Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

ВОЈИСЛАВ Г. АВАКУМОВИЋ

О ТЕМЕНИМА ЗАТВОРЕНЕ КРИВЕ

1.1. Најједноставнија теорема диференцијалне геометрије у великом је несумњиво она коју је дао Mukhopadyaya [1, стр. 17—18]:

Теорема А. *Кривина затворене конвексне криве у равни има најмање четири темена.*

При томе се territorijaтеменима криве зову оне тачке у којима извод кривине по луку мења свој знак.

Ова теорема је више пута доказивана и у разним правцима уопштавана. Између осталога, показано је да споменута теорема важи већ и онда ако је кривина непрекидна, у ком случају се под теменом криве подразумева она тачка у којој кривина постизава своје највеће одн. најмање вредности. Поред тога, закључак теореме А важи и онда, као што је то приметио D. Fog [2], ако уочена крива нема двојних тачака а лежи у равни или на лопти.

Уопштења, одн. аналогони теореме А које ћу овде доказати леже у једном другом правцу.

1.2. У овоме раду ја ћу се бавити кривима које имају особину да је први извод њиховог вектора положаја стално различит од нула-вектора а четврти извод непрекидан.

Затворену конвексну криву у простору дефинишемо овако:

Затворена крива у простору је затворена конвексна крива ако кроз ма које две тачке на кривој пролази најмање једна раван која са кривом нема других заједничких тачака.

Вектор положаја криве обележаваћу са $\mathfrak{r}_1$ а дужину њеног лука са s, дакле $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1\,(s)$.

$\mathfrak{t}$ одн. $\mathfrak{n}$ одн. $\mathfrak{b}$ означавају ортове тангенте одн. главне нормале одн. бинормале криве $\mathfrak{r}_1$. $\varkappa$ одн. τ означавају кривину одн. торзију криве $\mathfrak{r}_1$. Ако крива $\mathfrak{r}_1$ лежи на некој површини онда $\varkappa_N$ одн. $\varkappa_g$ означавају кривину нормалног пресека одн. геодезијску кривину криве с обзиром на површину у којој крива лежи. Цртице обележавају изводе по s.

1.3. Како смо претпоставили да $\mathfrak{r}_1$ има четири непрекидна извода, екстремне тачке скалара $\varkappa$, τ, $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ су оне тачке у којима $\varkappa'$, τ', $\varkappa_N'$ и $\varkappa_g'$ мењају свој знак.

Циљ овог рада је да се докажу следеће две теореме.

Теорема 1. *Ако је $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}_1(s)$ затворена конвексна линија кривине, тада $\varkappa_g$ и $\varkappa_N$ имају најмање четири екстремне тачке.*

У равни и на лопти је свака крива линија кривине; поред тога у равни је $\varkappa=\varkappa_g$, а на јединичној лопти је $\varkappa^2=1+\varkappa_g^2$. Према томе теорема 1 садржи као специјалан случај теорему А и њен анологон на лопти.

Теорема 2. *Ако је $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}_1(s)$ затворена крива а*

$$\mathfrak{r}_2(s)=\mathfrak{r}_2(0)+\int_0^s \mathfrak{n}\, ds$$

затворена конвексна крива, тада τ и $\varkappa$ имају најмање четири екстремне тачке.

Ради лакшег разумевања навешћу прво неке дефиниције и обрасце везане за појам појаса криве [1, стр. 12—14].

1.4. Ако је за неку криву $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}_1(s)$ везан неки помични ортогонални триједар

$$\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_1(s),\quad \mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_2(s),\quad \mathfrak{a}_3=\mathfrak{a}_3(s)$$

десне оријентације, а такав да се дуж целе криве орт $\mathfrak{a}_3$ поклапа са ортом тангенте криве, онда се обвојница фамилије површина дефинисаних ортовима $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ зове појас уочене криве; крива $\mathfrak{r}_1$ се зове носач појаса а орт $\mathfrak{a}_3$ нормала појаса.

Као што је познато ортови појаса задовољавају „Френеове једначине појаса“:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}'_1 &= \quad * \quad + k_3\,\mathfrak{a}_2 - k_2\,\mathfrak{a}_3\\
\mathfrak{a}'_2 &= -k_3\,\mathfrak{a}_1 \quad * \quad + k_1\,\mathfrak{a}_3\\
\mathfrak{a}'_3 &= +k_2\,\mathfrak{a}_1 - k_1\,\mathfrak{a}_2 \quad * \quad .
\end{aligned}$$

Скалар

$k_1=k_1(s)$ се зове торзија,

$k_2=k_2(s)$ се зове отступање,

$k_3=k_3(s)$ се зове кривина

носача с обзиром на уочени појас.

На основи Френеових једначина, скалари k_1, k_2 и k_3 могу се изразити помоћу образаца:

$$\begin{aligned}
k_1&=\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_3=-\mathfrak{a}'_3\,\mathfrak{a}_2,\\
k_2&=\mathfrak{a}'_3\,\mathfrak{a}_1=-\mathfrak{a}'_1\,\mathfrak{a}_3,\\
k_3&=\mathfrak{a}'_1\,\mathfrak{a}_2=-\mathfrak{a}'_2\,\mathfrak{a}_1.
\end{aligned}$$

a. Ако је дуж носача

$$k_1 \equiv 0,$$

појас се зове „кривински појас" а носач „линија кривине" појаса. У том случају је

$$0 \equiv k_1 = \tau_g, \quad k_2 = -\varkappa_N, \quad k_3 = \varkappa_g.$$

При томе се τ_g, $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ односе на појас одн. површину у којој крива лежи. Триједар појаса је природни триједар површине, тј.

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t} \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{N},$$

где $\mathfrak{N}$ означава орт нормале на површину.

b. Ако је дуж носача

$$k_2 \equiv 0,$$

појас се зове „оскулаторни појас". Уочени триједар појаса је уобичајени природни триједар криве, тј.

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{b}.$$

У том случају је

$$k_1 = \tau \quad \text{и} \quad k_3 = \varkappa.$$

c. Ако је дуж носача

$$k_3 \equiv 0,$$

појас се зове „геодетски појас" а носач „геодетска линија" појаса односно површине у којој крива лежи. У том случају се орт главне нормале носача поклапа са ортом нормале појаса па је

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{n};$$

$$k_1 = \tau, \quad k_2 = -\varkappa, \quad k_3 = \varkappa_g \equiv 0.$$

2.1. Доказаћу овај помоћни став:

Лема 1. *Означимо са* $\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{a}_i^*(s)\ (i = 1,2,3)$ *криву*

$$\mathfrak{a}_i^*(s) = \mathfrak{a}_i^*(0) + \int_0^s \mathfrak{a}_i \, ds$$

где су $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *ортови ортогоналног триједра појаса криве* $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$. *(дакле* $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{r}_1(s)$*).*

Ако је $\mathfrak{r}_1$ затворена крива дужине l а $\mathfrak{c}$ ма какав сталан вектор, онда за сваки појас носача $\mathfrak{r}_1$ важе обрасци:

$$\int_{K_\nu} \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_\nu^* \, k'_\mu \, ds = \mathfrak{c}\, k_\mu(0) \left(\mathfrak{a}_\nu^*(l) - \mathfrak{a}_\nu^*(0)\right) - \mathfrak{c} \oint \mathfrak{a}_\mu k_\nu \, ds, \quad \nu \neq \mu,$$

где K_ν означава да је интеграл узет дуж криве $\mathfrak{a}_\nu^*$.

Доказ. Довољно је да докажемо један од ових шест образаца, јер се осталих пет доказују на потпуно исти начин. Узмимо, на пример, $\nu=2$ и $\mu=3$. Тада парцијалном интеграцијом добивамо

$$\int_{K_\nu} \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2^* \, k'_3 \, ds = \mathfrak{c}\, k_3(0) \left(\mathfrak{a}_2^*(l) - \mathfrak{a}_2^*(0)\right) - \oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2 k_3 \, ds.$$

Због $k_3 = -\mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}_1$, а на основу Лангранжевог идентитета, добива се

$$\begin{aligned} -\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2 k_3 \, ds &= \oint (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}_1)\, ds \\ &= \oint (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}'_2)(\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1)\, ds + \oint (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}'_2 \mathfrak{a}_2)\, ds \\ &= -\oint (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}'_2)\,\mathfrak{a}_3 \, ds, \end{aligned}$$

јер је $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}_3$, а вектор $\mathfrak{a}'_2$ је управан на вектор $\mathfrak{a}_2$. Због $\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}'_2 = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}_2)'$ добива се парцијалном интеграцијом

$$\begin{aligned} -\oint (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}'_2)\,\mathfrak{a}_3 \, ds &= -(\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}_2)\,\mathfrak{a}_3 \Big|_0^l + \oint (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}_2)\,\mathfrak{a}'_3 \, ds \\ &= -\oint \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}'_3 \times \mathfrak{a}_2)\, ds. \end{aligned}$$

С обзиром на трећу Френеову једначину је $\mathfrak{a}'_3 \times \mathfrak{a}_2 = k_2 \mathfrak{a}_3$, па је

$$\begin{aligned} -\oint (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}'_2)\,\mathfrak{a}_3 \, ds &= -\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_3 k_2 \, ds \\ &= -\mathfrak{c} \int_0^s \mathfrak{a}_3 k_2 \, ds \Big|_0^l + \oint \mathfrak{c}' \, ds \int_0^s \mathfrak{a}_3 k_2 \, ds \\ &= -\mathfrak{c} \oint \mathfrak{a}_3 k_2 \, ds, \end{aligned}$$

јер је $\mathfrak{c}' = 0$.

2.2. Доказ теореме 1.[1]) Уочимо кривински појас криве $\mathfrak{r}_1$. Тада је, као што смо рекли, $k_2 = -\varkappa_N$, $k_3 = \varkappa_g$ и $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{r}_1$. За $\nu = 1$, $\mu = 2, 3$ обрасци помоћног става 1 гласе према томе овако:

(1) $$-\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa_N \, ds = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_2 k_1 \, ds = 0,$$

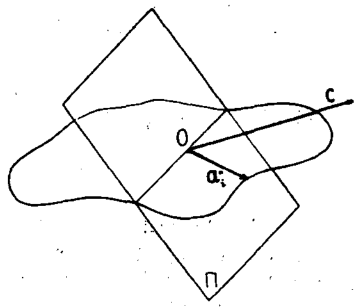
(2) $$\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa_g \, ds = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_3 k_1 \, ds = 0,$$

јер је дуж носача кривинског појаса, тј. дуж линије кривине, $k_1 \equiv 0$.

Како су $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ периодичне функције, то се њихове екстремне вредности појављују у парном броју. Отуда следи: ако претпоставимо да теорема 1 није тачна, $\varkappa_N$ и $\varkappa_g$ ће имати тачно две екстремне вредности.

Претпоставимо да $\varkappa'_N$ и $\varkappa'_g$ мењају свој знак у тачкама $s = s_1$ и $s = s_2$ (то не значи да су бројеви s_1 и s_2 исти у односу на $\varkappa_N$ и на $\varkappa_g$; но како је доказ за $\varkappa_N$ независан од доказа за $\varkappa_g$, то можемо усвојити овај скраћени начин изражавања).

По претпоставци, кроз тачке s_1 и s_2 пролази најмање једна раван *П* која са кривом нема других заједничких тачака.



Сл. 1

Како су интеграли (1) и (2) инваријантни с обзиром на избор почетка *O* вектора $\mathfrak{r}_1$, то ћемо тачку *O* изабрати у равни *П*. Стални вектор $\mathfrak{c}$ нека је управан на раван *П*. Тада изрази $\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_N$ и $\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_g$ не мењају знак (види сл. 1 са $i = 1$, тј. $\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{r}_1$). Стога је

$$\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_N \, ds \neq 0 \quad \text{и} \quad \oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_1 \varkappa'_g \, ds \neq 0$$

што се противи једначинама (1) и (2).

Доказ теореме 2. Уочимо оскулаторни појас криве $\mathfrak{r}_1$. Тада је као што смо видели $k_1 = \tau$, $k_3 = \varkappa$ и $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{n}$, па је $\mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{r}_2$. Према томе, ако је $\mathfrak{r}_2$ затворена крива, обрасци помоћног става 1 гласиће за $\nu = 1$, $\mu = 2, 3$ овако:

---

[1]) Овде употребљени поступак проширује познати поступак G. Herglotz-a [1, стр. 17—18]

$$\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2\,\tau'\,d\,s = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{a}_1\,k_2\,d\,s = 0, \tag{3}$$

$$\oint \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2\,\varkappa'\,d\,s = -\mathfrak{c}\oint \mathfrak{c}_3\,k_2\,ds = 0, \tag{4}$$

јер је дуж оскулаторног појаса $k_2 \equiv 0$. Истим поступком као и напред, а водећи рачуна о томе да је $\mathfrak{r}_2$ затворена конвексна крива исте дужине као и крива $\mathfrak{r}_1$, дошли бисмо, под претпоставком да τ и $\varkappa$ имају тачно две екстремне тачке, до закључка да

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2'\,\tau' \quad \text{и} \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{r}_2\,\varkappa'$$

не мењају свој знак (види сл. 1 са $i=2$, тј. $\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{r}_2$). Као и напред, види се да је ово у контрадикцији са једначинама (3) и (4).

На место оскулаторног појаса могли смо за доказ употребити и геодетски појас.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Blaschke W. — Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin 1940.

[2] Fog D. — Über den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen. *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wiss.* (1933). str. 251—254.

ÜBER DIE SCHEITEL DER GESCHLOSSENEN KURVEN

VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

Definition: Eine viermal stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$ wird konvex genannt falls durch je zwei auf der Kurve liegende Punkte mindestens eine Ebene geht die mit der Kurve sonst keine gemeinsame Punkte hat.

Verfasser beweist: 1. Die geodätische Krümmung $\varkappa_g$ und die normale Krümmung $\varkappa_N$ einer geschlossenen konvexen Krümmungskurve haben mindestens vier Extremalwerte.

2. Es sei $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1(s)$ eine geschlossene Kurve und

$$\mathfrak{r}_2(s) = \mathfrak{r}_2(0) + \int_0^s \mathfrak{n}\,d\,s$$

(wobei $\mathfrak{n}$ die Hauptnormale der Kurve $\mathfrak{r}_1$ bezeichnet) eine geschlossene konvexe Kurve. Dann haben die Krümmung $\varkappa$ und die Windung τ der Kurve $\mathfrak{r}_1$ mindestens vier Extremalwerte.