambda)},\quad M \text{ не зависи од } \lambda,$$

и ако за $t\geqslant T$ и $\lambda\geqslant\Lambda$

$$\Delta_h^K\varphi(t;\lambda) \text{ монотоно } \to 0 \text{ када } t\to\infty.$$

Како је функционела $\mathfrak{A}[e^{-i\tau t}\psi(t)]$ дефинисана Стилтјесовим интегралом, то одавде следе аналогни ставови за A-збирљиве Дирихлеове редове

$$\lim_{\sigma=0}\sum_{\sigma=0}^{\infty} a_\nu^* b_\nu(\lambda)\, e^{-(\sigma+i\tau)\lambda_\nu},\quad (\lambda_\nu\nearrow\infty),$$

па специјално и за A-збирљиве тригонометриске редове

$$\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(\lambda)\, r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

За ове последње формулисаћемо одговарајуће ставове за асимптотско развијање. — Нека низ a_ν, $\nu=0,1,\ldots$ припада класи Θ_ν и нека низ $b_\nu(\lambda)$, $\nu=0,1,\ldots$ допушта асимптотски развитак по општој скали $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$(2.4.2)\qquad b_\nu(\lambda)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(\nu)}{q_\mu(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где су коефицијенти $p_\mu(\nu)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ полиноми степена m по ν. Ако је за неко цело $K>m$

$$(2.4.3)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}|\Delta^{K+1}b_{\nu-K-1}(\lambda)|=o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

тада за $0<\theta<2\pi$ постоји гранична вредност

$$\lim_{r=1}\sum_{r=0}^{\infty}a_\nu b_\nu(\lambda)\,r^\nu e^{\nu\theta i}=\mathfrak{B}\{b_\nu(\lambda)\},$$

и асимптотски развитак од $\mathfrak{B}\{b_\nu(\lambda)\}$ добија се формалном применом операције

$$\mathfrak{B}\{\ \}=\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\{\ \}\,r^\nu e^{\nu\theta i}$$

члан по члан на асимптотски развитак (2.4.2). Добијени асимптотски развитак важи униформно по θ у $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant2\pi-\varepsilon$.

Специјално можемо, задржавајући остале претпоставке, уместо (2.4.3) захтевати да за $\lambda\geqslant\Lambda$ и $\nu\geqslant\nu_0$ K-та диференција $\Delta^K b_\nu(\lambda)$ монотоно тежи нули, тј.

$$(2.4.4)\qquad \Delta^K b_\nu(\lambda)\geqslant\Delta^K b_{\nu+1}(\lambda)\to0,\quad \nu\to\infty.$$

Први став ове врсте дао је за тригонометриске редове Карамата [**12** *a*], претпостављајући тоталну монотонију низа a_ν и услов (2.4.4), и тиме потстакао и овај наш рад.

Ако функција $\varphi(t;\lambda)$ има R-интеграбилан извод $\chi(t;\lambda)$ по t, добијамо аналогне ставове за Риманове интеграле. За примену је нарочито од интереса случај када функција $\chi(t;\lambda)$ има изводе по t до реда K и $(-1)^K\partial\chi(t;\lambda)/\partial t^K$ монотоно тежи нули, а коефицијенти $p_\mu(t)$ асимптотског развитка функције $\int_0^t\chi(u;\lambda)\,du$ су полиноми по t. Тада област важења добивеног асимптотског развитка садржи само једну изузетну тачку $\tau=0$.

2.5. Изложена метода асимптотског развијања доводи с једне стране до нових асимптотских развитака, а с друге стране обједи-

њује различите асимптотске развитке једне исте функције, који су до сада, углавном, добијани применом различитих метода. Наиме, ако је једном утврђено да се на дати ред или интеграл сме применити поступак, онда је са (2.2.5) и (2.2.6) у ствари дато пресликавање асимптотских развитака, тј. сваком асимптотском развитку функције $\varphi(t;\lambda)$ одговара један развитак функције $\mathfrak{A}[e^{-i\tau t}\psi(t)]$.

У последњем делу овог рада применили смо нашу методу на ултрасферне полиноме $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, $0<\theta<\pi$, за $n\to\infty$. Полазна тачка је тригонометриски ред [**23** *b*; **1**]

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}\,\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}\sin(n+2\nu+1)\theta,$$

где су уведене ознаке

$$(x)^{(\nu)}=x(x+1)\ldots(x+\nu-1),\quad (x)^{(0)}=1;$$
$$(x)_{(\nu)}=x(x-1)\ldots(x-\nu+1),\quad (x)_{(0)}=1. \tag{2.5.1}$$

Развијајући $\dfrac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}$, $\nu=0,1,\ldots$ по различитим скалама (α, β, γ параметри)

$$\frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}}=$$

$$=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}\binom{\nu-\alpha}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}+o(n^{-\lambda-k}),$$

$$=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{k}\binom{\beta-\nu}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}}+o(n^{-\lambda-k}),$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda)}{(n+\gamma)^{\lambda}}\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!}\,\frac{Q_{\mu}^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{(n+\gamma)^{\mu}}+o(n^{-\lambda-k}),$$

где је $Q_{\mu}^{(\lambda)}$ дефинисано са

$$e^{yx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{Q_{\mu}^{(\lambda)}(y)}{\mu!}x^{\mu},$$

добијамо за функцију $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ следеће асимптотске развитке:

$$1^0 \quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}.$$

$$(2.5.2) \qquad \cdot\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}\,(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\,\mu!}f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)+o\,(n^{\lambda-k-1}),$$

где је

$$f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)+J\left\{\frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\lambda+1}}F(-\mu,\ \alpha;\ \lambda-\mu;\ 1-e^{-2\theta i})\right\},\ ^{*)}$$

(α параметар; F хипергеометриска функција).

$$2^0 \quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}.$$

$$(2.5.3) \qquad \cdot\sum_{\mu=0}^{k}\frac{(\lambda)^{(\mu)}\,(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\beta)_{(\mu)}}g_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)+o\,(n^{\lambda-k-1}),$$

где је

$$g_n^{(\lambda)}(\theta)=J\left\{i\,\frac{e^{[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\,\pi/2]\,i}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}F(-\mu,\ \lambda-\beta-1;\ \lambda-\mu;\ 1-e^{2\theta i})\right\},$$

(β параметар; F хипергеометриска функција).

$$3^0 \quad P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}.$$

$$(2.5.4) \qquad \cdot\sum_{\mu=0}^{k}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\gamma)^{\mu+\lambda}}J\{e^{(n+1)\theta i}\,h_{\mu}^{(\lambda)}(e^{2\theta i})\}+o\,(n^{\lambda-k-1}),$$

где је $h_{\mu}^{(\lambda)}(z)$ дефинисано са

$$e^{(1-\gamma)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda}(1-z\,e^x)^{\lambda-1}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{h_{\mu}^{(\lambda)}(z)}{\mu!}x^{\mu}.$$

Асимптотски развици 1^0-3^0 важе униформно у размаку $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$.

За специјалне вредности параметара α, β, γ ($\alpha=0$, $\beta=\lambda-1$, $\gamma=0$) асимптотски развици 1^0-3^0 своде се на познате развитке ултрасферних полинома (в. Сеге [**23***a*, стр. 191 и 206]).

*) $R\{z\}$ и $J\{z\}$ су реални одн. имагинарни део од z.

У тачки 4.5 дајемо асимптотски развитак интеграла

$$Z_\nu(\tau, x) = \int_0^\infty e^{i\tau t}\, t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2} dt, \quad -1/2 < \nu < 1/2,$$

када је $x \to \infty$. Специјално за $\tau = 1$ следе одавде асимптотски развици ($x \to \infty$) за Ханкелове функције $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$.

Најзад у тачки 4.6 изводимо познати Стирлингов образац за функцију $\Gamma(x)$, $x \to \infty$.

III ДОКАЗИ СТАВОВА

3.1. Претходно ћемо доказати неколико лема да доцније не би прекидали излагање.

Лема 1. *Нека су* $\alpha(t)$ *и* $\beta(t)$ *ограничене варијације у размаку* (a, b) *и нека је* $f(t)$ *S-интеграбилна у односу на* $\alpha(t)$ *и* $\beta(t)$. *Тада из*

$$f(t) \geqslant 0 \quad за \quad a \leqslant t \leqslant b$$

следи

$$\left| \int_a^b f(t)\,|\,d\alpha(t)\,| - \int_a^b f(t)\,|\,d\beta(t)\,| \right| \leqslant \int_a^b f(t)\,|\,d\{\alpha(t)-\beta(t)\}\,|.$$

Доказ. Пре свега, $f(t)$ је S-интеграбилна и у односу на $\alpha(t)-\beta(t)$, јер је тада и функција $\alpha(t)-\beta(t)$ ограничене варијације, а од дисконтинуитета може имати највише све дисконтинуитете функција $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, који се, према претпоставци, не поклапају са дисконтинуитетима функције $f(t)$. С друге стране (в. Карамата [12 *b*, стр. 54—55]), функција $f(t)$ интеграбилна је и у односу на тоталну варијацију функција $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\alpha(t)-\beta(t)$, тј.

$$S_n^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)\,|\,\alpha(t_\nu)-\alpha(t_{\nu-1})\,| \to \int_a^b f(t)\,|\,d\alpha(t)\,|,$$

$$S_n^{(\beta)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)\,|\,\beta(t_\nu)-\beta(t_{\nu-1})\,| \to \int_a^b f(t)\,|\,d\beta(t)\,|,$$

$$S_n^{(\alpha-\beta)} = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)\,|\,\alpha(t_\nu)-\beta(t_\nu)-\alpha(t_{\nu-1})+\beta(t_{\nu-1})\,| \to$$

$$\to \int_a^b f(t)\,|\,d\{\alpha(t)-\beta(t)\}\,|,$$

када при подели

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b \qquad \text{размака } (a,b)$$

и

$$t_{\nu-1}\leqslant\tau_\nu\leqslant t_\nu,\ \nu=1,2,\ldots,n,$$

дужина највећег размака

$$\delta_n=\operatorname*{Max}_{1\leqslant\nu\leqslant n}\{t_\nu-t_{\nu-1}\}\to 0,\quad n\to\infty,$$

тако да све тачке дисконтинуитета функција $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ падну у подеоне тачке.

Ако онда у

$$S_n^{(\alpha-\beta)}\geqslant\sum_{\nu=1}^{n}f(\tau_\nu)\Big|\,|\alpha(t_\nu)-\alpha(t_{\nu-1})|-|\beta(t_\nu)-\beta(t_{\nu-1})|\,\Big|\geqslant\left|S_n^{(\alpha)}-S_n^{(\beta)}\right|$$

извршимо гранични прелаз $n\to\infty$, следи тврђење леме 1.

Лема 2. *Нека је функција $\Phi(t)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и $\Phi(t)=\Phi(0)$ за $t<0$. За неко фиксирано $h>0$ и $r=1,2,\ldots$ ставимо*

$$\Delta_h^r\,\Phi(t)=\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\binom{r}{\nu}\Phi(t+\nu h).$$

Тада из

$$\int_0^T|d\{\Delta_h^r\,\Phi(t-rh)\}|<M\,T^m,\quad m=0,1,\ldots, \tag{3.1.1}$$

следи

$$\int_0^T|d\,\Phi(t)|<M\,T^{m+r}. \tag{3.1.2}$$

Константа M не зависи од T.

Доказ потпуном индукцијом. Константа M не мора бити иста на сваком месту где се појављује.

(i) Нека је $r=1$. На основу леме 1 следи тада из (3.1.1)

$$\begin{aligned}MT^m&>\int_0^T|\alpha\{\Phi(t-h)-\Phi(t)\}|\geqslant\\&>\left|\int_0^T|d\,\Phi(t-h)|-\int_0^T|d\,\Phi(t)|\right|=\\&>\int_{T-h}^{T}|d\,\Phi(t)|.\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Одредимо цео број n тако да је

$$(n-1)\,h < T \leqslant n\,h. \tag{3.1.4}$$

Тада је на основу (3.1.3)

$$\int_0^T |d\,\Phi(t)| \leqslant \int_0^h + \int_h^{2h} + \ldots + \int_{(n-1)h}^{nh} <$$

$$< M\,h^m \{\, 1^m + 2^m + \ldots + n^m \,\} <$$

$$< M\,n^{m+1}.$$

Међутим, према (3.1.4)

$$n = \frac{T+\eta}{h}, \quad 0 \leqslant \eta < h,$$

те је

$$\int_0^T |d\,\Phi(t)| < M\left(\frac{T+\eta}{h}\right)^{m+1} < M\,T^{m+1}. \tag{3.1.5}$$

(ii) Претпоставићемо да тврђење важи за једно $r \geqslant 1$, па ћемо доказати да оно тада важи и за $r+1$. Заиста, нека је

$$\int_0^T |d\,\{\Delta_h^{r+1}\,\Phi\,[t-(r+1)\,h]\}| < M\,T^m.$$

Тада, слично као под (i), добијамо аналогон обрасца (3.1.3)

$$\int_{T-h}^{T} |d\,\{\,\Delta_h^r\,\Phi\,(t-r\,h)\,\}| < M\,T^m,$$

а одавде, на исти начин као што смо под (i) извели образац (3.1.5)

$$\int_0^T |d\,\{\,\Delta_h^r\,\Phi\,(t-r\,h)\,\}| < M\,T^{m+1}.$$

Међутим, по претпоставци, тврђење важи за r, те из последње неједначине следи

$$\int_0^T |d\,\Phi(t)| < M\,T^{m+1+r}$$

што је требало доказати.

Лема 3. *Нека је* $\Phi(t)$ *ограничене варијације у сваком коначном размаку и* $\Phi(t)=\Phi(0)$ *за* $t<0$.

Ако је за фиксирано $h>0$ *и једно* $k\ (=1,2,\ldots)$.

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh)\}|<\infty, \tag{3.1.6}$$

тада за $R[z]>0$ *важи*

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,d\,\Phi(t)=(e^{-hz}-1)^{-k}\int_0^\infty e^{-zt}\,d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh)\}. \tag{3.1.7}$$

Доказ. Полазимо од идентитета

$$(e^{-hz}-1)^k\int_0^T e^{-zt}\,d\,\Phi(t)= \tag{3.1.8}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}e^{-(k-\nu)hz}\int_0^{T-(k-\nu)h} e^{-zt}\,d\,\Phi(t)+R_k(T),$$

где је

$$R_k(T)=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}e^{-(k-\nu)hz}\int_{T-(k-\nu)h}^{T} e^{-zt}\,d\,\Phi(t). \tag{3.1.9}$$

Ако у првој суми на десној страни у (3.1.8) ставимо $t+(k-\nu)h\,|\,t$ и водимо рачуна да је $\Phi(t)=\Phi(0)$ за $t<0$, добијамо

$$(e^{-hz}-1)^k\int_0^T e^{-zt}\,d\,\Phi(t)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\int_0^T e^{-zt}\,d\{\Phi[t-(k-\nu)h]\}+R_k(T)= \tag{3.1.10}$$

$$=\int_0^T e^{-zt}\,d\{\Delta_h^k\Phi(t-kh)\}+R_k(T).$$

Међутим,

$$|R_k(T)| \leqq \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} e^{-(k-\nu)h\,R[z]} \int_{T-(k-\nu)h}^{T} e^{-R[z]\,t}\,|d\Phi(t)| <$$

$$< \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} e^{-R[z]\,T} \int_{T-(k-\nu)h}^{T} |d\Phi(t)| <$$

$$< 2\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \cdot e^{-R[z]\,T} \int_{0}^{T} |d\Phi(t)|,$$

а на основу леме 2

$$|R_k(T)| < M\,T^k\,e^{-R[z]\,T}.$$

На основу ове процене за $R_k(T)$ следи тада из (3.1.10), када $T \to \infty$, тврђење леме 3.

Лема 4. *Опште решење диференцне једначине*

$$\Delta_h^k f(t) = 0, \quad h > 0,$$

дато је са

$$f(t) = \omega_1(t)\,\pi_{k-1}(t) + \omega_2(t)\,\pi_{k-2}(t) + \ldots + \omega_k(t), \tag{3.1.11}$$

где су π_μ полиноми степена μ по t, а $\omega_\mu(t)$ периодичке функције периоде h.

За функције облика (3.1.11) *казаћемо да припадају класи* Ω_h^{k-1}.

Доказ потпуном индукцијом.

(i) За $k=1$ тврђење је тривијално. За $k=2$, једно решење диференцне једначине

$$\Delta_h^2 f(t) \equiv \Delta_h f(t) - \Delta_h f(t+h) = 0$$

је полином првог степена по t, $\pi_1(t)$, тј.

$$\Delta_h\,\pi_1(t) - \Delta_h\,\pi_1(t+h) = 0.$$

Ако са $F(t)$ означимо ма које друго решење, онда је количник $\Delta_h F(t)/\Delta_h \pi_1(t)$ због

$$\frac{\Delta_h F(t)}{\Delta_h\,\pi_1(t)} = \frac{\Delta_h F(t+h)}{\Delta_h\,\pi_1(t+h)},$$

периодична функција периоде h, $\omega_1(t)$, тј.

$$\Delta_h F(t) = \omega_1(t)\,\Delta_h \pi_1(t)$$

или

$$F(t) - F(t+h) = \omega_1(t)\{\pi_1(t) - \pi_1(t+h)\}.$$

Ако ово напишемо у облику

$$F(t) - \omega_1(t)\,\pi_1(t) = F(t+h) - \omega_1(t+h)\,\pi_1(t+h),$$

увиђамо да је и $F(t) - \omega_1(t)\,\pi_1(t)$ периодична функција периоде h, одакле следи

$$F(t) = \omega_1(t)\,\pi_1(t) + \omega_2(t).$$

(ii) Претпоставимо да тврђење важи за једно одређено k. Тада из

$$\Delta_h^{k+1} f(t) \equiv \Delta_h^k \{\Delta_h f(t)\} = 0,$$

према претпоставци, следи

$$\Delta_h f(t) = \omega_1(t)\,\pi_{k-1}(t) + \omega_2(t)\,\pi_{k-2}(t) + \ldots + \omega_k(t).$$

Међутим, ако ово напишемо у облику

$$\Delta_h f(t) = \omega_1(t)\,\Delta_h \pi_k^*(t) + \omega_2(t)\,\Delta_h \pi_{k-1}^*(t) + \ldots + \omega_h(t)\,\Delta_h \pi_1^*(t),$$

односно

$$f(t) - \omega_1(t)\,\pi_k^*(t) - \ldots - \omega_k(t)\,\pi_1^*(t) =$$

$$= f(t+h) - \omega_1(t+h)\,\pi_k^*(t+h) - \ldots - \omega_k(t+h)\,\pi_1^*(t+h),$$

увиђамо да је

$$f(t) - \omega_1(t)\,\pi_k^*(t) - \ldots - \omega_k(t)\,\pi_1^*(t) = \omega_{k+1}(t),$$

где је $\omega_{k+1}(t)$ периодична функција периоде h.

3.2. У овој и следећој тачки извешћемо основне ставове 3 и 6 у којима је садржано тврђење (2.1.3) о инверзији асимптотике и операције (2.2.8). У оба случаја претходно доказујемо извесне прелиминарне ставове.

Став 1. *Нека је* $\Phi(t;\lambda)$ *ограничене варијације у сваком коначном размаку и*

$$\Phi(t;\lambda) = \Phi(0;\lambda) \quad \textit{за } t < 0$$

и нека

$$\Phi(t;\lambda) \to \Phi(t), \quad \lambda \to \infty \quad \textit{за } t \geqslant 0. \tag{3.2.1}$$

Ако су k-те диференције $\Delta_h^k \Phi(t;\lambda)$ *и* $\Delta_h^k \Phi(t)$ $(h>0)$ *ограничене варијације у размаку* $(0,\infty)$, *тј.*

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh;\lambda)\}| < \infty,$$

(3.2.2)

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t-kh)\}| < \infty$$

и

(3.2.3) $$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^k[\Phi(t-kh;\lambda)-\Phi(t-kh)]\}| \to 0, \quad \lambda\to\infty,$$

тада

1° *за* $\sigma>0$ *конвергирају интеграли*

$$F(\sigma,\tau;\lambda)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\,\Phi(t;\lambda),$$

$$F(\sigma,\tau)=\int^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}d\,\Phi(t);$$

2° *за* $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ *постоје граничне вредности*

$$\lim_{\sigma=0} F(\sigma,\tau;\lambda)=F(\tau;\lambda),$$

$$\lim_{\sigma=0} F(\sigma,\tau)=F(\tau);$$

3°

$$F(\tau;\lambda)\to F(\tau), \quad \lambda\to\infty,$$

униформно за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Доказ. На основу леме 3 је

$$F(\sigma,\tau;\lambda)=[e^{-(\sigma+i\tau)h}-1]^{-k}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\,\{\Delta_h^k\,\Phi(t-kh;\lambda)\},$$

(3.2.4)

$$F(\sigma,\tau)=[e^{-(\sigma+i\tau)h}-1]^{-k}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\,\{\Delta_h^k\,\Phi(t-kh)\}.$$

Прво тврђење под 1° тада следи из (3.2.2), јер је

$$|F(\sigma,\tau;\lambda)|\leqslant|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\int_0^\infty|d\{\Delta_h^k\Phi(t-kh;\lambda)\}|.$$

Слично се доказује и друго.

Како интеграли у (3.2.4) конвергирају и за $\sigma=0$, то на основу Абелова става постоје граничне вредности $F(\tau,\lambda)$ и $F(\tau)$ за $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Да би доказали тврђење 3^0, ставимо

$$\Psi(t;\lambda)=\Phi(t;\lambda)-\Phi(t). \tag{3.2.5}$$

Тада је

$$|F(\sigma,\tau;\lambda)-F(\sigma,\tau)|\leqslant|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\int_0^\infty|d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}|,$$

и ако овде пустимо да $\sigma\to 0$ добијамо

$$|F(\tau;\lambda)-F(\tau)|\leqslant|e^{-i\tau h}-1|^{-k}\int_0^\infty|d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}|\leqslant$$

$$\leqslant\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k}\int_0^\infty|d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}|,$$

за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Према (3.2.3) је, дакле,

$$\limsup_{\lambda=\infty}|F(\tau;\lambda)-F(\tau)|\leqslant 0$$

униформно по τ у назначеним размацима. Тиме је завршен доказ става 1.

Уопштење става 1 даје следећи

Став 2. *Нека $\Phi(t;\lambda)$ и $\Phi(t)$ задовољавају услове става* 1 *и нека је за $t\geqslant 0$*

$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u), \tag{3.2.6}$$

где је $\alpha(t)$ ограничене варијације у размаку $(0,\infty)$.

Тада,

1^0 *за $\sigma>0$ конвергирају интеграли*

$$G(\sigma,\tau;\lambda)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\Phi(t;\lambda),$$

$$G(\sigma,\tau)=\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\Phi(t);$$

2^0 *за* $\tau \neq 2s\pi/h$, $s = 0, \pm 1, \ldots$ *постоје граничне вредности*

$$\lim_{\sigma = 0} G(\sigma, \tau; \lambda) = G(\tau; \lambda),$$

$$\lim_{\sigma = 0} G(\sigma, \tau) = G(\tau);$$

3^0

$$G(\tau; \lambda) \to G(\tau), \quad \lambda \to \infty,$$

униформно за $2s\pi/h + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/h$, $s = 0, \pm 1, \ldots$

Доказ. Ако $F(\sigma, \tau; \lambda)$ и $F(\sigma, \tau)$ означавају функције из става 1, тада је за $\sigma > 0$

$$G(\sigma, \tau; \lambda) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \left\{ \int_0^\infty e^{-tu} \, d\alpha(u) \right\} d\Phi(t; \lambda) =$$

$$= \int_0^\infty F(\sigma + u, \tau; \lambda) \, d\alpha(u) \tag{3.2.7}$$

и слично

$$G(\sigma, \tau) = \int_0^\infty F(\sigma + u, \tau) \, d\alpha(u).$$

Измена поретка интеграла је очигледно у оба случаја дозвољена.

Међутим, на основу леме 3 је

$$|F(\sigma + u, \tau; \lambda)| \leqslant |e^{-(\sigma+u+i\tau)h} - 1|^{-k} \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Phi(t - kh; \lambda)\}| \leqslant$$
$$\leqslant M(\lambda)(1 - e^{-\sigma h})^{-k},$$

и ова неједначина важи за $\sigma > 0$, $u \geqslant 0$ и τ произвољно. Према (3.2.7) је онда

$$|G(\sigma, \tau; \lambda)| \leqslant M(\lambda)(1 - e^{-\sigma h})^{-k} \int_0^\infty |d\alpha(u)|,$$

чиме је доказано прво тврђење под 1^0. Слично се доказује и друго.

Показаћемо сада да

$$G(\sigma, \tau; \lambda) \to \int_0^\infty F(u, \tau; \lambda) \, d\alpha(u) = G(\tau; \lambda), \quad \sigma \to 0. \tag{3.2.8}$$

У том циљу полазимо од

$$|G(\sigma, \tau; \lambda) - G(\tau; \lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^U |F(\sigma + u, \tau; \lambda) - F(u, \tau; \lambda)| \, |d\alpha(u)| +$$
$$+ \int_U^\infty |F(\sigma + u, \tau; \lambda)| \, |d\alpha(u)| + \int_U^\infty |F(u, \tau; \lambda)| \, |d\alpha(u)|, \tag{3.2.9}$$

где ћемо U одмах одредити. Нека је τ фиксирано и $\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$, а $\eta>0$, иначе произвољно. Тада је могуће изабрати U довољно велико тако да је

$$\int_U^\infty |F(\sigma+u,\tau;\lambda)|\,|d\alpha(u)|<\eta,$$

(3.2.10)

$$\int_U^\infty |F(u,\tau;\lambda)|\,|d\alpha(u)|<\eta.$$

Заиста, ако уочимо први интеграл, биће

$$|F(\sigma+u,\tau;\lambda)|\leqslant|e^{-(\sigma+u+i\tau)h}-1|^{-k}\int_0^\infty|d\{\Delta_h^k\Phi(t-kh;\lambda)\}|<$$

$$<M(\lambda)\left\{\frac{e^{(\sigma+u)h}}{2[\mathrm{ch}(\sigma+u)h-\cos\tau h]}\right\}^{k/2}<$$

$$<M(\lambda,\tau),$$

јер је функција

$$\frac{e^x}{\mathrm{ch}\,x-\cos y}$$

ограничена по x за $y\neq 2s\pi$. Према томе,

$$\int_U^\infty|F(\sigma+u,\tau;\lambda)|\,|d\alpha(u)|<M(\lambda,\tau)\int_U^\infty|d\alpha(u)|,$$

а овај последњи интеграл се за довољно велико U може учинити произвољно малим.— Слично се може показати да се, бирајући U довољно велико, може задовољити и друга неједначина у (3.2.10).

Што се тиче првог интеграла на десној страни у (3.2.9), примећујемо да је функција $F(x,\tau;\lambda)$ непрекидна по x за $x>0$, а према 2^0 става 2 и са десне стране у $x=0$ када је $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$. Према томе, она је униформно непрекидна по x у сваком коначном размаку $(0,X)$ када је $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$. Ако, дакле, у (3.2.9) пустимо да $\sigma\to 0$, добићемо

$$\limsup_{\sigma=0}\left|G(\sigma,\tau;\lambda)-G(\tau;\lambda)\right|<2\eta,$$

тј.

$$G(\sigma,\tau;\lambda)\to G(\tau;\lambda),\quad\sigma\to 0,$$

што претставља прво од тврђења под 2^0. — Слично се доказује и друго, тј. да

$$G(\sigma,\tau)\to\int_0^\infty F(u,\tau)\,d\alpha(u)=G(\tau),\quad\sigma\to 0. \tag{3.2.11}$$

Најзад, да би доказали тврђење 3^0 полазимо, на основу (3.2.8) и (3.2.11), од

$$G(\tau;\lambda) - G(\tau) = \int_0^\infty \{ F(u,\tau;\lambda) - F(u,\tau)\}\, d\alpha(u). \tag{3.2.12}$$

Са ознаком (3.2.5) је за довољно мало $\varepsilon > 0$ и $2s\pi/h + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h - \varepsilon$, $s = 0, \pm 1, \ldots$

$$|F(u,\tau;\lambda) - F(u,\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant |e^{-(u+i\tau)h} - 1|^{-k} \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}| \leqslant$$

$$\leqslant \left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k} \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}|.$$

Према томе,

$$|G(\tau;\lambda) - G(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k} \int_0^\infty |d\alpha(u)| \cdot \int_0^\infty |d\{\Delta_h^k \Psi(t-kh;\lambda)\}|$$

у назначеним размацима за τ. Кад овде пустимо да $\lambda \to \infty$ непосредно следи тврђење 3^0, чиме је став 2 у потпуности доказан.

Сада смо у стању да из става 2 изведемо централни став о асимптотском развијању.

Став 3. *Нека је*

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, d\alpha(u), \quad t \geqslant 0, \tag{3.2.13}$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0, \infty)$.

Нека функција $\varphi(t;\lambda)$ *има за* $t \geqslant 0$ *асимптотски развитак по општој скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\varphi(t;\lambda) = \frac{p_0(t)}{q_0(\lambda)} + \frac{p_1(t)}{q_1(\lambda)} + \ldots + \frac{p_l(t)}{q_l(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.2.14}$$

где функције $p_\mu(t)$, $\mu = 0, 1, \ldots, l$ *припадају класи* Ω_h^m.

Ако је за неко цело $K > m$

$$\int_0^\infty |d\{\Delta_h^K \varphi(t-Kh;\lambda)\}| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.2.15}$$

тада,

1° *за* $\tau \neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ *постоји гранична вредност*

$$g(\tau;\lambda)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda);$$

2° $g(\tau;\lambda)$ *има асимптотски развитак по скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$g(\tau;\lambda)=\frac{P_0(\tau)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\tau)}{q_1(\lambda)}+\ldots+\frac{P_l(\tau)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где је

$$P_\mu(\tau)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,dp_\mu(t),\quad \mu=0,1,\ldots,l.$$

Овај развитак је униформан за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Доказ следи непосредно из става 2 ако у овом за функцију $\Phi(t;\lambda)$ узмемо

$$\Phi(t;\lambda)=q_l(\lambda)\left\{\varphi(t;\lambda)-\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)}\right\}.$$

Показаћемо да тако изабрана функција $\Phi(t;\lambda)$ задовољава све услове става 2. Пре свега, из (3.2.14) следи да

(3.2.16) $$\Phi(t;\lambda)\to 0,\quad \lambda\to\infty \quad \text{за } t\geqslant 0,$$

тј. овде је

$$\Phi(t)\equiv 0.$$

С друге стране, како је цео позитиван број $K>m$, а коефицијенти $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ припадају класи Ω_h^m, то је на основу леме 4,

(3.2.17) $$\Delta_h^K\Phi(t;\lambda)=q_l(\lambda)\,\Delta_h^K\varphi(t;\lambda),$$

те је са (3.2.15) испуњен и последњи услов (3.2.5) става 2.

Због $\Phi(t)\equiv 0$, биће и функција $G(\tau)$ става 5 идентички једнака нули, те, према 3° става 2,

$$G(\tau;\lambda)\to 0,\quad \lambda\to\infty,$$

униформно за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ Одавде, ако уведемо експлицитни израз за функцију $\Phi(t;\lambda)$, следи

$$q_l(\lambda)\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\left\{\varphi(t;\lambda)-\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)}\right\}\to 0,\quad \lambda\to\infty,$$

односно

$$q_l(\lambda)\left\{g(\tau;\lambda)-\sum_{\mu=0}^{l}\frac{P_\mu(\tau)}{q_\mu(\lambda)}\right\}\to 0,\quad \lambda\to\infty,$$

што претставља тврђење става 3.

3.3. У овој тачки извешћемо став 6 који даје нешто прецизније и за примену погодније услове неголи став 3. Претходно ћемо доказати два прелазна става, аналогоне ставова 1 и 2.

Став 4. *Нека је* $\Phi(t;\lambda)$ *ограничене варијације у сваком коначном размаку и*

$$\Phi(t;\lambda)=\Phi(0;\lambda)\quad за\quad t<0$$

и нека

(3.3.1) $$\Phi(t;\lambda)\to\Phi(t),\quad \lambda\to\infty\quad за\quad t\geqslant 0.$$

Ако је у размаку $(0,T)$ *k-та диференција* $(h>0)$ *функције* $\Phi(t;\lambda)$ *униформно ограничене варијације, тј.*

(3.3.2) $$W_0^T\{\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)\}<M,\qquad M\ не\ зависи\ од\ \lambda,$$

и ако за $t\geqslant T$ *и* $\lambda\geqslant\lambda_0$

(3.3.3) $\Delta_h^k\Phi(t,\lambda)$ *и* $\Delta_h^k\{\Phi(t;\lambda)-\Phi(t)\}$ *монотоно* $\to 0$, $t\to\infty$,

тада важе тврђења 1^0-3^0 *става* 1.

Доказ. Из (3.3.2) и првог услова (3.3.3) следи да су k-те диференције $\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)$ и $\Delta_h^k\Phi(t)$ ограничене варијације у размаку $(0,\infty)$. За прву од њих је, наиме,

$$W_0^\infty\{\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)\}=W_0^T\{\Delta_h^k\Phi(t;\lambda)\}+\Delta_h^k\Phi(T;\lambda)<\infty.$$

Слично следи и за $W_0^\infty\{\Delta_h^k\Phi(t)\}$, јер, на основу једног Хелиевог [11] става, услов (3.3.2) повлачи за собом да је и $\Delta_h^k\Phi(t)$ ограничене варијације у размаку $(0,T)$. Тиме се доказ тврђења 1^0 и 2^0 става 4 своди на доказ који смо већ дали код доказа става 1.

Нека је $\Psi(t;\lambda)$ одређено са (3.2.5). Ради доказа тврђења 3^0 полазимо, служећи се лемом 3, од

(3.3.4) $$|F(\sigma,\tau;\lambda)-F(\sigma,\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\left|\int_0^{T+kh}e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\,d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}\right|+$$

$$+|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\int_{T+kh}^{\infty}|d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}|,$$

одакле, с обзиром на други услов (3.3.3), следи

$$|F(\sigma,\tau;\lambda)-F(\sigma,\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant|e^{-(\sigma+i\tau)h}-1|^{-k}\left\{\left|\int_0^{T+kh}e^{-i\tau t}\,d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}\right|+\right.$$

$$\left.+\{1-e^{-\sigma(T+kh)}\}\int_0^{T+kh}|d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda\}|+\Delta_h^k\Psi(T;\lambda)\right\}.$$

Ако у овој неједначини пустимо да $\sigma\to 0$, добићемо

$$|F(\tau;\lambda)-F(\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant|e^{-i\tau h}-1|^{-k}\left\{\left|\int_0^{T+kh}e^{-i\tau t}\,d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;)\}\right|+\Delta_h^k\Psi(T;\lambda)\right\},$$

те је за довољно мало $\varepsilon>0$ и $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $s=0,\pm 1,\ldots$

$$|F(\tau;\lambda)-F(\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k}\left\{\left|\int_0^{T+kh}e^{-i\tau t}\,d\{\Delta_h^k\Psi(t-kh;\lambda)\}\right|+\Delta_h^k\Psi(T;\lambda)\right\}.$$

Како је према претпоставци (3.3.2) $\Delta_h^k\Psi(t;\lambda)$ униформно ограничене варијације у размаку $(0,T+kh)$, а $e^{-i\tau}$ непрекидна функција, то је на основу познатог Хелиевог [11] става дозвољен гранични прелаз кад $\lambda\to\infty$ под интегралом који фигурише на десној страни последње неједначине. Према томе, на основу (3.3.1),

$$\lim_{\lambda=\infty}\sup|F(\tau;\lambda)-F(\tau)|\leqslant 0,$$

чиме је доказано тврђење 3⁰ става 4.

Аналогон ставу 2 је следећи

Став 5. *Нека* $\Phi(t;\lambda)$ *и* $\Phi(t)$ *задовољавају услове става* 4 *и нека је*

$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u),\tag{3.3.5}$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0,\infty)$.

Тада важе тврђења 1^0-3^0 *става* 2.

Доказ. Као што смо видели при доказу става 4, услов (3.3.2) и први услов (3.3.3) повлаче за собом ограниченост варијације k-тих диференција функција $\Phi(t;\lambda)$ и $\Phi(t)$ у размаку $(0,\infty)$. Тиме се доказ тврђења 1^0 и 2^0 става 5 своди на доказ који смо дали код става 2.

Да бисмо доказали тврђење 3^0, претходно ћемо испитати функцију

$$\Theta(t,\tau)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ut}}{[e^{-(u+i\tau)h}-1]^k}\,d\alpha(u),\quad t\geqslant 0.$$

Показаћемо да је $\Theta(t,\tau)$, у (t,τ)-равни из које су исечене траке $2s\pi/h-\varepsilon<\tau<2s\pi/h+\varepsilon$, $s=0,\pm 1,\ldots$ ограничена и непрекидна по t.

Ограниченост следи непосредно из претпоставке да је $\alpha(t)$ ограничене варијације у размаку $(0,\infty)$:

$$|\Theta(t,\tau)|\leqslant\int_0^{\infty}\frac{e^{-ut}}{|e^{-(u+i\tau)h}-1|^k}\,|d\alpha(u)|\leqslant$$

$$\leqslant M\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k}. \tag{3.3.6}$$

Нека је $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x\neq y$ и $\eta>0$, иначе произвољно. Број U одредићемо тако да је

$$2\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^{-k}\int_U^{\infty}|d\alpha(u)|<\eta$$

за фиксирано h и ε, што је увек могуће постићи на основу претпоставке о функцији $\alpha(t)$. Тада је у уоченом делу (t,τ)-равни

$$|\Theta(y,\tau)-\Theta(x,\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_0^{U}\frac{e^{-xu}[e^{-(y-x)}-1]}{[e^{-(u+i\tau)h}-1]^k}\,d\alpha(u)\right|+\left|\int_U^{\infty}\frac{e^{-yu}-e^{-xu}}{[e^{-(u+i\tau)h}-1]^k}\,d\alpha(u)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^{|y-x|}-1}{\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^k}\int_0^{U}|d\alpha(u)|+\frac{2}{\left|2\sin\frac{\varepsilon h}{2}\right|^k}\int_U^{\infty}|d\alpha(u)|.$$

Према томе

$$\lim_{y=x} \sup |\Theta(y,\tau) - \Theta(x,\tau)| \leqslant \eta,$$

што значи да је функција $\Theta(t,\tau)$ непрекидна по t када се τ налази у посматранима размацима.

Сада ћемо доказати тврђење 3^0. Полазимо од (3.2.12)

$$G(\tau;\lambda) - G(\tau) = \int_0^\infty \{F(u,\tau;\lambda) - F(u,\tau)\}\, d\alpha(u).$$

На основу леме 3 и са ознаком (3.2.5) је тада

$$G(\tau;\lambda) - G_h^1(\tau) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\alpha(u)}{[e^{-(u+i\tau)h} - 1]^k} \int_0^\infty e^{-ut} e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh;\lambda)\} =$$

$$= \int_0^\infty \Theta(t,\tau)\, e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh;\lambda)\},$$

па према томе

$$|G(\tau;\lambda) - G(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^{T+kh} \Theta(t,\tau)\, e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh;\lambda)\} \right| +$$

$$+ \int_{T+kh}^\infty |\Theta(t,\tau)|\, |d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh;\lambda)\}|.$$

Међутим, на основу (3.3.6) и другог услова (3.3.3) налазимо

$$|G(\tau;\lambda) - G(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^{T+kh} \Theta(t,\tau)\, e^{-i\tau t}\, d\{\Delta_h^k \Psi(t - kh;\lambda)\} \right| +$$

$$+ M \left| 2 \sin \frac{\varepsilon h}{2} \right|^{-k} \cdot \Delta_h^k \Psi(T;\lambda).$$

Како је за посматрана τ функција $\Theta(t,\tau)$ непрекидна по t, а $\Delta_h^k \Psi(t;\lambda)$ униформно ограничене варијације у $(0, T+kh)$, то је на основу Хелиевог [11] става дозвољен гранични прелаз $\lambda \to \infty$ под знаком интеграла. Према томе, на основу (3.3.1),

$$\lim_{\lambda=\infty} \sup |G(\tau;\lambda) - G(\tau)| \leqslant 0$$

униформно за $2s\pi/h + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant 2(s+1)\pi/h$, $0 < \varepsilon < \pi/h$, $s = 0, \pm 1, \ldots$ Тиме је став 5 у потпуности доказан.

Из става 5 следи, на сличан начин као што је из става 2 изведен став 3, следећи

Став 6. *Нека је*

$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u),\quad t\geqslant 0,$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0,\infty)$.

Нека функција $\varphi(t;\lambda)$ *има за* $t\geqslant 0$ *асимптотски развитак по општој скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$\varphi(t;\lambda)=\frac{p_0(t)}{q_0(\lambda)}+\frac{p_1(t)}{q_1(\lambda)}+\cdots+\frac{p_l(t)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где функције $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ *припадају класи* Ω_h^m.

Ако је за неко цело $K>m$ *варијација* K*-те диференције* $(h>0)$

$$W_0^T\{\Delta_h^k\varphi(t;\lambda)\}<\frac{M}{q_l(\lambda)},\quad M \text{ не зависи од } \lambda,$$

и за $t\geqslant T$ *и* $\lambda\geqslant\Lambda$

$$\Delta_h^K\varphi(t;\lambda) \text{ монотоно} \to 0 \text{ када } t\to\infty,$$

тада,

1^0 *за* $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ *постоји гранична вредност*

$$g(\tau;\lambda)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma\tau}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda);$$

2^0 $g(t;\lambda)$ *има асимптотски развитак по скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$g(\tau;\lambda)=\frac{P_0(\tau)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\tau)}{q_1(\lambda)}+\cdots+\frac{P_l(\tau)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где је

$$P_\mu(\tau)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,dp_\mu(t),\quad \mu=0,1,\ldots,l.$$

Овај асимптотски развитак је униформан за $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$

Примедба I. Специјално, ако је $\psi(t)$ тотално монотона функција у размаку $(0,\infty)$, биће задовољен услов (3.3.5). Наиме, Хаусдорф [10] је показао да је класа тотално монотоних функција у размаку $(0,\infty)$ идентична са класом функција које се могу приказати Лаплас-Стилтјесовим интегралом облика

$$\int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u)$$

где је $\alpha(t)$ ограничена и неопадајућа функција у $(0,\infty)$.

Примедба II. Ако су испуњени услови ставова 3 и 6, тада као њихова тривијална последица следи, да се асимптотски развитак функције

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d\varphi(\tau;\lambda), \quad \sigma > 0,$$

може добити из асимптотског развитка функције $\varphi(t;\lambda)$, примењујући на овај последњи члан по члан операцију

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d\{\ \}.$$

Добијени асимптотски развитак важи, као што се то види из доказа ставова 3 и 6, без изузетка за свако τ.

3.4. Како је функција $g(\tau;\lambda)$ чији асимптотски развитак дају ставови 3 и 6 изражена Стилтјесовим интегралом, то погодним избором функције $\varphi(t;\lambda)$ можемо добити одговарајуће ставове за A-збирљиве редове, специјално за A-збирљиве тригонометриске редове, и за A-збирљиве Риманове интеграле.

(i) Следећа два става односе се на асимптотско развијање A-збирљивих тригонометриских редова.

Став 7. *Нека је*

$$a_\nu = \int_0^\infty e^{-\nu u}\, d\alpha(u), \quad \nu = 0, 1, \ldots, \tag{3.4.1}$$

где је $\alpha(u)$ *ограничене варијације у* $(0, \infty)$.

Нека низ $b_\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ *има асимптотски развитак по општој скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$b_\nu(\lambda) = \frac{p_0(\nu)}{q_0(\lambda)} + \frac{p_1(\nu)}{q_1(\lambda)} + \cdots + \frac{p_l(\nu)}{q_l(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.4.2}$$

где су $p_\mu(\nu)$, $\mu = 0, 1, \ldots, l$, *посматрани као функције променљиве* ν, *полиноми* m*-тог степена.*

Ако за неко цело $K > m$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{3.4.3}$$

тада

1° *за* $0 < \theta < 2\pi$ *постоји гранична вредност*

$$g(\theta;\lambda) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, b_\nu(\lambda)\, r^\nu e^{\nu\theta i};$$

2^0 *$g(\theta;\lambda)$ има асимптотски развитак по скали* $\{q_\mu(\lambda)\}$

$$g(\theta;\lambda)=\frac{P_0(\theta)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\theta)}{q_1(\lambda)}+\cdots+\frac{P_l(\theta)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где је

$$P_\mu(\theta)=\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu p_\mu(\nu)r^\nu e^{\nu\theta l},\quad \mu=0,1,\ldots,l.$$

Овај асимптотски развитак је униформан за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$.

Став 7 добијамо из става 3 ако у овом за $\varphi(t;\lambda)$ узмемо

$$\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu\leqslant t}b_\nu(\lambda), \tag{3.4.4}$$

тј. степенасту функцију која за $t=0,1,\ldots$ има скокове дужине $b_0(\lambda)$, $b_1(\lambda),\ldots$ и ставимо $h=1$, тј. за коефицијенте $p_\mu(t)$ асимптотског развитка (3.2.14) функције $\varphi(t;\lambda)$ претпоставимо да припадају класи Ω_1^m, тј.

$$p_\mu(t)=\omega_0(t)\pi_m(t)+\omega_1(t)\pi_{m-1}(t)+\ldots+\omega_m(t), \tag{3.4.5}$$

где су $\pi_k(t)$ полиноми k-тог степена по t, а $\omega_k(t)$ периодичке функције периоде 1.

Тада је

$$\int_0^x e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu\leqslant x}e^{-\nu\sigma}e^{-i\nu\tau}\psi(\nu)b_\nu(\lambda),$$

и ако ставимо

$$e^{-(\sigma+i\tau)}=re^{\theta i} \tag{3.4.6}$$

и

$$\psi(\nu)=a_\nu,$$

добијамо

$$\int_0^x e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu\leqslant x}a_\nu b_\nu(\lambda)r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Кад $x\to\infty$, ред на десној страни конвергираће заједно са интегралом, те је

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu b_\nu(\lambda)r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Према (3.4.6), граничном прелазу $\sigma \to 0$ одговара $r \to 1$, те је

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} \psi(t)\, d\varphi(t;\lambda) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(\lambda) r^\nu e^{\nu\theta i},$$

кадгод гранична вредност на левој страни постоји.

С друге стране из (3.4.4) следи

$$b_\nu(\lambda) = \varphi(\nu;\lambda) - \varphi(\nu-1;\lambda). \tag{3.4.7}$$

Како су на основу претпоставке (3.4.5) коефицијенти $p_\mu(\nu)$ у асимптотском развитку (3.2.14)

$$\varphi(\nu;\lambda) = \sum_{\mu=0}^{l} \frac{p_\mu(\nu)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad \lambda \to \infty,$$

за целе вредности $\nu = 0, 1, \ldots$ полиноми m-тог степена по ν, то према (3.4.7) низ $b_\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ има асимптотски развитак облика

$$b_\nu(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{l} \frac{p_\mu(\nu) - p_\mu(\nu-1)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l} \frac{p_\mu^*(\nu)}{q_\mu(\lambda)} + o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),$$

где су $p_\mu^*(\nu)$ полиноми $(m-1)$-степена по ν.

Најзад, ако за диференцију Δ_1^k краткоће ради пишемо само Δ^k, услов (3.2.15) постаје

$$\int_0^\infty |d\{\Delta^K \varphi(t-K;\lambda)\}| = o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right), \quad K > m.$$

Да би га изразили помоћу низа $b_\nu(\lambda)$, примећујемо да се његова лева страна своди на ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^K \varphi(\nu-K;\lambda) - \Delta^K \varphi(\nu-K-1;\lambda)|,$$

или, према (3.4.7), на

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^K b_{\nu-K}(\lambda)|,$$

па став 7 добијамо ако уместо $m-1$ и K пишемо m и $K+1$.

За примену је нарочито погодан следећи

Став 8. *Сва тврђења става 7 важе ако, задржавајући остале претпоставке о низовима* a_ν *и* $b_\nu(\lambda)$, $\nu=0,1,\ldots$, *уместо услова* (3.4.3) *захтевамо да за неко цело* $K>m$ *и* $\lambda \geqslant \Lambda$

(3.4.8) $\Delta^K b_\nu(\lambda)$ *монотоно* $\to 0$ *када* $\nu_0 \leqslant \nu \to \infty$.

Доказ. На основу (3.4.8) је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda)| =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu_0+K} |\Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda)| + \sum_{\nu_0+K+1}^{\infty} \{\Delta^K b_{\nu-K-1}(\lambda) - \Delta^K_{\nu-K}(\lambda)\} \leqslant$$

(3.4.9)

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\nu_0+K} |\Delta^K b_{\nu-K-1}(\lambda)| + \sum_{\nu=0}^{\nu_0+K} |\Delta^K b_{\nu-K}(\lambda)| + \Delta^K b_{\nu_0}(\lambda).$$

Међутим, како су $p_\mu(\nu)$ полиноми m-тог степена по ν и $K>m$, то из (3.4.2) следи

$$q_l(\lambda)\,\Delta^K b_\nu(\lambda) \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

па према (3.4.9)

$$q_l(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^{K+1} b_{\nu-K-1}(\lambda)| \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

тј. испуњен је услов (3.4.3) става 7. — Став 8 смо могли, наравно, добити и директно из става 6.

Ако у ставу 8 уместо услова (3.4.1) претпоставимо да је низ a_ν тотално монотон, тиме добијамо познати Караматин [**12***a*] став.

(ii) Ако функција $\varphi(t;\lambda)$ има R-интеграбилан први извод $\chi(t;\lambda)$, тада добијамо аналогоне ставова 3 и 6 за A-збирљиве Риманове интеграле. Специјално за примену је погодан следећи

Став 9. *Нека је*

$$\psi(t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\alpha(u),\quad t\geqslant 0, \tag{3.4.10}$$

где је $\alpha(t)$ *ограничене варијације у размаку* $(0,\infty)$.

Функција $\chi(t;\lambda)$ *нека има изводе по* t *до* K*-тог реда закључно и нека је*

$$\int_0^t \chi(u;\lambda)\,du=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{p_\mu(t)}{q_\mu(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty, \tag{3.4.11}$$

где су коефицијенти $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ *полиноми* m*-тог степена по* t.

Ако је тада за неко цело $K>m$

$$\int_0^\infty\left|\frac{\partial^K\chi(t;\lambda)}{\partial t^K}\right|dt=o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty, \tag{3.4.12}$$

онда постоји гранична вредност

$$R(\tau;\lambda)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\chi(t;\lambda)\,dt \tag{3.4.13}$$

и асимптотски развитак функције $R(\tau;\lambda)$ *дат је са*

$$R(\tau;\lambda)=\sum_{\mu=0}^{l}\frac{T_\mu(\tau)}{q_\mu(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

где је

$$T_\mu(\tau)=\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)p'_\mu(t)\,dt.$$

Овај развитак је униформан по τ *у сваком коначном размаку који не садржи тачку* $\tau=0$.

Уместо услова (3.4.11) *можемо захтевати да је*

$$W_0^T\left\{\frac{\partial^{K-1}\chi(t;\lambda)}{\partial t^{K-1}}\right\}<\frac{M}{q_l(\lambda)},\quad M \text{ не зависи од } \lambda, \tag{3.4.14}$$

и да за $t\geqslant T$

$$(-1)^{K-1}\frac{\partial^{K-1}\chi(t;\lambda)}{\partial t^{K-1}}\quad \text{монотоно}\to 0 \text{ када } t\to\infty. \tag{3.4.15}$$

IV ПРИМЕНЕ

4.1. У овој и наредним тачкама применићемо став 8 на ултрасферне полиноме $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, да бисмо добили њихов асимптотски развитак кад $n \to \infty$. Ултрасферни полиноми су дефинисани помоћу функције-генератрисе

$$\frac{1}{(1-2h\cos\theta+h^2)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)\, h^n .$$

Као полазна тачка може нам послужити један од тригонометриских редова за ултрасферне полиноме (в. Сеге [**23** *a*, стр. 95]) ($\lambda > 0$, $\lambda \neq 1, 2, \ldots$, $0 < \theta < \pi$)

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda} \cdot$$

(4.1.1)

$$\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}} \sin(n+2\nu+1)\theta$$

или

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(2\lambda)^{(n+\nu)}}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}} \cdot$$

(4.1.2)

$$\cdot \cos[(n+2\lambda+2\nu)\theta - \lambda\pi] .$$

Рачун ћемо изводити само за први од њих.

Тригонометриски ред (4.1.1) написаћемо претходно у облику

$$\frac{\Gamma^2(\lambda)\,n!}{2\,\Gamma(2\lambda+n)}(2\sin\theta)^{2\lambda-1} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) =$$

$$= J\left\{ e^{(n+1)\theta i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}} e^{2\nu\theta i} \right\} =$$

(4.1.3)

$$= J\{ e^{(n+1)\theta i}\, S_n^{(\lambda)}(2\theta) \},$$

где смо ставили

(4.1.4)

$$S_n^{(\lambda)}(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}} e^{\nu\theta i} .$$

Асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ добићемо, дакле, из одговарајућег за $S_n^{(\lambda)}(\theta)$.

Нека је, са ознакама из става 7 и 8,

$$\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} = a_\nu \quad \text{и} \quad \frac{(n+\nu)!}{(\lambda)^{(n+\nu+1)}} = b_\nu(n).$$

Показаћемо да коефицијенти a_ν и $b_\nu(n)$ задовољавају услове (3.4.1), (3.4.2) и (3.4.8) става 7 односно 8. У том циљу примећујемо да је према једном Хаусдорфовом ставу потребан и довољан услов да низ c_n, $n=0, 1, \ldots$ буде тотално монотон, да се може приказати у облику интеграла момената

$$c_n = \int_0^1 t^n \, d\alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ не опада и ограничена је у $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Ако коефицијенте a_ν и $b_\nu(n)$ напишемо у облику

$$(4.1.5) \quad a_\nu = \frac{B(1-\lambda+\nu, \lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \int_0^1 t^{\nu-\lambda}(1-t)^{\lambda-1} \, dt$$

и

$$(4.1.6) \quad b_\nu(n) = B(\nu+n+1, \lambda) = \int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1} \, dt,$$

увиђамо да је низ a_ν, $\nu=0, 1, \ldots$ тотално монотон за $0<\lambda<1$, а низ $b_\nu(n)$, $\nu=0, 1, \ldots$ за $\lambda>0$. Према томе, на основу примедбе у тачки 2.3 услов (3.4.1) је испуњен када је $0<\lambda<1$. С друге стране због тоталне монотоније низа $b_\nu(n)$ и чињенице да се

$$b_\nu(n) \sim \Gamma(\lambda)\, \nu^{-\lambda} \to 0, \quad \nu \to \infty,$$

следи да је услов (3.4.8) става 8 испуњен за свако K и n.

Да бисмо могли да применимо став, остаје још једино да видимо да ли низ $b_\nu(n)$ допушта асимптотски развитак облика (3.4.2), чији су коефицијенти $p_\mu(\nu)$, $\mu=0, 1, \ldots, k$ полиноми по ν. То ћемо проверити посебице у сваком случају, развијајући $b_\nu(n)$ по различитим скалама $\{q_\mu(n)\}$.

4.2. Први од асимптотских развитака ултрасферних полинома $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, поменутих у тачки 2.5 даје следећи

Став 10. *Нека F означава хипергеометриску функцију и нека је*

$$(x)^{(\nu)} = x(x+1)\ldots(x+\nu-1), \quad (x)^{(0)} = 1.$$

Гада је униформно по θ у размаку $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)} (2\sin\theta)^{1-2\lambda} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\,\mu!} f_\mu^{(\lambda)}(\theta) + o(n^{\lambda-l-1}),$$

где је

$$f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)=J\left\{\frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\lambda+1}}F(-\mu,\alpha;\lambda-\mu;1-e^{-2\theta i})\right\}.$$

За специјалну вредност параметра α, $\alpha=0$, *овај асимптотски развитак своди се на познати уопштени Стилтјесов развитак за ултрасферне полиноме* (Сеге [**23***a*, стр. 191, став 8.21.11]).

Доказ. Да бисмо могли применити став 8, потребно је, према оном што смо видели у претходној тачки, да још проверимо да ли $b_{\nu}(\lambda)$ допушта асимптотски развитак облика (3.4.2). У том циљу развићемо $b_{\nu}(\lambda)$ у асимптотски ред по скали $\{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\}$. Према (4.1.6) је

$$b_{\nu}(n)=\int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\alpha}\{1-(1-t)\}^{\nu-\alpha}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\alpha}(1-t)^{\lambda-1}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}\binom{\nu-\alpha}{\mu}(1-t)^{\mu}\right\}dt$$

и интеграцијом члан по члан добијамо асимптотски развитак за $b_{\nu}(n)$ у облику

$$b_{\nu}(n)=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\binom{\nu-\alpha}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}+o(n^{-\lambda-l}).$$

(4.2.1)

Одавде видимо да је задовољен и последњи услов, (3.4.2), става 7, јер су функције $p_{\mu}(\nu)$ у овом случају

$$p_{\mu}(\nu)=\binom{\nu-\alpha}{\mu}(-1)^{\mu};$$

тј. полиноми μ-тог степена по ν, док је

$$\frac{1}{q_{\mu}(n)}=(\lambda)^{(\mu)}\frac{B(\lambda,n+\alpha+1)}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}.$$

На основу става 8 онда следи да је у $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$ униформно по θ:

$$S_n^{(\lambda)}(\theta)=B(\lambda,n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}P_{\mu}(\theta)+$$

(4.2.2)

$$+o(n^{-\lambda-l}),$$

где је

$$P_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\nu-\alpha}{\mu} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Израз за $P_\mu(\theta)$ можемо свести на коначан облик. У том циљу полазимо од

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{\nu-\alpha} = z^{-\alpha}(1-z)^{\lambda-1}, \quad z = re^{\theta i}.$$

Диференцирајући μ пута леву и десну страну, налазимо

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu-\alpha)_{(\mu)} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^{\nu-\alpha-\mu} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m \binom{\mu}{m} (\alpha)^{(m)} (1-\lambda)^{(\mu-m)} \frac{(1-z)^{\lambda-\mu+m-1}}{z^{\alpha+m}},$$

одакле

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu-\alpha}{\mu} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^\nu =$$

$$= \frac{z^\mu (1-z)^{\lambda-\mu-1}}{\mu!} \sum_{m=0}^{\mu} (-1)^m \binom{\mu}{m} (\alpha)^{(m)} (1-\lambda)^{(\mu-m)} (z^{-1}-1)^m =$$

$$= (1-\lambda)^{(\mu)} \frac{z^\mu (1-z)^{\lambda-\mu-1}}{\mu!} \sum_{m=0}^{\mu} \frac{(-\mu)^{(m)} (\alpha)^{(m)}}{(\lambda-\mu)^{(m)} m!} (1-z^{-1})^m =$$

$$= (1-\lambda)^{(\mu)} \frac{z^\mu (1-z)^{\lambda-\mu-1}}{\mu!} F(-\mu, \alpha; \lambda-\mu; 1-z^{-1}).$$

Према томе

$$(4.2.3) \quad P_\mu(\theta) = \frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!} e^{\mu\theta i} (1-e^{\theta i})^{\lambda-\mu-1} F(-\mu, \alpha; \lambda-\mu; 1-e^{-\theta i}).$$

На основу (4.1.3) и (4.2.2), асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ гласи

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot J\left\{e^{(n+1)\theta i}\,B(\lambda, n+\alpha+1)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}}P_{\mu}(\theta)+o(n^{-\lambda-l})\right\}$$

односно, према (4.2.3), униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\,\mu!}f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)+o(n^{\lambda-l-1}). \tag{4.2.4}$$

где смо ставили

$$f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)=J\left\{\frac{e^{(n+2\mu+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\mu-\lambda+1}}F(-\mu,\alpha;\lambda-\mu;1-e^{-2\theta i})\right\}.$$

Добијени асимптотски развитак важи, засада, само када је $0<\lambda<1$, јер је једино тада низ коефицијената a_ν, $\nu=0,1,\ldots$, према оном шта је речено у тачки 4.1, тотално монотон. Међутим, није тешко проширити резултат и на случај када је $s<\lambda<s+1$, s цео позитиван број. Наиме, тада је, према (4.1.5), низ a_ν, $\nu=s$, $s+1,\ldots$ тотално монотон, па ред за $S_n^{(\lambda)}(\theta)$ (4.1.4) треба поделити на две суме $\sum_{\nu=0}^{s-1}$ и $\sum_{\nu=s}^{\infty}$, и став применити на другу.

Специјално за $\alpha=0$ асимптотски развитак (4.2.4) своди се на

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{B(\lambda,\lambda+n)}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(\lambda+n)^{(\mu+1)}}\,\frac{\cos[(n+\lambda+\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}$$
$$+o(n^{\lambda-l-1}).$$

4.3. Други од асимптотских развитака за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ даје следећи

Став 11. *Нека F означава хипергеометриску функцију и нека је*

$$(x)_{(\nu)}=x(x-1)\ldots(x-\nu+1),\quad (x)_{(0)}=1.$$

Тада је униформно по θ *у размаку* $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}\,(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\;(n+\beta)_{(\mu)}}\,g_\mu^{(\lambda)}(\theta)+o\,(n^{\lambda-l-1}),$$

где је

$$g_n^{(\lambda)}(\theta)=J\left\{i\,\frac{e^{[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]i}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}\,F(-\mu,\lambda-\beta-1;\lambda-\mu;\,1-e^{2\theta i})\right\}.$$

Специјално за $\beta=\lambda-1$ *овај асимптотски развитак своди се на познати уопштени Дарбуов асимптотски развитак за ултрасферне полиноме* (Cere [**23***a*, стр. 191, став 8.21.10]).

Доказ. Низ коефицијената $b_\nu(n)$ развићемо по скали $\{(n+\beta)_{(\mu)}\}$. Према (4.1.6) је

$$b_\nu(n)=\int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\beta}\left\{1+\frac{1-t}{t}\right\}^{\beta-\nu}(1-t)^{\lambda-1}\,dt=$$

$$=\int_0^1 t^{n+\beta}(1-t)^{\lambda-1}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{\beta-\nu}{\mu}(1-t)^{\mu}\;t^{-\mu}\right\}dt$$

и интеграцијом добијамо за $b_\nu(n)$ асимптотски развитак у облику

$$(4.3.1)\quad b_\nu(n)=B(\lambda,n+\beta+1)\sum_{\mu=0}^{l}\binom{\beta-\nu}{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}}+o\,(n^{-\lambda-l}).$$

Са ознакама става 7, овде је

$$\frac{1}{q_\mu(n)}=\frac{B(\lambda,n+\beta+1)}{(n+\beta)_{(\mu)}}(\lambda)^{(\mu)}$$

и

$$p_\mu(\nu)=\binom{\beta-\nu}{\mu},$$

тј. задовољен је и услов (3.4.2) става 7.

Примењујући онда став на $S_n^{(\lambda)}(\theta)$ добијамо

$$(4.3.2)\qquad S_n^{(\lambda)}(\theta) = B(\lambda, n+\beta+1)\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}}R_\mu(\theta)+o(n^{-\lambda-l}),$$

униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon$, где смо ставили

$$R_\mu(\theta)=\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\beta-\nu}{\mu}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Да бисмо упростили израз за $R_\mu(\theta)$, полазимо од

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}z^{-\nu}=z^{1-\lambda}(z-1)^{\lambda-1},$$

односно

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}z^{\beta-\nu}=z^{\beta-\lambda+1}(z-1)^{\lambda-1}.$$

Диференцирајући μ пута, налазимо

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\beta-\nu)_{(\mu)}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}z^{\beta-\nu-\mu}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\mu}\binom{\mu}{m}(\beta-\lambda+1)_{(m)}(\lambda-1)_{(\mu-m)}\frac{(z-1)^{\lambda-\mu+m}}{z^{\lambda-\beta+m-1}},$$

одакле,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\beta-\nu}{\mu}\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!}z^{-\nu}=$$

$$=(-1)^\mu\frac{z^{\mu-\beta}}{\mu!}\sum_{m=0}^{\mu}\binom{\mu}{m}(\lambda-\beta-1)^{(m)}(1-\lambda)^{(\mu-m)}\frac{(z-1)^{\lambda-\mu+m-1}}{z^{\lambda-\beta+m-1}}=$$

$$=\frac{(-1)^\mu}{\mu!}z^{\mu-\beta}\sum_{m=0}^{\mu}\frac{(-\mu)^{(m)}}{m!}(\lambda-\beta-1)^{(m)}\frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{(\lambda-\beta)^{(m)}}\frac{(z-1)^{\lambda-\mu+m-1}}{z^{\lambda-\beta+m-1}}=$$

$$=(-1)^\mu\frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!}(1-z)^{\lambda-\mu-1}F(-\mu,\lambda-\beta-1;\lambda-\mu;1-z).$$

Према томе,

$$(4.3.3)\quad R_\mu(\theta) = (-1)^\mu \frac{(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!}(1-e^{\theta i})^{\lambda-\mu-1} F(-\mu, \lambda-\beta-1; \lambda-\mu; 1-e^{\theta i}) .$$

На основу (4.1.3) и (4.3.2), асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ гласи

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = 2\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma^2(\lambda)\,n!}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot J\left\{B(\lambda, n+\beta+1)\,e^{(n+1)\theta i}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}}R_\mu(\theta)+o(n^{-\lambda-l})\right\},$$

односно, водећи рачуна о (4.3.3),

$$P_n^{(\lambda)}\cos\theta) = \frac{2}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

(4.3.4)

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu\,\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\beta)_{(\mu)}\,\mu!}\,g_\mu^{(\lambda)}(\theta)+o(n^{\lambda-l-1})$$

униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$, где је

$$g_\mu^{(\lambda)}(\theta) = J\left\{i\,\frac{e^{[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}F(-\mu, \lambda-\beta-1; \lambda-\mu; 1-e^{2\theta i}\right\}.$$

Специјално за $\beta=\lambda-1$ асимптотски развитак (4.3.4) своди се на

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = 2\,\frac{(\lambda)^{(n)}}{n!}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}\,(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\lambda-1)_{(\mu)}\,\mu!}\,\frac{\cos[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}+$$

$$+\,o(n^{\lambda-l-1})\cdot$$

4.4. Најзад, трећи асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ даје следећи

Став 12. *Нека је* $h_\mu^{(\lambda)}(z)$ *одређено са*

$$e^{(1-\gamma)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^\lambda(1-z\,e^x)^{\lambda-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty}h_\mu^{(\lambda)}(z)\,\frac{x^\mu}{\mu!}\cdot$$

Тада је униформно по θ *у размаку* $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \frac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}\,(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\,.$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^{\mu} \frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\gamma)^{\mu+\lambda}} J\left\{e^{(n+1)\theta i}\, h_{\mu}^{(\lambda)}\left(e^{2\theta i}\right)\right\} + o(n^{\lambda-l-1}).$$

Специјално за $\gamma = 0$ *овај асимптотски развитак своди се на развитак Лјувил-Стекловљева типа за ултрасферне полиноме.* (За случај Лежандрових полинома ($\lambda = {}^1/_2$) види Сеге [**23***а*, стр. 205, образац (8.61.7)].)

Доказ. Низ коефицијената $b_\nu(n)$ развићемо по скали $\{(n+\gamma)^{\mu+\lambda}\}$. Према (4.1.6) је

$$b_\nu(n) = \int_0^1 t^{\nu+n}(1-t)^{\lambda-1}\,dt = \int_0^1 t^{n+\gamma}\,\frac{t^{\nu-\gamma}}{(1-t)^{1-\lambda}}\,dt,$$

одакле сменом $t \mid e^{-t}$ налазимо

$$b_\nu(n) = \int_0^\infty e^{-(n+\gamma)t}\,\frac{e^{-(\nu-\gamma+1)t}}{(1-e^{-t})^{1-\lambda}}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(n+\gamma)t}\,t^{\lambda-1}\,e^{-(\nu-\gamma+1)t}\left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{1-\lambda} dt.$$

Ако ставимо

$$F(-t, y) = e^{-yt}\left(\frac{-t}{e^{-t}-1}\right)^{1-\lambda},$$

имаћемо

$$b_\nu(n) = \int_0^\infty e^{-(n+\gamma)t}\,t^{\lambda-1}\,F(-t, \nu-\gamma+1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{(n+\gamma)^{\lambda}} \int_0^\infty e^{-t}\,t^{\lambda-1}\,F\left(-\frac{t}{n+\gamma},\ \nu-\gamma+1\right) dt;$$

уводећи полиноме $Q_\mu^{(\lambda)}(y)$ степена μ по y, дефинисане генератрисом

$$(4.4.1) \qquad F(x,y) = e^{yx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{Q_\mu^{(\lambda)}(y)}{\mu!}\,x^{\mu},$$

добијамо

$$b_\nu(n) = \frac{1}{(n+\gamma)^\lambda} \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{\mu!} \left(-\frac{t}{n+\gamma}\right)^\mu dt.$$

Интегришући последњи ред члан по члан, налазимо асимптотски развитак за

$$(4.4.2) \quad b_\nu(n) = \frac{\Gamma(\lambda)}{(n+\gamma)^\lambda} \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!} \frac{Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{(n+\gamma)^\mu} + o(n^{-\lambda-l}).$$

Са ознакама става 7 овде је

$$\frac{1}{q_\mu(n)} = \frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!} \frac{\Gamma(\lambda)}{(n+\gamma)^{\lambda+\mu}}, \quad p_\mu(\nu) = (-1)^\mu Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1),$$

па је и услов (3.4.2) става 7 испуњен.

Примењујући онда став на $S_n^{(\lambda)}(\theta)$, добијамо

$$S_n^{(\lambda)}(\theta) = \Gamma(\lambda) \sum_{\mu=0}^{l} (-1)^\mu \frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\gamma)^\mu \mu!} h_\mu^{(\lambda)}(e^{\theta i}) + o(n^{-\lambda-l})$$

униформно за $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где смо ставили

$$h_\mu^{(\lambda)}(e^{\theta i}) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1) r^\nu e^{\nu\theta i}.$$

Генератрису од $h_\mu^{(\lambda)}(z)$ добићемо ако (4.4.1.) помножимо са $\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} z^\nu$

$$\frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} e^{\nu x} z^\nu \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^\lambda = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)} Q_\mu^{(\lambda)}(y) z^\nu}{\nu!\,\mu!} x^\mu,$$

ставимо $y = \nu - \gamma + 1$ и саберемо од $\nu = 0$ до ∞

$$e^{(1-\gamma)x} \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)}}{\nu!} (ze^x)^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^{(\nu)} Q_\mu^{(\lambda)}(\nu-\gamma+1)}{\nu!\,\mu!} z^\nu x^\mu,$$

односно

$$(4.4.3)\qquad e^{(1-\Upsilon)x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{\lambda}(1-ze^x)^{\lambda-1}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{h_\mu^{(\lambda)}(z)}{\mu!}x^\mu.$$

Према томе, асимптотски развитак за $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ гласи

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

$$\cdot J\left\{e^{(n+1)\theta i}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\Upsilon)^{\lambda+\mu}\,\mu!}h_\mu^{(\lambda)}(e^{2\theta i})+o\left(n^{-\lambda-l}\right)\right\},$$

односно, према (4.4.3), униформно за $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$,

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\frac{2\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot$$

(4.4.4)

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{(n+\Upsilon)^{\lambda+\mu}\,\mu!}J\{e^{(n+1)\theta i}h_\mu^{(\lambda)}(e^{2\theta i})\}+o\left(n^{\lambda-l-1}\right),$$

где је $h_\mu^{(\lambda)}(z)$ дато са (4.4.3).

4.5. У овој тачки извешћемо асимптотски развитак $(x\to\infty)$ интеграла

$$Z_\nu(\tau,x)=\int_0^\infty e^{i\tau t}\,t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2}dt,\qquad -1/2<\nu<1/2.$$

Са ознакама става 9, овде је

$$\psi(t)=t^{\nu-1/2},\quad \chi(t;x)=\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2}.$$

Како је за свако цело позитивно k

$(-1)^k\psi^{(k)}(t)\geqslant 0$ а $(-1)^k\chi_t^{(k)}(t;x)\geqslant 0$ и монотоно $\to 0$, $t\to\infty$,

то је с једне стране, на основу примедбе I уз став 6, испуњен услов (3.4.10), а с друге стране услов (3.4.15) става 9. Исто тако је лако увидети да је задовољан услов (3.4.14) става 9. Најзад,

$$\int_0^t \chi(u;x)\,du = \frac{2x}{\nu+1/2}\left\{\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu+1/2}-1\right\} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l}\binom{\nu-1/2}{\mu}\frac{t^{\mu+1}}{(\mu+1)(2x)^{\mu}} + o(x^{-l}), \quad x\to\infty,$$

тј. коефицијенти $p_\mu(t)$ су овде полиноми $(\mu+1)$-ог степена. Ако, дакле, применимо став 9 на функција $Z_\nu(\tau,x)$, њен асимптотски развитак биће

$$Z_\nu(\tau,x) = \sum_{\mu=0}^{l}\binom{\nu-1/2}{\mu}\frac{T_\mu(\tau)}{(\mu+1)(2\lambda)^{\mu}} + o(x^{-l}),$$

где смо ставили

$$T_\mu(\tau) = (\mu+1)\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}\,e^{i\tau t}\,t^{\nu+\mu-1/2}\,dt.$$

Међутим, како је

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,t^{\alpha}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}, \quad \alpha>-1, \quad R\{z\}>0,$$

то је

$$T_\mu(\tau) = (\mu+1)\frac{\Gamma(\nu+\mu+1/2)}{(-i\tau)^{\nu+\mu+1/2}}, \quad \tau\neq 0.$$

Према томе, асимптотски развитак функције $Z_\nu(\tau,x)$ гласи

$$Z_\nu(\tau,x) = \frac{1}{(-i\tau)^{\nu+1/2}}\sum_{\mu=0}^{l}\binom{\nu-1/2}{\mu}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1/2)}{(-2i\tau x)^{\mu}} + o(x^{-l}).$$

Специјално за $\tau=1$ добијамо одавде асимптотски развитак за Ханкелове функције $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, $x\to\infty$. Наиме, за $-1/2<\nu<1/2$ [14, стр. 28]

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{i\pi\,\Gamma(1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left[1-e^{-2i\pi(\nu-1/2)}\right]\int_1^\infty e^{ixt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt,$$

и сменом $t\,|\,1+t/x$,

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{\Gamma(1/2-\nu)}{i\pi\,\Gamma(1/2)}\left[1-e^{-2i\pi(\nu-1/2)}\right]\frac{e^{ix}}{\sqrt{2x}}Z_\nu(1,x) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left\{\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)i\right\}\sum_{\mu=0}^{k}\frac{(\nu-1/2)_{(\mu)}(\nu+1/2)^{(\mu)}}{\mu!\,(-2ix)^{\mu}} +$$

$$+ o(x^{-k-1/2}).$$

Асимптотски развитак за $H_\nu^{(2)}(x)$ следи одавде ако ставимо $i \mid -i$.

4.6. Примедба II уз став 6 омогућује нам да изведемо Стирлингов образац. Полазимо од

$$\log \Gamma(x) = (x - {}^1/_2)\log x - x + {}^1/_2 \log 2\pi + \rho(x),$$

где је

$$\rho(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)\frac{dt}{t}.$$

Асимптотски развитак за $\log \Gamma(x)$ добићемо из одговарајућег за $\rho(x)$.

Ако $\rho(x)$ напишемо у облику

$$\rho(x) = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t/x}} - \frac{x}{t} - \frac{1}{2}\right)\frac{dt}{t}, \tag{4.6.1}$$

имаћемо, с ознакама става 9,

$$\sigma = 1, \quad \tau = 0, \quad \psi(t) = \frac{1}{t}, \quad \chi(t;x) = \frac{1}{1-e^{-t/x}} - \frac{x}{t} - \frac{1}{2}.$$

Према примедбама уз став 6, испуњени су услови става 9, јер је $1/t$ тотално монотона функција, а према

$$\left\{\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right\}^{(k)} =$$

$$= (-1)^k\left(a_1\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} + a_2\frac{e^{-2t}}{(1-e^{-2t})^2} + \ldots + a_k\frac{e^{-kt}}{(1-e^{-t})^{k+1}}\right) - (-1)^k\frac{k!}{t^{k+1}}$$

те је

$$(-1)^k\left\{\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right\}^{(k)} \geqslant 0$$

и од извесног t_0, монотоно тежи нули, и то за свако k.

С друге стране, функција $\chi(t;x)$ има асимптотски развитак облика [1])

$$\frac{1}{1-e^{-t/x}} - \frac{x}{t} - \frac{1}{2} = \sum_{\mu=1}^{k}\frac{B_\mu}{(2\mu)!}\frac{t^{2\mu-1}}{x^{2\mu-1}} + o(x^{-2k+1}), \quad x \to \infty,$$

те је и услов у погледу коефицијената асимптотског развитка од $\chi(t;x)$ задовољен.

[1]) B_μ су Бернулиеви бројеви.

Према ставу 9 и (4.6.1), асимптотски развитак за $\rho(x)$ гласи

$$\rho(x) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{B_\mu}{(2\mu)!\, x^{2\mu-1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\mu-2}\, dt + o(x^{-2k+1}) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k} \frac{B_\mu \Gamma(2\mu-1)}{(2\mu)!\, x^{2\mu-1}} + o(x^{-2k+1}) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{k} \frac{B_\mu}{(2\mu-1)\,2\mu} \frac{1}{x^{2\mu-1}} + o(x^{-2k+1}), \quad x \to \infty .$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аљанчић С. — Прилог теорији Гегенбауерових полинома. *Зборник радова Маш. инсш. САН* **2** (1952), стр. 113—128.

[2] Barnes E. W. — The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series. *Phil. Trans.* (A) **206** (1906), str. 249—297.

[3] Carlemann T. — (a) Les fonctions quasi-analytiques, Paris 1926. (b) Développements asymptotiques des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires. *Acta Math.* **43** (1922), str. 319—336.

[4] Cauchy A. — *Comptes rendus* **8**, str. 370.

[5] Darboux G. — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. *Journal de Math.* (3) **4** (1878), str. 5—56, 377—416.

[6] Debye P. — *Math. Annalen* **67** (1909).

[7] Doetsch G. — Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. *Journal für reine und angew. Math.* **167** (1931), str. 274—293.

[8] Ford W. E. — The asymptotic developpments of functions defined by Maclaurin series. Univ. of Michigan Press, 1936.

[9] Haar A. — Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen. *Math. Annalen* **96** (1926), str. 69—107.

[10] Hausdorff F. — Summationsmethoden und Momentfolgen. *Math. Zeitschrift* **9** (1921), str. 74—109, 280—299.

[11] Helly E. — Über lineare Funktionaloperationen. *Wiener Sitzungsberichte* (IIa) **121**, str. 265—297.

[12] Karamata J. — (a) Sur certains développements asymptotiques avec applications aux polynomes de Legendre. *Publ. de l'Institut math. de l'Académie serbe des sciences* **4** (1952), str. 69—88. (b) Теорија и пракса Стилтјесова интеграла, Београд 1949.

[13] Laplace — Suplément à la Mécanique céleste, Paris 1827.

[14] Magnus W. und Oberhettinger F. — Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Berlin 1943.

[15] Nevanlinna F. — Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen. *Ann. Acad. Sc. Fennicae* (A) **3** (1916).

[16] Newsom C. V. — Thesis. Univ. of Michigan Press, 1931.

[17] Perron O. — Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen. *Münchener Berichte* (1917), str. 191—220.

[18] Poincaré H. — Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Math.* **8** (1886), str. 295—344.

[19] Riesz F. — (a) Sur les opérations fonctionnelles linéaires. *Comptes Rendus* (29 novembre 1904). (b) Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. *Ann. Ec. Norm.* (3) **XXVIII** (1911), str. 33—62. (c) Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires. *Ann. Ec. Norm.* (3) **XXXI** (1914), str. 9—14.

[20] Schmidt H. — (a) Über asymptotische Entwicklungen mit allgemeiner Skala *Jahresber. der Deutschen Math. Ver.* **44** (1934), str. 49—51. (b) Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. *Math. Annalen* **113** (1937), str. 629—656.

[21] Stekloff W. — Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, definies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leur applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions. *Communications de la Soc. Math. de Kharkow* (2) **10** (1907), str. 97—200.

[22] Stieltjes Th. J. — (a) Recherches sur quelques séries semi-convergentes. *Ann. Ec. Norm.* (3) **3** (1886), str. 201—258. (b) Recherches sur les fractions continues. *Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse* **8** (1894), str. 1—122; **9** (1895), str. 1—47.

[23] Szegö G. — (a) Orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ.* **XXIII**, 1939. (b) Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegunsfunktion gehören. *Math. Annalen* **110** (1934), str. 501—513. (c) Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. *Schriften der Königsberger Gesellschaft, naturwiss. Klasse*, **10** (1933), str. 35—112.

[24] Watson G. N. — (a) A theory of asymptotic series. *Trans. of the Royal Soc. of London* (A) **211**, str. 279—313. (b) *Proc. London Math. Soc.* (2) **17** (1918), str. 133.

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN *A*-SUMMIERBARER LINEARER FUNKTIONELLEN

SLOBODAN ALJANČIĆ

Es sei F_c der Funktionalraum aller stetigen Funktionen, $f(t) \in F_c$ und $\alpha_n(t)$ von beschränkter Schwankung in $(0, \infty)$. Es ist nicht schwer, durch sukzessive Anwendung des bekannten Rieszschen [19] Satzes, einzusehen, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen eine vom (nicht notwendig ganzzahligen) Parameter n abhängige lineare Funktionelle

$$(*) \qquad A_n[f] = \int_0^\infty f(t)\, d\alpha_n(t)$$

eine nach allgemeiner Skala $\{q_\mu(n)\}$ fortschreitende asymptotische Entwicklung

$$(**) \qquad A_n[f(t)] \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_\mu}{q_\mu(n)}, \quad n \to \infty,$$

gestatten würde, wenn eine solche ihre Erzeugende $\alpha_n(t)$ besitzt. Da aber hier der Spielraum der Funktionen $f(t)$ ziemlich weit ist — der ganze Funktionalraum F_c — ist dadurch derjenige der Erzeugenden

$\alpha_n(t)$ wesentlich gekürzt. Es sei bloss darauf hingewiesen, dass von der Struktur der Erzeugenden nicht nur die Konvergenz des uneigentlichen Stieltjesschen Integrals (*), sondern auch derjenigen uneigentlichen Integrale welche die Koeffizienten c_μ der asymptotischen Entwicklung (**) bestimmen, abhängt. Deswegen ist es naheliegend, den Begriff der linearen Funktionelle in dem Sinne zu erweitern, dass man nicht nur konvergente, sondern auch A-summierbare Stieltjessche Integrale, d. h. solche bei welchen

$$\mathfrak{A}_n[f] = \lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\alpha_n(t)$$

existiert, zulässt. Da in disem Falle von einer ähnlichen Aussage über asymptotische Entwicklung, die notwendige und hinreichende Bedingungen enthalten würde, kaum die Rede sein könnte, begrenzen wir uns hier auf eine spezielle Klasse A-summierbarer linearer Funktionellen und geben gewisse hinreichende Bedingungen für deren asymptotische Entwicklung.

Es sei $\alpha(t)$ von beschränkter Schwankung in $(0, \infty)$. Wir betrachten A-summierbare lineare Funktionellen, bei welchen

$$f(t) = e^{-i\tau t}\, \psi(t), \quad \tau \text{ reeller Parameter,}$$

mit

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-tu}\, d\alpha(u)$$

ist. Speziell, kann also $\psi(t)$ der Klasse der im Interval $(0, \infty)$ totalmonotonen Funktionen angehören.

Bevor wir zur Formulierung unserer Sätze übergehen, geben wir einige Erklärungen. Es bezeichne $\pi_\mu(t)$ ein Polynom μ-ten Grades und $\omega_\mu(t)$ eine periodische Funktion der Periode $h > 0$. Wir sagen dann, dass $F(t)$ der Klasse Ω_h^m angehöre, wenn es die Form

$$F(t) = \omega_0(t)\, \pi_m(t) + \omega_1(t)\, \pi_{m-1}(t) + \cdots + \omega_m(t)$$

hat. $F(t)$ aus Ω_h^m genügt der Differenzengleichung

$$\Delta_h^{m+1} U = 0,$$

wo

$$\Delta_h^k U \text{ für } U(t) - \binom{k}{1} U(t+h) + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} U(t+hk)$$

gesetzt ist.

Es sei $q_\mu(n)$, $\mu = 0, 1, \ldots$ eine Funktionenfolge, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\frac{q_\mu(n)}{q_{\mu+1}(n)} \to 0, \quad n \to \infty \text{ und } q_\mu(n) \neq 0 \ (\mu = 0, 1, \ldots)$$

Wir sagen dann, dass $\{q_\mu(n)\}$ eine allgemeine Skala bildet.

Nun gehen wir zu Sätzen über asymptotische Entwicklung A-summierbarer linearer Funktionellen über. Die Funktion $\varphi(t;\lambda)$ gestatte die asymptotische Entwicklung nach allgemeiner Skala $\{q_\mu(\lambda)\}$:

$$\varphi(t;\lambda)=\frac{p_0(t)}{q_0(\lambda)}+\frac{p_1(t)}{q_1(\lambda)}+\ldots+\frac{p_l(t)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

wo die Koeffizienten $p_\mu(t)$, $\mu=0,1,\ldots,l$ der Klasse Ω_h^m angehören. Dann existieren für $\tau\neq 2s\pi/h$, $s=0,\pm 1,\ldots$ die Grenzwerte

$$\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,d\varphi(t;\lambda)=g(\tau;\lambda),$$

$$\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\,dp_\mu(t)=P_\mu(\tau),\quad \mu=0,1,\ldots,l,$$

und es gilt

$$g(\tau;\lambda)=\frac{P_0(\tau)}{q_0(\lambda)}+\frac{P_1(\tau)}{q_1(\lambda)}+\ldots+\frac{P_l(\tau)}{q_l(\lambda)}+o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

gleichmässig in $2s\pi/h+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant 2(s+1)\pi/h-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/h$, $s=0\pm1,\ldots$, wenn für ein ganzzahliges $K>m$, entweder

(i) die Schwankung W

$$W_0^\infty\{\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)\}=o\left(\frac{1}{q_l(\lambda)}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

oder, (ii)

$$W_o^T\{\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)\}<\frac{M}{q_l(\lambda)},\quad M \text{ frei von } \lambda,$$

und für $t\geqslant T$

$$\Delta_h^K\varphi(t;\lambda)\quad \text{monoton}\ \to 0,\quad t\to\infty.$$

Hieraus folgen, mit zweckmässiger Übertragung unserer Erklärungen, analoge Sätze für Reihen, speziell für A-summierbare trigonometrische Reihen, und für Riemannsche Integrale der Form

$$\lim_{r=1}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu b_\nu(\lambda)\,r^\nu e^{\nu\theta i}$$

und

$$\lim_{\sigma=0}\int_0^\infty e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}\psi(t)\chi(t;\lambda)\,dt.$$

Für A-summierbare trigonometrische Reihen bewies bereits Prof. Karamata [**12** *a*] einen diesem Ideenkreis angehörigen Satz, welcher auch für diese Arbeit Anregung gab. Im Falle Riemannscher Integrale, wenn $(-1)^K\chi(t;\lambda)$ eine K-te partielle Ableitung nach t, die $\geqslant 0$ ist und monoton gegen Null strebt, besitzt und die Koeffizienten $p_\mu(t)$ Polynome

in t sind, gelten analoge Aussagen und ihr Gültigkeitsbereich besitzt im Endlichen nur $\tau=0$ als Ausnahmestelle.

Die dargestellte Methode der asymptotischen Entwicklung zeichnet sich dadurch aus, dass sie, wenn einmal über ihre Anwendbarkeit entschieden ist, unbegrenzt viele verschiedene asymptotische Entwicklungen einer A-summierbaren linearen Funktionelle liefert. Nämlich, jede asymptotische Eutwicklung der Erzeugenden spiegelt sich in einer der linearen Funktionelle. So z. B. erhielten wir für ultrasphärische Polynome $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$, von ihrer trigonometrischen Darstellung (4.1.1) oder (4.1.2) ausgehend, drei verschiedene asymptotische Entwicklungen ($n\to\infty$). Wenn F die hypergeometrische Funktion bedeutet, α, β, γ Parameter sind und der Kürze halber

$$(x)^{(\nu)}=x(x+1)\dots(x+\nu-1),\quad (x)^{(0)}=1;$$

$$(x)_{(\nu)}=x(x-1)\dots(x-\nu+1),\quad (x)_{(0)}=1;$$

gesetzt wird, so ist gleichmässig in $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\dfrac{2}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\lambda+1)}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot \\ \qquad\cdot\displaystyle\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{(n+\alpha+\lambda+1)^{(\mu)}\,\mu!}f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)+o(n^{\lambda-l-1}), \\ f_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)=\Im\left\{\dfrac{e^{(n+2\lambda+1)\theta i}}{(1-e^{2\theta i})^{\lambda-\lambda+1}}F(-\mu,\ \alpha;\ \lambda-\mu;\ 1-e^{-2\theta i})\right\}; \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\dfrac{2}{\Gamma(\lambda)}\dfrac{\Gamma(2\lambda+n)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\beta+\lambda+1)}\cdot \\ \qquad\cdot\displaystyle\sum_{\mu=0}^{l}\frac{(\lambda)^{(\mu)}(1-\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\beta)_{(\mu)}}g_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)+o(n^{\lambda-l-1}), \\ g_{\mu}^{(\lambda)}(\theta)=\Im\left\{i\dfrac{e^{i[(n+\lambda-\mu)\theta-(\lambda+\mu)\pi/2]}}{(2\sin\theta)^{\lambda+\mu}}F(-\mu,\ \lambda-\beta-1;\lambda-\mu;\ 1-e^{2\theta i})\right\}; \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{cases} P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)=\dfrac{2\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\,n!}(2\sin\theta)^{1-2\lambda}\cdot \\ \qquad\cdot\displaystyle\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu}\frac{(\lambda)^{(\mu)}}{\mu!\,(n+\gamma)^{\mu+\lambda}}\Im\{e^{(n+1)\theta i}\,h_{\mu}^{(\lambda)}(e^{2\theta i})\}+o(n^{\lambda-l-1}), \\ \text{wobei } h_{\mu}^{(\lambda)}(z) \text{ durch} \\ \qquad e^{(1-\gamma)x}\left(\dfrac{x}{e^{x}-1}\right)^{\lambda}(1-ze^{x})^{\lambda-1}=\displaystyle\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{h_{\mu}^{(\lambda)}(z)}{\mu!}x^{\mu}. \end{cases}$$

bestimmt ist. Für spezielle Werte der Parameter α, β, γ ($\alpha=0$, $\beta=\lambda-1$, $\gamma=0$) gehen diese Entwicklungen in bereits bekannte (s. Szegö [**23***a*], S. 191 und 206) über.

Als Beispiel asymptotischer Entwicklung A-summierbarer Riemannscher Integrale, führen wir die Entwicklung der Funktion

$$Z_\nu(\tau, x)=\int_0^\infty e^{i\tau t}\, t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2x}\right)^{\nu-1/2} dt, \quad -1/2<\nu<1/2,$$

an. Es ist

$$Z_\nu(\tau, x)=(-i\tau)^{-\nu-1/2}\sum_{\mu=0}^{l}\binom{\nu-1/2}{\mu}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1/2)}{(-2i\tau x)^\mu}+o(x^{-l}), \quad x\to\infty,$$

gleichmässig für $|\tau|\geqslant\varepsilon>0$, woraus für $\tau=1$ und $-1/2<\nu<1/2$ die bekannte asymptotische Entwicklung der Hankelschen Funktion $H_\nu^{(1)}(x)$ folgt.