Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИЛОРАД М. ЈОВИЧИЋ

НЕПОСРЕДНА ГРАФИЧКА РЕСТИТУЦИЈА КОСЕ АКСОНОМЕТРИЈЕ

Постављање проблема. Два основна задатка Нацртне геометрије су да се омогући за сваки од различитих начина пројектовања јединичног ортогоналног триедра:

1) непосредно цртање жељене пројекције триедра кад је дата величина јединичног вектора и међусобни положај триедра, центра пројектовања и пројекциске равни, и

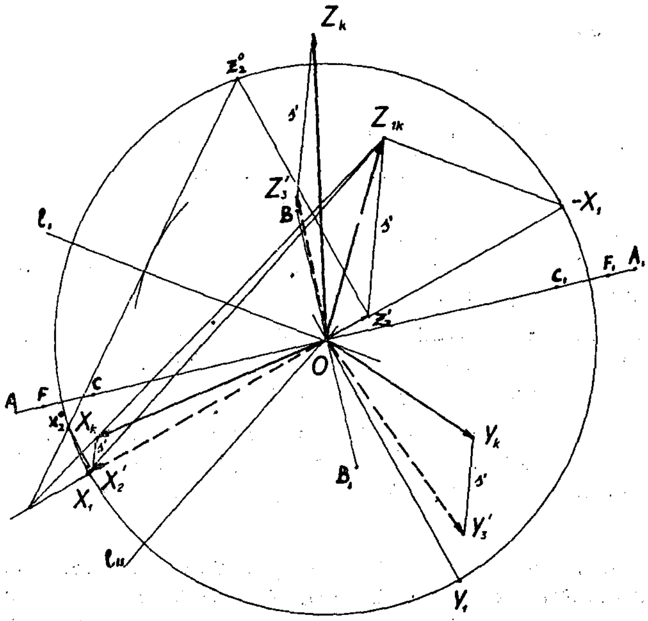
2) непосредна графичка реституција дате пројекције триедра — непосредно графичко одређивање праве величине јединичног вектора и положаја триедра, и центра пројектовања према равни слике.

Историски развој. За брзу и лаку израду перспективних слика које ће створити потребан перспективан-дубински утисак најподеснија пројекција је коса аксонометрија, па су у току изграђивања графичких поступака Нацртне геометрије објављени многобројни радови — и данас се још објављују — у којима се предлажу различита решења горња два задатка за косу аксонометрију.

Карл Полке је 1853 г. формулисао решење првог задатка теоремом: за косу аксонометрију координатног почетка и три краја јединичних вектора ортогоналног триедра могу се узети четири произвољне тачке на цртежу, под условом да нису све на истој правој. Полке није објавио доказ своје теореме, нагласио је само његову сложеност. Како је исправност теореме оспоравана, публиковао ју је Јакоб Штајнер у *Journal für reine und angewandte Mathematik* **55** (1858), стр. 356—378, као проблем који треба решити. После неуспелих радова Дешвандена и Кинкелина, први је Полкеов ученик Шварц доказао исправност теореме, решивши елементарним аналитичким апаратом општији проблем: за дати тетраедар произвољног облика може се одредити правац паралелног пројектовања и положај пројекциске основе тако да пројекција тетраедра буде слична датом четворотеменику у равни.

Сви каснији докази Полкеове теореме су претежно аналитички и своде се на Шварцову примену сличних фигура упроњену афином сродношћу. Ни један од њих није дао непосредну и прихватљиву графичку реституцију. То се покушава овим радом.

Решење проблема. Постављам ортогонални јединични триедар $OXYZ$ у произвољан положај према пројекциској равни Π са почетком O у Π, и пројектујем га произвољним паралелним зрацима s у косу аксонометрију $OX_k\,Y_k\,Z_k$. (сл. 1) Да бих раван



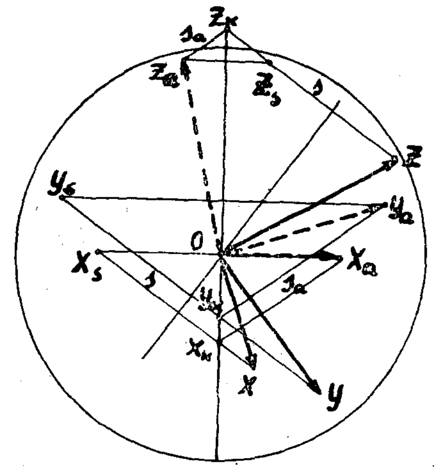
Сл. 1

OXY триедра положио у Π, обрћем га најпре око вектора OX док вектор OY не дође у Π у положај OY_1. При томе стално пројектујем триедар зрацима s, па се тачке Y и Z пројектују у крајеве спрегнутих полупречника елипсе — пројекције круга обртања. Нова пројекција триедра је $OX_k\,Y_1\,Z_{1k}$. Затим обрћем триедар око вектора OY_1, док не доведем и вектор OX у Π у положај OX_1. При томе стално пројектујем тачку Z у Z_{1k}, а X паралелним зрацима у низ тачака X_i.

Пројекциски зраци тачке Z образују елиптички конус са врхом Z_{1k}. Његов кружни пресек — круг обртања тачака Z и X — управан је на Π, па је Π раван главног пресека конуса кроз малу осовину, праве $X_1\,Z_{1k}$ и $-X_1\,Z_{1k}$ су изводнице конуса у Π, а дуж $Z_{1k}\,O$ је пречник конуса спрегнут равни круга. Тачке Z и X су спрегнуте на кругу, па зраци тачке X паралелни изводницама конуса образују једнограни троосни хиперболоид коме је средиште тачка O, а конус асимптотски транслаторно померен за дуж OZ_{1k}. Пресек хиперболоида и Π је низ пројекција X_i тачке

X — хипербола чије су асимптоте l_{I} и l_{II} паралелне са $X_1 Z_{1k}, -X_1 X_{1k}$. Ова хипербола и горња елипса имају два једнака а управна полупречника OX_1 и OY_1, а њима спрегнут полупречник OZ_{1k} је заједнички, па су им тангенте у тачкама X_1 и Y_1 паралелне. Имају и заједничке носаче осовина, јер су ови симетрале угла асимтота уједно паралелни симетралама угла правих $X_1 Z_{1k}$ и $-X_1 Z_{1k}$, које су два зрака афинитета за елипсу и круг над пречником $Y_1, -Y_1$.

Елипса $OY_1 Z_{1k}$ може бити коса пројекција круга над ма којим њеним пречником, тј. сваки полупречник елипсе може се сматрати јединичним вектором ортогоналног триедра коме је други вектор у Π једнак и управан првом, а коса пројекција трећег вектора је спрегнута првом на елипси уједно спрегнута другом на хиперболи. За све овде могуће триедре сви положаји других вектора образују елипсу конгруентну елипси првих вектора и обрнуту према овој за 90^0. Ова друга елипса је ортогонална трајекторија породице хипербола, јер у пресечним тачкама X_1 има са њима управне тангенте. Како имају и заједничке носаче осовина, конфокалне су. Стога је за пресечну тачку X_1 збир потега велика осовина елипсе, а разлика истих потега реална осовина хиперболе, па је одавде величина једног потега збир а другог разлика полуосовина елипсе и хеперболе.



Сл. 2

На основи овога изводим графички поступак непосредне реституције дате косе аксонометрије $OX_k Y_k Z_k$:

Усвајам два вектора, на сл. 1 OY_k и OZ_k, за спрегнуте полупречнике елипсе и одредим графички њене осовине, $2a$, $2b$, окренем их око средишта O за 90^0 и нађем жиже F, F_1 на великој осовини AA_1 окренуте елипсе. Трећи вектор OX_k је полупречник хиперболе конфокалне елипси, и помоћу потега тачке X_k одредим реалну осовину $2c$ хиперболе. Потезима $a+c$ и $a-c$ одредим тачку X_1, пресек елипсе и хиперболе, и тачку Y_1 спрегнуту X_1 на кругу. Дуж OX_1 је права величина јединичног вектора триедра, а права OX_1 је ортогонална пројекција праве OX.

Да бих одредио правац пројекциских зрака s и положај триедра Π, уцртам најпре тачку Z_{1k} спрегнуту тачки X_1 хиперболе уједно и тачки Y_1 елипсе $Y_k Z_k$. Тачке Z_{1k} и X_k су спрегнуте тачке елипсе — косе пројекције круга управног на Π, са заједничким пречником $-X_1, X_1$. Помоћу афинитета одредим на кругу, обореном у Π око $-X_1, X_1$, афини пар спрегнутих тачака Z_2^0, X_2^0 и пројектујем их спонама обртања у Z'_2, X'_2, ортогоналне пројекције тачака Z, X кад је Y у Π. Овим је одређен положај тачке X и зрак $s = X X_k$. Ортогоналне пројекције Y'_3 и Z'_3 тачака Y и Z одређујем из тачака Y_k, Z_k зрацима s помоћу јединичне лопте или на пр. помоћу афинитета елипсе $O\,Y_1\,Z_{1\,k}$ на којој су тачке Y_k, Z_k, и елипсе $O\,Y_1\,Z'_2$, на којој су тражене ортогоналне пројекције Y'_3, Z'_3 тачака Y и Z.

Осим овако одређеног положаја триедра, дата коса аксонометрија одређује још један положај триедра (сл. 2): тачке X_s, Y_s, Z_s симетричне тачкама X, Y, Z обзиром на раван кроз средиште O управну на зраке s, дају нов ортогонални триедар супротне диспозиције, који се истим зрацима пројектује у дату косу аксонометрију. Кад се одреди њему симетричан триедар X_a, Y_a, Z_a обзиром на Π, овај трећи триедар је симетричан другом, дакле има исту диспозицију осовина као и први и пројектује се у дату косу аксонометрију зрацима s_a симетричним s обзиром на Π.

UNMITTELBARE GRAPHISCHE RESTITUTION IN DER SCHIEFEN AXONOMETRIE

MILORAD M. JOVIČIĆ

Es wird ein graphisches Verfahren der Restitution und damit zugleich ein Beweis des Pohlkeschen Satzes in folgender Weise durchgeführt:

Sei $OXYZ$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Achsenkreuz, dessen Anfangspunkt O in der Bildebene Π enthalten ist, und s_1 die Sehrichtung. Zuerst wird das Achsenkreuz um OX gedreht, bis OY in Π fällt; es sei dann $Z_{1\,k}$ die Projektion von Z. Danach wird es um OY gedreht, bis auch OX in Π fällt. Bei der ersten Drehung bewegen sich Y und Z längs eines Kreises, dessen zu s_1 parallele Projektion eine gewisse Ellipse ist. Bei der zweiten Drehung projiziere man Z und X parallel so, dass sich Z stets nach $Z_{1\,k}$ projiziert; dann bewegt sich die Projektion von X längs einer Hyperbel. Durch die Betrachtung jener Ellipse und dieser Hyperbel gewinnt der Autor sein Verfahren:

Ist $O\,X_k\,Y_k\,Z_k$ die gegebene schiefe Projektion des Achsenkreuzes, so bestimme man die Achsen der Ellipse, dessen konjugierte Halbmesser z. B. $O\,Y_k$ und $O\,Z_k$ sind und drehe sie um 90° um den Punkt O. Dann ist $O\,X_k$ Halbmesser einer konfokalen Hyperbel, also man bestimme ihre Hauptachse und sodann den Schnittpunkt X_1 von Ellipse und Hyperbel; $O\,X_1$ ist die wahre Grösse von $O\,X$. Da $Z_{1\,k}$ Endpunkt des zu $O\,X_1$ konjugierten Halbmessers der Hyperbel ist, ermittelt man leicht auch die Richtung s_1.