Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

СТАНИМИР ФЕМПЛ

О НЕКИМ РЕДУКЦИЈАМА ПОТПУНОГ НОРМАЛНОГ ЕЛИПТИЧКОГ ИНТЕГРАЛА ТРЕЋЕ ВРСТЕ

Означимо са $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$, $\Pi(n, k, \varphi)$ нормалне елиптичке интеграле I, II и III врсте са модулом k, амплитудом φ и параметром n:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi)\, d\varphi,$$

$$\Pi(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta(\varphi)},$$

при чему је

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\,. \tag{1}$$

Означимо надаље са F, E и Π_0 одговарајуће потпуне интеграле.

Јакоби је показао [1, §§ 49 – 50, стр. 139] да је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin \alpha \cos \alpha\, \Delta(\alpha) \sin^2 \varphi\, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)\, \Delta(\varphi)} = E(k, \alpha) F - F(k, \alpha) E\,.$$

Интеграл на левој страни се може изразити помоћу интеграла Π_0, јер је

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi\, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)\, \Delta(\varphi)} = \frac{\Pi(n, k, \varphi) - F(k, \varphi)}{k^2 \sin^2 \alpha}$$

(параметар $n = -k^2 \sin^2 \alpha$). Из тога следи да је

$$\Pi_0 = F + \frac{tg\,\alpha}{\Delta(\alpha)} \left[E(k, \alpha) F - F(k, \alpha) E \right], \tag{2}$$

што значи да се потпуни нормални елиптички интеграл III врсте може изразити комбинацијама потпуних и непотпуних нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. Овиме је омогућено израчунавање потпуних нормалних елиптичких интеграла II врсте помоћу постојећих таблица за елиптичке интеграле [2].

У специјалном случају $\alpha = 0$, тј. $n = 0$, је

$$\Pi_0 = F,$$

док се за случај $\alpha = \pi/2$, тј. $n = -k^2$, лако можемо уверити да је

$$\Pi_0 = \frac{E}{1 - k^2}.$$

У ова два позната случаја, потпуни нормални интеграл III врсте изражава се само потпуним интегралима I и II врсте.

Може се поставити питање: За које вредности параметра се потпуни нормални интеграли III врсте могу свести на изразе у којима се појављују само потпуни нормални интеграли I и II врсте?

Питање је утолико пре од интереса, што се – како ће се показати – у таквим изразима појављују само нормални интеграли I врсте.

У овом раду, решавајући делимично то питање на основу ниже наведених ставова, хтео бих да укажем на једну методу добијања везе између параметра и модула, применом које се решава постављено питање.

I

Параметарски угао интеграла III врсте

$$\alpha = \arc \sin \frac{\sqrt{-n}}{k}$$

има реалну вредност само у случају

$$-k^2 \leqslant n \leqslant 0; \tag{3}$$

једино у том случају, за оно што следи, биће употребљива формула (2) која, иначе, важи за све вредности α. Услед тога, биће потребно наћи подесне формуле за случај позитивног n и за случај

$-\infty < n \leqslant -k^2$. У овом другом случају, кад n лежи у размаку $(-\infty, -1)$, подинтегрална функција интеграла Π_0 има дисконтинуитет за $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{-n}}$. Та вредност φ је реална и лежи између интегралних граница, па је интеграл дивергентан. Стога, осим случаја (3), у обзир долазе још само случајеви

$$0 \leqslant n < \infty \tag{4}$$

и

$$-1 \leqslant n < -k^2. \tag{5}$$

За случај (3), због

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{-n}}{k}, \tag{6}$$

добива се из једначине (2)

$$\Pi_0 = F + \sqrt{\frac{-n}{(n+1)(n+k^2)}} \cdot$$

$$\cdot \left[E\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right) F - F\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right) E \right]. \tag{7}$$

За случај (4) може се употребити једначина [3, стр. 134]

$$(n+1)\,\Pi_0 - F + E = E - \frac{n(1-k^2)}{n+k^2}\,F + \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \left\{ FE_1 - (F-E)\,F_1 \right\},$$

из које следи

$$\Pi_0 = \frac{k^2 F}{n+k^2} + \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,(F E_1 + E F_1 - F F_1), \tag{8}$$

где је

$$F_1 = F\left(k', \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right), \qquad E_1 = E\left(k', \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right), \tag{9}$$

при чему је k' комплементаран модуо модула k:

$$k' = \sqrt{1-k^2}. \tag{10}$$

За случај (5) је

$$1 \leqslant \frac{\sqrt{-n}}{k} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Ако се сада интеграли

$$w_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{-n}}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}, \quad w_2 = \int_0^{\frac{\sqrt{-n}}{k}} \frac{\sqrt{1-k^2 z^2}}{1-z^2}\, dz,$$

узму дуж праволиниске путање, обилазећи при томе критички сингуларитет $z=1$ по једном полукругу са центром у тачки $z=1$, интеграли дуж полукруга конвергираће према нули кад полупречник путање тежи ка нули, тако да ће остати

$$F\left(k, \arcsin \frac{\sqrt{-n}}{k}\right) = F(k, \alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} +$$

$$+\frac{1}{i}\int_1^{\frac{\sqrt{-n}}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}},$$

$$E\left(k, \arcsin \frac{\sqrt{-n}}{k}\right) = E(k, \alpha) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{1-x^2}}\, dx +$$

$$+\frac{1}{i}\int_1^{\frac{\sqrt{-n}}{k}} \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{x^2-1}}\, dx.$$

Ако се у другим интегралима десне стране изврши смена

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2 t^2}},$$

биће

$$F(k, \alpha) = F - i \int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}},$$

$$E(k, \alpha) = E - i\, k'^2 \int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}} \sqrt{\frac{1-t^2}{(1-k'^2 t^2)^3}}\, dt.$$

Како због $-1 \leqslant n \leqslant 0$ излази $-n k^2 \leqslant k^2$, тј. $n k'^2 \leqslant n+k^2$, одакле следи $k'^2 \geqslant \frac{n+k^2}{n}$ и

$$\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}} \leqslant 1,$$

то се види да је горња граница последња два интеграла реална и да није већа од јединице. Зато се, после смене $t=\sin\varphi$, добива

$$F(k,\alpha)=F-iF\left(k',\ \arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right), \tag{11}$$

$$E(k,\alpha)=E-ik'^2\int\limits_0^{\arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

Како је [4, стр. 301]

$$\int\limits_0^{\psi}\frac{\cos^2\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\psi)^3}}=\frac{F(k',\psi)-E(k',\psi)}{k'^2}+\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}$$

и како је у овом случају

$$\sin\psi=\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}},\qquad \cos\psi=\frac{k}{k'}\sqrt{\frac{n+1}{-n}},$$

то је

$$\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}=\frac{1}{k'^2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}},$$

па је

$$E(k,\alpha)=E-i\left[F\left(k',\arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right)-\right.$$

$$\left.-E\left(k',\arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right)+\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\right].$$

Ако још означимо

$$F\left(k',\arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right)=F_2;\quad E\left(k',\ \arcsin\frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right)=E_2, \tag{12}$$

последња једначина гласиће

$$E(k,\alpha)=E-i\left[F_2-E_2+\sqrt{\frac{(n+1)(n+k^2)}{n}}\right],$$

а једначина (11),

$$F(k,\alpha)=F-iF_2.$$

Уношењем ових вредности у једначину (2), због (6) и због

$$\cos\alpha=\frac{i}{k}\sqrt{-(n+k^2)},$$

тј.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\Delta(\alpha)}=-i\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}},$$

ова постаје

$$\Pi_0=\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}}\,(E_2F+F_2E-F_2F), \tag{13}$$

где E_2 и F_2 имају значење (12).

II

Према начину излагања, ставове ћу поделити у две групе.

I група ставова

Нека је n параметар потпуног нормалног елиптичког интеграла III врсте Π_0, његов модуо нека је k и нека је F потпуни нормални елиптички интеграл I врсте са истим модулом.

Став 1. *За*

$$n=-(1-k') \tag{14}$$

је

$$\Pi_0=\frac{1+k'}{2k'}F. \tag{15}$$

Став 2. *За*

$$n=k \tag{16}$$

је

$$\Pi_0=\frac{\pi}{4(1+k)}+\frac{1}{2}F \tag{17}$$

Став 3. *За*

$$n=-k \tag{18}$$

је

$$\Pi_0=\frac{\pi}{4(1-k)}+\frac{1}{2}F. \tag{19}$$

Код доказивања ових ставова послужиће се адиционим теоремама за елиптичке интеграле I и II врсте које гласе [5, стр. 327—28]:

Кадгод између три амплитуде φ, ψ и σ постоји веза

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma), \tag{20}$$

увек је

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma) \tag{21}$$

и

$$E(k,\varphi) + E(k,\psi) = E(k,\sigma) + k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma. \tag{22}$$

Из ових теорема следи за $\psi = \varphi$ и $\sigma = \pi/2$:

$$F(k,\varphi) = \frac{1}{2}F, \tag{23}$$

$$E(k,\varphi) = \frac{1}{2}E + \frac{k^2}{2}\sin^2\varphi, \tag{24}$$

а амплитуда φ, због $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) = k'$, мора задовољавати једначину

$$\cos^2\varphi - k'\sin^2\varphi = 0,$$

тј.

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{k'}. \tag{25}$$

Доказ става 1. Узимајући за φ вредност

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}, \tag{26}$$

једначина (25) се своди на

$$\frac{-n}{n+k^2} = \frac{1}{k'},$$

одакле следи вредност за n:

$$n = -(1-k'). \tag{27}$$

Величина n је у овом случају негативна, а како из $k' \geqslant k'^2$ следи $-1+k' \geqslant -1+k'^2$, то је $-1+k' = n \geqslant -k^2$, па величина n припада случају (3). Услед тога се Π_0 може изразити у облику (7). Како је сада, према једначини (23),

$$F\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right)=\frac{1}{2}F,$$

а због

$$k^2\sin^2\varphi=1-k',$$

према једначини (24),

$$E\left(k, \arcsin\frac{\sqrt{-n}}{k}\right)=\frac{1}{2}E+\frac{1-k'}{2}$$

и како је за вредност n из једначине (27)

$$\sqrt{\frac{-n}{(n+1)(n+k^2)}}=\frac{1}{k'},$$

то се једначина (7) своди на облик (15), што је требало показати.

Доказ става 2. Означимо:

$$F'=F\left(k',\frac{\pi}{2}\right),\quad E'=E\left(k',\frac{\pi}{2}\right). \tag{28}$$

Тада за комплементаран модуо k' једначине (23), (24) и (25) добивају облик

$$F(k',\varphi)=\frac{1}{2}F', \tag{29}$$

$$E(k',\varphi)=\frac{1}{2}E'+\frac{k'^2}{2}\sin^2\varphi, \tag{30}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{k}. \tag{31}$$

Узимајући за φ вредност

$$\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}},$$

једначина (31) се своди на

$$\frac{n}{k^2}=\frac{1}{k}$$

одакле излази вредност за n:

$$n=k. \tag{32}$$

Овде је n позитивно, те припада случају (4). Услед тога се интеграл Π_0 може изразити у облику (8). Како је према једначинама (9) и (29)

$$F\left(k', \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right) = F_1 = \frac{1}{2} F',$$

а због

$$k'^2 \sin^2\varphi = \frac{n\, k'^2}{n+k^2},$$

према једначинама (9) и (30),

$$E\left(k', \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}\right) = E_1 = \frac{1}{2} E' + \frac{n\, k'^2}{2(n+k^2)}$$

и како за вредност n из једначине (32) следи

$$\frac{k^2}{n+k^2} = \frac{k}{1+k}, \qquad \frac{n\, k'^2}{2(n+k^2)} = \frac{1-k}{2},$$

$$\sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} = \frac{1}{1+k},$$

то се једначина (8) своди на облик

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} F + \frac{1}{2(1+k)} (E' F + F' E - F' F). \tag{33}$$

По познатој Лежандровој релацији [6] је

$$E' F + F' E - F' F = \frac{\pi}{2}. \tag{34}$$

Зато се једначина (33) своди на облик (17), што је требало показати.

Доказ става 3. Узимајући за φ вредност

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{k'} \sqrt{\frac{n+k^2}{n}},$$

једначина (31) се своди на

$$-\frac{n+k^2}{k^2(n+1)} = \frac{1}{k},$$

одакле следи вредност за n:

$$n = -k. \tag{35}$$

Величина n се у овом случају налази између -1 и $-k^2$, те припада случају (5). Услед тога се интеграл Π_0 може изразити у облику (13). Како је сада, према једначинама (12) и (29),

$$F\left(k', \arcsin \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) = F_2 = \frac{1}{2} F',$$

а због

$$k'^2 \sin^2 \varphi = \frac{n+k^2}{n},$$

према једначинама (12) и (30),

$$E\left(k', \arcsin \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{n+k^2}{n}}\right) = E_2 = \frac{1}{2} E' + \frac{n+k^2}{n},$$

и како је за вредност n из једначине (35):

$$\frac{n+k^2}{2n} = \frac{1-k}{2}, \qquad \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n+k^2)}} = \frac{1}{1-k},$$

то се једначина (13) своди на облик

$$\Pi_0 = \frac{1}{2(1-k)} (E'F + F'E - F'F) + \frac{1}{2} F.$$

Услед релације (34), ова једначина добива облик (19), што је требало показати.

II група ставова

Нека је n параметар потпуног нормалног елиптичког интеграла II врсте Π_0, његов модуо нека је k и нека је F потпуни нормални елиптички интегал I врсте са истим модулом. Нека је надаље

$$A(\lambda) = \sqrt[3]{\frac{4(1-\lambda^2)}{\lambda^4}} \tag{36}$$

и

$$N(\lambda) = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 + A(\lambda)} + \sqrt{2 - A(\lambda) + 2\sqrt{1 - A(\lambda) + A^2(\lambda)}}\right]. \tag{37}$$

Став 4. *За*

$$n = -k^2 N(k) \tag{38}$$

је

$$\Pi_0 = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{1}{1-N(k)}\right] F. \tag{39}$$

Став 5. *За*

$$n = \frac{1}{2} k'^2 N(k') - \frac{1}{4}(4 - k'^2) + \frac{k'^2}{8N(k') - 4} \tag{40}$$

је

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'} \sqrt{2N(k') - 1} - \frac{1}{3}[N^2(k') - N(k') - 2] F. \tag{41}$$

Став 6. *За*

$$n = -k^2 - k'^2 [1 - N(k')]^2 \tag{42}$$

је

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'\sqrt{2N(k') - 1}} + \frac{1}{3}[1 + N(k')] F. \tag{43}$$

За доказивање ових ставова послужићу се једним поступком који следи из мултипликативне теореме за елиптичке интеграле I врсте [**4**, стр. 338]. Ако, наиме, три амплитуде φ_{m-1}, φ_m, φ_{m+1}, задовољавају једначине

$$F(k, \varphi_{m-1}) = (m-1) F(k, \varphi),$$

$$F(k, \varphi_m) = m F(k, \varphi), \tag{44}$$

$$F(k, \varphi_{m+1}) = (m+1) F(k, \varphi), \tag{45}$$

онда између тих амплитуда мора постојати веза

$$tg \frac{\varphi_{m-1} + \varphi_{m+1}}{2} = \Delta(\varphi)\, tg\, \varphi_m, \tag{46}$$

при чему се полази од $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = \varphi$. (Краткоће ради, овај поступак није примењен на доказивање прва три става).

Зауставићу се на случају $m = 2$.

Из једначина (44), (45) и (46) добива се

$$F(k, \varphi_2) = 2F(k, \varphi), \tag{47}$$

$$F(k, \varphi_3) = 3F(k, \varphi), \tag{48}$$

$$tg \frac{\varphi + \varphi_3}{2} = \Delta(\varphi)\, tg\, \varphi_2. \tag{49}$$

За $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$, из једначина (48) и (49), следи

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{3} F, \tag{50}$$

$$tg\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \Delta(\varphi)\, tg\, \varphi_2 . \tag{51}$$

Како још за $m = 1$ из једначине (46) излази

$$tg\, \frac{\varphi_2}{2} = \Delta(\varphi)\, tg\, \varphi , \tag{52}$$

то услов (51) постаје

$$tg\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\, \Delta^2(\varphi)\, tg\, \varphi}{1 - \Delta^2(\varphi)\, tg^2 \varphi} . \tag{53}$$

На сличан начин могу се свести и интеграли II врсте. Стављајући $\psi = \varphi$ и $\sigma = \varphi_2$ у једначини (22), добива се

$$E(k, \varphi_2) = 2\, E(k, \varphi) - k^2 \sin^2 \varphi \sin \varphi_2 . \tag{54}$$

Како је на основу адиционе теореме (22):

$$E(k, \varphi_2) + E(k, \varphi) = E(k, \varphi_3) + k^2 \sin \varphi \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 ,$$

то за $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{2}$, обзиром на једначину (54), следи

$$E(k, \varphi) = \frac{1}{3} E + \frac{k^2}{3} \sin \varphi \sin \varphi_2 (1 + \sin \varphi) ,$$

а ова једначина, због једначине (52), постаје

$$E(k, \varphi) = \frac{1}{3} E + \frac{2\, k^2}{3}\, \frac{\sin \varphi\, (1 + \sin \varphi)\, tg\, \varphi\, \Delta(\varphi)}{1 + \Delta^2(\varphi)\, tg^2 \varphi} . \tag{55}$$

Види се, дакле, да се уз услов (53) елиптички интеграли I и II врсте, (50) и (55), могу изразити помоћу одговарајућих потпуних интеграла.

Из услова (53) следи

$$k^2 \sin^5 \varphi - k^2 \sin^4 \varphi - 2\, k^2 \sin^3 \varphi + 2 \sin^2 \varphi + \sin \varphi - 1 = 0 .$$

Како у обзир долазе вредности φ које се налазе између 0 и $\pi/2$, то отпада корен $\sin \varphi = -1$ последње једначине. На тај начин, место тога услова добива се услов

$$k^2 \sin^4 \varphi - 2\, k^2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi - 1 = 0 . \tag{56}$$

У обзир би дошла једино она вредност за $\sin\varphi$ која се налази између 0 и 1. Примењујући, рецимо, Штурмову теорему, лако се показује да постоји само једна таква вредност за $\sin\varphi$.

Сменом

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}(t+1),$$

горња једначина се своди на облик

$$t^4 - 6t^2 + \frac{8(2-k^2)}{k^2}t - 3 = 0.$$

Како кубна резолвента ове једначине

$$z^3 - 3z^2 + 3z - \frac{(2-k^2)^2}{k^4} = 0$$

има један реалан и два комплексна корена, то ако се стави

$$A(\lambda) = \sqrt[3]{\frac{4(1-\lambda^2)}{\lambda^4}}, \tag{57}$$

због

$$z_1 = 1 + A(k), \quad z^2 = 1 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}A(k), \quad z_3 = 1 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}A(k),$$

реални корени једначине (56) су

$$\sin\varphi_{1,2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{z_1} \mp \frac{1}{2}(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}).$$

Како је

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} = \sqrt{2 - A + 2\sqrt{1 - A + A^2}},$$

а овај израз је реалан, то је

$$\sin\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+A} \pm \sqrt{2 - A + 2\sqrt{1 - A + A^2}}\right).$$

Како је још $\sin\varphi_1 < 0$, то у обзир долази друга вредност $\sin\varphi_2$, па је

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 + A(k)} + \sqrt{2 - A(k) + 2\sqrt{1 - A(k) + A^2(k)}}\right] \tag{58}$$

тражена вредност.

Доказ става 4. Узимајући

$$n=-k^2 \sin^2 \varphi$$

тј.

$$n=-\frac{k^2}{4}\left[1-\sqrt{1+A(k)}+\sqrt{2-A(k)+2\sqrt{1-A(k)+A^2(k)}}\right]^2, \quad (59)$$

имаћемо случај (3), а на основу једначина (50) и (55), израз (7) за Π_0 постаје

$$\Pi_0=\frac{(k^2 \sin^4 \varphi-2 k^2 \sin^3 \varphi-1)-2}{3(k^2 \sin^4 \varphi-1)} F.$$

Услед једначине (56), овом изразу се може дати једноставнији облик

$$\Pi_0=\frac{1+\sin \varphi}{\sin \varphi(1-k^2 \sin^2 \varphi)} \frac{F}{3},$$

при чему $\sin \varphi$ има вредност (58). Да би се избегли компликовани изрази, последњи се разломак може још поједноставити, ако се прошири са $2-\sin \varphi$, а затим се на именилац примени једначина (56). На тај се начин добива

$$\Pi_0=\frac{(1+\sin \varphi)(2-\sin \varphi)}{(k^2 \sin^4 \varphi-2 k^2 \sin^3 \varphi+2 \sin \varphi)-\sin^2 \varphi} \frac{F}{3},$$

или

$$\Pi_0=\frac{F}{3}\left(1+\frac{1}{1-\sin \varphi}\right). \quad (60)$$

Према једначинама (36), (37) и (58), једначина (59) добива облик (38), док једначина (60) добива облик (39), што је требало показати.

Доказ става 5. За комплементаран модуо k', једначине (50), (55) и (56) добивају облик

$$F(k', \varphi)=\frac{1}{3} F', \quad (61)$$

$$E(k', \varphi)=\frac{1}{3} E'+\frac{2 k'^2}{3} \frac{\sin \varphi(1+\sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}}{1+(1-k'^2 \sin^2 \varphi) \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad (62)$$

$$k'^2 \sin^4 \varphi-2 k'^2 \sin^3 \varphi+2 \sin \varphi-1=0, \quad (63)$$

при чему је (в. (58))

$$\sin \varphi=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1+A(k')}+\sqrt{2-A(k')+2\sqrt{1-A(k')+A^2(k')}}\right]=N(k'). \quad (64)$$

И овде је $0 \leqslant \sin\varphi \leqslant 1$. Узимајући сада

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+k^2}}, \tag{65}$$

тј.

$$n = k^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{k^2 \sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}, \tag{66}$$

величина n припада случају (4). Да би се израз за n поједноставнио, последњи разломак проширићемо са $k'^2(1-\sin\varphi)^2$ и узети у обзир једначину (63). Биће

$$n = k^2 \frac{(k'^2 \sin^4\varphi - 2k'^2\sin^3\varphi) + k'^2\sin^2\varphi}{-(k'^2\sin^4\varphi - 2k'^2\sin^3\varphi) - k'^2(2\sin\varphi - 1)} = \frac{1}{2}\frac{k'^2\sin^2\varphi - 2\sin\varphi + 1}{\sin\varphi - 1/2}$$

тј.

$$n = \frac{1}{2}k'^2\sin\varphi - \frac{1}{4}(4-k'^2) + \frac{k'^2}{8\sin\varphi - 4}.$$

На основу једначина (36), (37) и (64), величина n добива облик (40). Смењујући сада у једначину (8) вредности (66), добићемо

$$\Pi_0 = F\cos^2\varphi + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi}}(E_1F + F_1E - F_1F).$$

Због једначине (65), леве стране једначина (61) и (62) претстављају величине F_1 и E_1 (в. (9)), а према овим једначинама, на основи Лежандрове релације (34), израз у загради добива облик

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2k'^2\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi(1+\sin\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{3\,[1+(1-k'^2\sin^2\varphi)\operatorname{tg}^2\varphi]}F. \tag{67}$$

Уносећи ову вредност у последњу једначину, због

$$\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi},$$

ова постаје

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} + \frac{(k'^2\sin^4\varphi - 2k'^2\sin^3\varphi - 1) - 2}{3(k'^2\sin^4\varphi - 1)}F\cos^2\varphi. \tag{68}$$

Да би се добио што подеснији облик за рачун, и први и други члан десне стране могу се упростити применом једначине (63). Биће

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{k'^2\sin^4\varphi - k'^2\sin^2\varphi}{k'^2\sin^2\varphi - 1}} = \frac{1}{k'}\sqrt{2\sin\varphi - 1}. \tag{69}$$

Коефицијент уз $\frac{1}{3} F \cos^2 \varphi$ постаће

$$\frac{1+\sin \varphi}{(1-k'^2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi},$$

а кад се овај разломак прошири са $2-\sin \varphi$ и поново примени једначина (63), добиће се

$$\frac{2+\sin \varphi - \sin^2 \varphi}{(k'^2 \sin^4 \varphi - 2 k'^2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi) - \sin^2 \varphi} = \frac{2+\sin \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Кад се ова вредност и вредност (69) унесу у једначину (68), добиће се подеснији израз са Π_0:

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'} \sqrt{2 \sin \varphi - 1} + \frac{F}{3} (2+\sin \varphi - \sin^2 \varphi).$$

На крају, ако место $\sin \varphi$ ставимо његову вредност (64), обзиром на (37), последња једначина примиће облик (41), што је требало показати.

Доказ става 6. Узимајући

$$\varphi = \arc \sin \frac{1}{k'} \sqrt{\frac{n+k^2}{n}}, \tag{70}$$

биће

$$n = -\frac{k^2}{1-k'^2 \sin^2 \varphi}. \tag{71}$$

Како је $\sin \varphi$ позитивна величина која није већа од јединице, лако се показује да се разломак у (71) налази између -1 и $-k^2$ те да, стога, величина n припада случају (5). Услед тога, за одређивање величине Π_0 узеће се једначина (13).

Израз за n може добити простији облик ако се последњи разломак најпре прошири са $\frac{1}{k'^2} - 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi$, а затим примени једначина (63). Добиће се

$$n = \frac{k^2}{k'^2} \frac{1 - 2 k'^2 \sin \varphi + k'^2 \sin^2 \varphi}{(k'^2 \sin^4 \varphi - 2 k'^2 \sin^3 \varphi + 2 \sin \varphi) - 1/k'^2} =$$

$$= -(1 - 2 k'^2 \sin \varphi + k'^2 \sin^2 \varphi) = -k'^2 (1-\sin \varphi)^2 - k^2.$$

Ако овде за $\sin\varphi$ ставимо његову вредност (64), израз за n, обзиром на (36) и (37), добива облик (42). Смењујући сада у једначину (13) вредност (71), добиће се

$$\Pi_0 = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}{k'^2\sin\varphi\cos\varphi}(E_2 F + F_2 E - F_2 F).$$

Због једначине (70), леве стране једначина (61) и (62) представљају величине F_2 и E_2 (в. (12)), а према овим једначинама, на основу Лежандрове релације, израз у загради добива облик (67). Уносећи ово у последњу једначину, добива се

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'}\sqrt{\frac{k'^2\sin^2\varphi - 1}{k'^2\sin^4\varphi - k'^2\sin^2\varphi}} - \frac{2}{3}\,\frac{\sin\varphi(1+\sin\varphi)(1-k'^2\sin^2\varphi)}{k'^2\sin^4\varphi - 1}F,$$

а ако се још код сваког имениоца примени једначина (63), биће

$$\Pi_0 = \frac{\pi}{6k'\sqrt{2\sin\varphi - 1}} + \frac{F}{3}(1+\sin\varphi).$$

Ако место $\sin\varphi$ ставимо његову вредност (64), обзиром на (37), последња једначина добива облик (43), што је требало показати.

III

Из излагања у II, јасно се види пут за изналажење онаквих вредности параметра n интеграла Π_0 код којих се тај интеграл изражава само помоћу потпуних нормалних елиптичких интеграла I и II врсте. Разумљиво је да ће се, при сваком даљем кораку, једначине компликовати. Али, на основи досадашњих резултата, ипак се могу извући неколико општих закључака.

a) За један низ вредности параметра n, израженог као функција модула k, потпуни нормални елиптички интеграл III врсте Лежандровог типа може се свести на израз у коме се појављују само потпуни нормални елиптички интеграли I и II врсте са истим модулом.

b) Изузев случаја $n = -k^2$, сви се овакви интеграли могу изразити помоћу потпуног нормалног елиптичког интеграла I врсте са истим модулом.

c) За све овакве вредности параметра, модуо и параметар увек су међусобно везани алгебарским једначинама.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. G. Jacobi — Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg 1829.

[2]. Jahnke-Emde — Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1909.

[3] С. Фемпл — Компланација косе кружне купе. *Гласник математичко-физички и астрономски* 4 (1939), №. 3.

[4] O. Schlömilch — Vorlesungen über einzelne Theile der Höheren Analysis. Braunschweig 1879.

[5] W. Laska — Sammlung von Formeln der reinen u. angewandten Mathematik. Braunschweig 1888—94.

[6] A. M. Legendre — Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes. Paris 1825.

ÜBER EINIGE REDUKTIONEN DES VOLLSTÄNDIGEN ELLIPTISCHEN NORMALINTEGRALS III GATTUNG

STANIMIR FEMPL

Es ist bekannt, dass sich vollständige elliptische Normalintegrale III Gattung durch Kombinationen von vollständigen und unvollständigen elliptischen Normalintegralen I und II Gattung ausdrücken lassen.

In dieser Abhandlung stellt der Verfasser zwei Gruppen von Bedingungen auf, die der Parameter und der Modul befriedigen müssen (Formeln (14), (16), (18), und (38), (40), (42)), damit das Legendresche vollständige elliptische Normalintegral III Gattung auf das vollständige Normalintegral I Gattung mit demselben Modul zurückgeführt werden kann (Formeln (15), (17), (19) und (39), (41), (43)).

Die Aufstellung dieser Bedingungen weist auf ein Verfahren hin, auf Grund desse man Relationen zwischen Modul und Parameter ableiten kann, welche die Reduktionen im obigen Sinne ermöglichen. Dabei sind Parameter und Modul immer durch algebraische Gleichungen verknüpft.