Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

РАНКО БОЈАНИЋ и ВЛАДЕТА ВУЧКОВИЋ

О СОПСТВЕНИМ ФУНКЦИЈАМА ГРАНИЧНОГ ЗАДАТКА МАЛИХ ОСЦИЛАЦИЈА ЕЛАСТИЧНЕ ПЛОЧЕ

0.1 (i) Нека је S произвољна отворена и ограничена област x, y – равни са непрекидним и глатким рубом S'. Нека су даље

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

сопствене вредности поређане тако да образују низ који монотоно расте, а

$$\Phi_1(P), \Phi_2(P), \ldots, \Phi_n(P), \ldots$$ [1])

одговарајуће ортонормиране сопствене функције граничног задатка

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &\Delta\Delta u - \lambda u = 0, \quad P \in S \\ &u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad P \in S', \end{aligned}$$

при чему $\partial / \partial n$ означава извод у правцу нормале на рубу S'.

У овоме раду испитиваћемо асимптотско понашање суме квадрата и производа сопствених функција граничног задатка (A), тј. асимптотско понашање функција

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n^2(P) \quad \text{и} \quad I(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q).$$

Овим проблемом бавио се специјално А. Плејел [**1**, стр. 89—98], који је, уопштавајући Карлеманов метод, доказао да је

$$\text{(I')} \qquad E(\lambda) \sim \frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}, \quad \lambda \to \infty,$$

$$\text{(II')} \qquad I(\lambda) = O(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty.$$ [2])

[1]) Са P, Q, T, Π, итд. означаваћемо, као што је уобичајено, тачке области S.
[2]) Овај образац непосредно следи из претходног применом Коши-Шварцове неједначине.

Овде ћемо дати другу апроксимацију асимптотског понашања функције $E(\lambda)$, као и прецизнију неједначину за функцију $I(\lambda)$. Другим речима, доказаћемо да је

$$E(\lambda)=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda}+O(\sqrt[4]{\lambda}),\quad \lambda\to\infty, \tag{I}$$

$$I(\lambda)=O(\sqrt[4]{\lambda}),\quad \lambda\to\infty. \tag{II}$$

Из неједначине (I) поред осталог следи да је

$$\Phi_n(P)=O(\sqrt[4]{n}),\quad n\to\infty. \tag{III}$$

Осим тога навешћемо неколико особина ζ-функције граничног задатка (А) која је за довољно велико $R(s)$ дефинисана редом

$$\zeta(P,Q;s)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s}.$$

(ii) Карлеман-Плејелов поступак за процену асимптотског понашања суме квадрата и производа сопствених функција граничног задатка (А) у најкраћим цртама састоји се у следећем. Ако са $G(P,Q;\lambda)$ означимо Гринову функцију граничног задатка (А), а са $G(P,Q)$ Гринову функцију граничног задатка

$$\begin{aligned}&\Delta\Delta u=0,\quad P\in S,\\ &u=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}=0,\quad P\in S',\end{aligned} \tag{A *}$$

тада је $G(P,Q;-\lambda)$ резолвента језгра $G(P,Q)$ [**2**, стр. 120], па је према томе

$$G(P,Q)-G(P,Q;-\lambda)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)}.$$

Међутим, $G(P,Q)$ је симетрично, позитивно дефинитно и ограничено језгро, па се према Мерсеровом ставу [**2**, стр. 117] може развити у апсолутно и униформно конвергентан билинеарни ред

$$G(P,Q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n}.$$

Према томе је

$$G(P,Q;-\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n+\lambda}.$$

Означимо са r_{PQ} растојање тачака P и Q. Како је, према дефиницији Гринове функције [1, стр. 92],

(1) $$G(P, Q; -\lambda) = R(P, Q; -\lambda) - H(P, Q; -\lambda),$$

где је

$$R(P,Q; -\lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_1^\infty e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r_{PQ}\, t/\sqrt{2}} \sin(\sqrt[4]{\lambda}\, r_{PQ}\, t/\sqrt{2}) \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{8\pi} r_{PQ}^2 \lg \frac{1}{r_{PQ}} + \ldots$$

тзв. сингуларни део Гринове функције $G(P, Q; -\lambda)$, а $H(P, Q; -\lambda)$ решење једначине

(3) $$\Delta\Delta u + \lambda u = 0$$

које на рубу S' задовољава услове

(4) $$H(P, Q; -\lambda) = R(P, Q; -\lambda), \quad P \in S',$$
$$\frac{\partial H(P, Q; -\lambda)}{\partial n} = \frac{\partial R(P, Q; -\lambda)}{\partial n}, \quad P \in S',$$

то је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n + \lambda} = \lim_{P=Q} \{R(P,Q; -\lambda) - H(P,Q; -\lambda)\} =$$

(5) $$= \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} - H(P,P; -\lambda).$$

Применом класичних Гринових образаца Плејел је показао да је

(6) $$H(Q, Q; -\lambda) = F[H_Q, H_Q] +$$
$$+ \int_{S'} \left[R(T,Q; -\lambda) \frac{\partial \Delta R(T,Q; -\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial R(T, Q; -\lambda)}{\partial n} \Delta R(T,Q; -\lambda)\right] d S'_T$$ [4])

где је једноставности ради стављено

---

[4]) Криволиниски интеграл дуж руба S' означаваћемо са

$$\int_{S'} [\ldots]\, d S'_T.$$

Слично томе

$$\int_S [\ldots]\, d S_T$$

претставља површински интеграл по области S. У оба случаја T је променљива интеграције.

$$F[H_Q,\ H_Q]=\int_S \{[\Delta H(T,Q;-\lambda)]^2+\lambda H^2(T,Q;-\lambda)\}\,d S_T .$$

Док се процена криволиниског интеграла у обрасцу (6) изводи доста једноставно, јер се под интегралом јавља функција $R(P, Q; -\lambda)$ и њени изводи, дотле се за процену асимптотског понашања израза $F[H_Q, H_Q]$ мора применити поступак сасвим друге природе, јер се ту под знаком интеграла налази функција $H(P, Q; -\lambda)$ чије се асимптотско понашање тражи.

За процену асимптотског понашања израза $F[H_Q, H_Q]$ Плејел је искористио варијациони рачун. Он је, наиме, приметио да је функција $H(T, Q; -\lambda)$ решење варијационог проблема који се састоји у томе да се нађе минимум израза

$$F[V, V]=\int_S [(\Delta V)^2+\lambda V^2]\,d S_T ,$$

при чему се за функцију $V(T)$ претпоставља да је заједно са својим изводима до четвртог реда непрекидна у области S, а на рубу S' задовољава услове

$$V(T)=R(T,Q;-\lambda)\,,\quad \frac{\partial V(T)}{\partial n}=\frac{\partial R(T,Q;-\lambda)}{\partial n},\quad T\in S'. \tag{7}$$

Одатле непосредно следи да је

$$0<F[H_Q, H_Q]\leqslant F[V, V]\,, \tag{8}$$

где је $V(T)$ произвољна функција која има непрекидне изводе до четвртог реда у области S, а на рубу S' задовољава услове (7). Таква функција је, на пример,

$$V(T)=R(T, Q; -\lambda)\,\eta(r_{TQ}),$$

где функција $\eta(r_{TQ})$ има особину да је у довољно малом кругу са центром у тачки Q једнака нули, а ван њега јединици и да су јој четврти изводи непрекидни у области S. У том случају из неједначине (8) и обрасца (6) добија се

$$|H(Q, Q; -\lambda)|\leqslant \frac{c}{l_Q}\lambda^{-3/4}, \tag{9}$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S'. Према томе је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n+\lambda}=\frac{1}{8\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-3/4})\,,\quad \lambda\to\infty\,,$$

тј.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n+\lambda}\sim\frac{1}{8\sqrt{\lambda}},\quad \lambda\to\infty\,.$$

Одавде, применом класичног Харди-Литлвудовог става Тауберове природе [1, стр. 6], следи (I′) и као непосредна последица (II′).

Уместо Харди-Литлвудовог става може се употребити Икехарин став, као што је то код аналогног граничног задатка другог реда

$$\text{(B)} \qquad \Delta u + \lambda u = 0, \quad P \in S, \qquad u = 0, \quad P \in S',$$

показао Т. Карлеман [3]. Међутим, било да се употреби Харди-Литлвудов било Икехарин став, тим путем се не могу добити прецизнији резултати од (I′), односно (II′), јер се ни један ни други став, као што је познато, не могу побољшати.

(iii) Поступак којим ћемо се овде служити за извођење неједначина (I) и (II) заснива се с једне стране на прецизнијој процени асимптотског понашања функције $H(P, Q; -\lambda)$, а с друге стране на једном ставу Тауберове природе који омогућава да се та прецизнија процена у потпуности искористи.

У првом делу овог рада доказаћемо:

Став 1. *За фиксирано Q и произвољно P области S је*

$$|H(P, Q; -\lambda)| \leqslant c\, e^{-l_Q \sqrt[4]{\lambda}/2\sqrt{2}}, \tag{10}$$

где је l_Q најкраће отстојање тачке Q од руба S' и где константа c зависи само од Q и од области S.

Овај став доказаћемо сличним поступком који је Плејел употребио за извођење неједначине (9), који се, као што смо напоменули, заснива на варијационом рачуну, за разлику од дводимензионалног случаја, где процена експоненцијалног типа за функцију $H(P, Q; -\lambda)$ непосредно следи из чињенице да решење једначине $\Delta u - \lambda u = 0$ достиже своју највећу, односно најмању вредност на рубу посматране области.

Затим ћемо у другом делу доказати поменути став Тауберове природе који у извесном смислу претставља уопштење једног става В. Г. Авакумовића [4; a, b], помоћу кога је он добио најбоље могуће процене за асимптотско понашање суме квадрата и производа сопствених функција граничног задатка другог реда (B). Став који ћемо доказати гласи:

Став 2. *Нека је $S(u)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека интеграл*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{d\{S(u)\}}{u + x}$$

конвергира за једно, па према томе за свако $x > 0$. Тада из

$$f(x) = O\left(e^{-c\sqrt[4]{x}}\right), \quad x \to \infty, \quad (c > 0), \tag{a}$$

и услова конвергенције

$$(b) \qquad S(v) - S(u) > -m \sqrt[4]{u} \quad за \quad u \leqslant v \leqslant u + u^{3/4}$$

следи

$$S(u) = O(\sqrt[4]{u}), \quad u \to \infty .$$

(iv) Из ставова 1 и 2 непосредно следе неједначине (I) и (II). Наиме, из неједначине (10) која важи за свако $Q \in S$, па према томе и за $Q = P$, с обзиром на (5) добијамо најпре

$$(11) \qquad E^*(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n + \lambda} = \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} + O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty ,$$

где је $c = l_P/\sqrt{2}$. Ако ставимо

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \Phi_n^2(P) - \frac{1}{4\pi}\sqrt{u},$$

биће

$$\int_0^{\infty} \frac{d\{S(u)\}}{u+\lambda} = E^*(\lambda) - \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} = O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \lambda \to \infty ,$$

тако да је услов (a) става 2 задовољен. Осим тога, $S(u)$ очевидно задовољава услов конвергенције (b), па је на основу става 2

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \Phi_n^2(P) - \frac{1}{4\pi}\sqrt{u} = O(\sqrt[4]{u}), \quad u \to \infty.$$

Тиме је неједначина (I) доказана.

Да бисмо доказали неједначину (II), приметимо најпре да је

$$|R(P,Q;-\lambda)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt[4]{\lambda}\, r_{PQ}/\sqrt{2}} ,$$

(в. [1], стр. 96). Из ове неједначине и неједначине (10) за функцију $H(P, Q; -\lambda)$ непосредно следи да је за $P \neq Q$

$$(12) \qquad I^*(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n + \lambda} = O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty,$$

где је $c = \mathrm{Min}(r_{PQ}/\sqrt{2}, l_Q/2\sqrt{2})$. Како је

$$\int_0^{\infty} \frac{d\{I(u)\}}{u+\lambda} = I^*(\lambda) = O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}), \quad \lambda \to \infty ,$$

то je услов (*a*) става (2) очевидно испуњен. Даље, из

$$\{I(v)-I(u)\}^2=\{\sum_{u<\lambda_n\leqslant v}\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\}^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{u<\lambda_n\leqslant v}\Phi_n^2(P)\sum_{u<\lambda_n\leqslant v}\Phi_n^2(Q)$$

и (I) добијамо

$$I(v)-I(u)=O(\sqrt[4]{u})\quad\text{за }u\leqslant v\leqslant u+u^{3/4}.$$

Према томе, услов конвергенције (*b*) je и у овом случају задовољен, тако да применом става 2 добијамо непосредно неједначину (II).

0.2. Прецизност добијених асимптотских процена за функције $E^*(\lambda)$, $E(\lambda)$, $I^*(\lambda)$ и $I(\lambda)$ омогућава нам да добијемо податке о асимптотском понашању n-те сопствене функције граничног задатка (A), као и да испитамо неке особине ζ-функције тог граничног задатка.

(i) Неједначина (III) je непосредна последица обрасца (I). Наиме, из

$$\Phi_n^2(P)=E(\lambda_n)-E(\lambda_n-\varepsilon)$$

и (I) следи

$$\Phi_n^2(P)=\frac{1}{4\pi}(\sqrt{\lambda_n}-\sqrt{\lambda_n-\varepsilon})+O(\sqrt[4]{\lambda_n})=$$

$$=O(\sqrt[4]{\lambda_n}),\quad n\to\infty,$$

тj.

$$\Phi_n(P)=O(\sqrt[8]{\lambda_n}),\quad n\to\infty.$$

Тиме je неједначина (III) доказана јер je, као што je познато [**5**],

$$\lambda_n\sim\left(\frac{4\pi}{\sigma}\right)^2 n^2,\quad n\to\infty,\tag{13}$$

где je σ површина области S.

(ii) Из неједначине (III) и обрасца (13) између осталог следи да билинеарни ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s}\tag{14}$$

којим je, као што смо рекли, за довољно велико $R(s)$ дефинисана ζ-функција граничног задатка (A), конвергира апсолутно ако je $R(s)>3/4$. Међутим, већ из Плејелових резултата (I') односно (II') следи да ред (14) конвергира за $R(s) > 1/2$. Наиме, у том случају из

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s} = \int_1^{\infty} e^{-s \lg \lambda}\, d\{I(\lambda)\},$$

сменом $\lg \lambda = u$ и парцијалном интеграцијом, добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)\,\lambda_n^{-s} = s \int_0^{\infty} e^{-su}\, I(e^u)\, du,$$

одакле следи да ред (11) конвергира за $R(s) > 1/4$, јер је према неједначини (II)

$$I(e^u) = O(e^{u/4}), \quad u \to \infty.$$

(iii) Наведимо најзад неке особине функције $\zeta(P, Q; s)$ које следе из неједначина (11) и (12). Контурном интеграцијом (в. [3]) добија се

$$\zeta(P, Q; s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda^{-s}\, I^*(\lambda)\, d\lambda + F(s), \tag{15}$$

где је $\varepsilon > 0$ и

$$F(s) = \frac{1}{2\pi}\, \varepsilon^{1-s}\, e^{\pi i (s+1)} \int_0^{2\pi} I^*(\varepsilon e^{i\theta})\, e^{i\theta(1-s)}\, d\theta.$$

Из (15) и неједначине (12) следи да је $\zeta(P, Q; s)$ цела функција са нулама у тачкама $s = 0, -1, -2, \ldots$. Кад је $P = Q$, добија се сличним поступком, с обзиром на (11)

$$\zeta(P, P; s) = \frac{\sin \pi s}{4\pi} \frac{1}{2s-1} + \frac{\sin \pi s}{\pi}\, G(s) + H(s),$$

где је $G(s)$ цела функција и

$$H(s) = \frac{1}{2\pi}\, \varepsilon^{1-s}\, e^{\pi i (s+1)} \int_0^{2\pi} E^*(\varepsilon e^{i\theta})\, e^{i\theta(1-s)}\, d\theta.$$

Према томе је $\zeta(P, P; s)$ мероморфна функција са полом у тачки $s = 1/2$ и резидуумом $1/8\pi$. Осим тога, $\zeta(P, P; s)$ има нуле у тачкама $s = 0, -1, -2, \ldots$.

Процена асимптотског понашања функције $H(P,Q;-\lambda)$

1.1. *Неједначина за* $H(P,Q;-\lambda)$. Ако је $V(T)$ регуларно решење једначине (3), тада је

$$V(P)=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}V(T)-\Delta\,G(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,V(T)}{\partial n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}\Delta\,V(T)-G(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,\Delta\,V(T)}{\partial n}\right]d\,S'_T.$$

Како је према (1) и (4), с обзиром на симетрију Гринове функције,

$$G(P,T;-\lambda)=0,\qquad \frac{\partial\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}=0,\qquad T\in S',$$

то је

$$V(P)=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}V(T)-\Delta\,G(P,T;-\lambda)\frac{\partial V(T)}{\partial n}\right]d\,S'_T.$$

Ако ставимо овде $V(T)=H(T,Q;-\lambda)$, биће

$$H(P,Q;-\lambda)=$$

$$=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,G(P,T;-\lambda)}{\partial n}H(T,Q;-\lambda)-\Delta\,G(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,H(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right]d\,S'_T.$$

Из овог обрасца, с обзиром на (1) и (4), добијамо

$$H(P,Q;-\lambda)=$$

$$=\int_{S'}\left[\frac{\partial\,\Delta\,R(P,T;-\lambda)}{\partial n}R(T,Q;-\lambda)-\Delta\,R(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,R(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right]d\,S'_T+$$

$$+\int_{S'}\left[\Delta\,H(P,T;-\lambda)\frac{\partial\,H(T,Q;-\lambda)}{\partial n}-\frac{\partial\,\Delta H(P,T;-\lambda)}{\partial n}H(T,Q;-\lambda)\right]d\,S'_T.$$

Ставимо ли, краткоће ради,

$$F\,[H_P,H_Q]=$$

$$=\int_S\left[\Delta\,H(P,T;-\lambda)\,\Delta\,H(T,Q;-\lambda)+\lambda\,H(P,T;-\lambda)\,H(T,Q;-\lambda)\right]d\,S_T,$$

тада из Гриновог обрасца

$$\int\limits_{S}(\Delta U \Delta V - U \Delta \Delta V)\,dS = \int\limits_{S'}\left(\Delta V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right)dS' \tag{1.1}$$

непосредно следи

$$F[H_P, H_Q] =$$

$$= \int\limits_{S'}\left[\Delta H(P, T; -\lambda)\frac{\partial H(T, Q; -\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial \Delta H(P, T; -\lambda)}{\partial n} H(T, Q; -\lambda)\right] dS'_T,$$

па је према томе

$$H(P, Q; -\lambda) = F[H_P, H_Q] +$$

(1.2)

$$+ \int\limits_{S'}\left[\frac{\partial \Delta R(P, T; -\lambda)}{\partial n} R(T, Q; -\lambda) - \Delta R(P, T; -\lambda)\frac{\partial R(T, Q; -\lambda)}{\partial n}\right] dS'_T.$$

Овај образац за $P = Q$ своди се, због симетрије функција $R(P, Q; -\lambda)$ и $H(P, Q; -\lambda)$, на образац (6).

Да бисмо применом Плејеловог поступка добили прецизније неједначине за функцију $H(P, Q; -\lambda)$, како у случају $P = Q$ тако и за $P \neq Q$, приметимо најпре да је

$$|F[H_P, H_Q]| \leqslant F^{1/2}[H_P, H_P] \cdot F^{1/2}[H_Q, H_Q]. \tag{1.3}$$

Према томе, процена асимптотског понашања израза $F[H_P, H_Q]$ своди се, с обзиром на симетрију функције $H(P, Q; -\lambda)$, на процену израза $F[H_\Pi, H_\Pi]$, где је најпре $\Pi = P$, а затим $\Pi = Q$.

За функцију $\eta(r_{PQ})$ из тачке 0.1 (ii) узећемо функцију дефинисану на следећи начин:

Нека је Π произвољна тачка области S и нека је l_Π најкраће отстојање тачке Π од руба S'. Ставимо

$$\eta(r) = \begin{cases} 1, & r \geqslant l_\Pi, \\ \dfrac{\chi(r)}{\chi(l_\Pi)}, & {}^1/_2\, l_\Pi \leqslant r \leqslant l_\Pi, \\ 0, & r \leqslant {}^1/_2\, l_\Pi, \end{cases}$$

где је

$$\chi(r) = \int\limits_{{}^1/_2 l_\Pi}^{r} (t - {}^1/_2\, l_\Pi)^4 (t - l_\Pi)^4\, dt.$$

Функција

$$\bar{R}(T,П;\,-\lambda) = R(T,П;\,-\lambda)\,\eta(r_{TП})$$

је непрекидна у области S заједно са својим изводима до четвртог реда, а на рубу S' очевидно задовољава услове (7), па је према (8)

$$0 < F[H_П, H_П] \leqslant F[\bar{R}_П, \bar{R}_П].$$

Коначно, из (1.2), (1.3) и ове неједначине следи

$$|H(P,Q;\,-\lambda)| \leqslant F^{1/2}[\bar{R}_P, \bar{R}_P]\,F^{1/2}[\bar{R}_Q, \bar{R}_Q] + \tag{1.4}$$

$$+\int_{S'}\left|\frac{\partial\Delta R(P,T;-\lambda)}{\partial n}R(T,Q;-\lambda)-\Delta R(P,T;-\lambda)\frac{\partial R(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right| d\,S'_T\,.$$

1.2. *Процена асимптотског понашања израза* $F[\bar{R}_П, \bar{R}_П]$ *и доказ става* 1. (i) Из Гриновог обрасца (1.1) непосредно следи

$$F[V,V] = \int_S V(\Delta\Delta V + \lambda V)\,dS + \int_{S'}\left(V\frac{\partial\Delta V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\Delta V\right)d\,S'.$$

Ако овде ставимо $V(T) = \bar{R}(T,П;-\lambda)$, онда се, на основу дефиниције функције $\eta(r_{TП})$, површински интеграл по области S своди на

$$\int_{S_П}\bar{R}(T,П;-\lambda)\,[\Delta\Delta\bar{R}(T,П;-\lambda)+\lambda\bar{R}(T,П;-\lambda)]\,d\,S_T = I_1\,,$$

где је $S_П$ област између два концентрична круга чији се центри налазе у тачки $П$, а полупречници су им $\frac{1}{2}\,l_П$ и $l_П$. Криволиниски интеграл по рубу S' очевидно је

$$\int_{S'}[R(T,П;-\lambda)\frac{\partial\Delta R(T,П;-\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial R(T,П;-\lambda)}{\partial n}\Delta R(T,П;-\lambda)]\,d\,S'_T = I_2$$

јер је на рубу $\bar{R}(T,П;-\lambda) = R(T,П;-\lambda)$. Према томе је

$$F[R_П, R_П] =$$

$$= \int_{S_П}\bar{R}(T,П;-\lambda)\,[\Delta\Delta\bar{R}(T,П;-\lambda)+\lambda\bar{R}(T,П;-\lambda)]\,d\,S_T + \tag{1.5}$$

$$+\int_{S'}[R(T,П;-\lambda)\,\frac{\partial\Delta R(T,П;-\lambda)}{\partial n} - \frac{\partial R(T,П;-\lambda)}{\partial n}\Delta R(T,П;-\lambda)]\,d\,S'_T =$$

$$= I_1 + I_2\,.$$

Остало је, дакле, да видимо како се понашају интеграли I_1 и I_2 кад $\lambda\to\infty$. При томе ћемо користити следеће неједначине за функцију $R(P,Q;-\lambda)$ и њене изводе [1, стр. 96], које важе за $0<\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\infty$ и $0\leqslant r\leqslant r_0<\infty$, где је $r=r_{PQ}$ и где је c константа која не зависи од λ, али која не мора бити увек иста:

$$|R(T,\Pi;-\lambda)|\leqslant\frac{c}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r/\sqrt{2}};\quad\left|\frac{\partial R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r}\right|\leqslant\frac{c}{\lambda^{1/4}}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r/\sqrt{2}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r^2}\right|\leqslant c\cdot\lg\sqrt[4]{\lambda}\;r\cdot e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r/\sqrt{2}},$$

$$\left|\frac{\partial^3 R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r^3}\right|\leqslant\frac{c}{r}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r/\sqrt{2}};\quad\left|\frac{\partial^4 R(T,\Pi;-\lambda)}{\partial r^4}\right|\leqslant\frac{c}{r^2}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r/\sqrt{2}}.$$

На основу претходних неједначина налази се да је

$$|\bar{R}(T,\Pi;-\lambda)|\leqslant\frac{c}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r_{T\Pi}/\sqrt{2}},$$

$$|\Delta\Delta\bar{R}(T,\Pi;-\lambda)+\lambda\bar{R}(T,\Pi;-\lambda)|\leqslant c(\sqrt{\lambda}+\lg\lambda)\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r_{T\Pi}/\sqrt{2}}.$$

Према томе је

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant c\int_{S_\Pi}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r_{T\Pi}\sqrt{2}}\,dS_T\leqslant\\ &\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,l_\Pi/\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{1.6}$$

јер је у области S_Π увек $r_{T\Pi}\geqslant{}^1/_2\,l_\Pi$.

За криволиниски интеграл I_2 налази се лако да је

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant c\int_{S'}e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,r_{T\Pi}\sqrt{2}}\,dS'_T\leqslant\\ &\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,l_\Pi/\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{1.7}$$

јер је $r_{T\Pi}\geqslant{}^1/_2\,l_\Pi,\quad T\in S'$.

Коначно, из (1.5), (1.6) и (1.7) следи

$$F[\bar{R}_\Pi,\bar{R}_\Pi]\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,l_\Pi/\sqrt{2}}.$$

(ii) За криволиниски интеграл у неједначини (1.4) добија се

$$\int\limits_{S'}\left|\frac{\partial\Delta R(P,T;-\lambda)}{\partial n}R(T,Q;-\lambda)-\Delta R(P,T;-\lambda)\frac{\partial R(T,Q;-\lambda)}{\partial n}\right|d\,S'_T\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{S'}e^{-\sqrt[4]{\lambda}(r_{PT}+r_{TQ})/\sqrt{2}}\,d\,S'_T\leqslant \tag{1.9}$$

$$\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/\sqrt{2}}.$$

(iii) Из добивених неједначина (1.8) и (1.9) непосредно следи процена асимптотског понашања функције $H(P,Q;-\lambda)$. Наиме, из (1.8) најпре следи

$$F^{1/2}[\bar{R}_P,\bar{R}_P]\cdot F^{1/2}[\bar{R}_Q,\bar{R}_Q]\leqslant ce^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/2\sqrt{2}}.$$

Из ове неједначине и (1.9), с обзиром на неједначину (1.4) добијамо коначно

$$|H(P,Q;-\lambda)|\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/2\sqrt{2}}+c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/\sqrt{2}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,(l_P+l_Q)/2\sqrt{2}}.$$

Одавде следи да је, за фиксирано Q и произвољно $P\in S$,

$$|H(P,Q;-\lambda)|\leqslant c\,e^{-\sqrt[4]{\lambda}\,l_Q/2\sqrt{2}},$$

а тиме је став **1** доказан.

Један став Тауберове природе

2.1. Овде ћемо доказати став 2, на основу кога смо добили процене асимптотског понашања функција $E(\lambda)$ и $I(\lambda)$. Без ограничења можемо претпоставити да је у услову (a) $c=1$.

Сам доказ заснива се на следећим лемама.

Лема 1. *За* $y\geqslant x\geqslant 0$ *је*

$$S(y)-S(x)>-m\sqrt[4]{x}-m'\{\sqrt{y}-\sqrt{x}\}. \tag{2.1}$$

Доказ. Нека је

$$\alpha(x)=e^{\sqrt[4]{x}},\quad \beta(x)=\lg^4 x.$$

Како је

$$\beta[\mu\,\alpha(x)] = x + 4\lg\mu\cdot x^{3/4} + O(\sqrt{x}),$$

то можемо одредити једно $\mu > 1$ тако да је за довољно велико x

$$\beta[\mu\,\alpha(x)] \leqslant x + x^{3/4}.$$

Тада је према (b)

(2.2) $$S(x') - S(x) > -m\sqrt[4]{x} \quad \text{за} \quad x \leqslant x' \leqslant \beta[\mu\,\alpha(x)].$$

Нека је $y > x$ и

$$x_{\nu+1} = \beta[\mu\,\alpha(x_\nu)] = \beta[\mu^\nu\,\alpha(x)], \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Број n изабраћемо тако да је $x_n \leqslant y \leqslant x_{n+1}$. Из неједначине (2.2) следи тада да је

$$S(x_\nu) - S(x_{\nu-1}) > -m\sqrt[4]{x_{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и

$$S(y) - S(x_n) > -m\sqrt[4]{x_n}.$$

Сабирањем ових неједначина добићемо, с обзиром на то да је $x_0 = x$,

$$S(y) - S(x) > -m\sqrt[4]{x} - m\sum_{\nu=1}^{n-1}\sqrt[4]{\beta[\mu^\nu\,\alpha(x)]}.$$

Како је

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\sqrt[4]{\beta[\mu^\nu\,\alpha(x)]} \leqslant \int_0^n \sqrt[4]{\beta[\mu^t\,\alpha(x)]}\,dt =$$

$$\leqslant \frac{1}{2\lg\mu}[\sqrt{x_n} - \sqrt{x}],$$

то је

$$S(y) - S(x) > -m\sqrt[4]{x} - \frac{m}{2\lg\mu}[\sqrt{x_n} - \sqrt{x}],$$

а одавде непосредно следи (2.1), јер је $x_n \leqslant y$.

Из неједначине (2.1) следи да је за $u \leqslant v \leqslant u+1$

(2.3) $$S(v^4) - S(u^4) \geqslant -m_1 n.$$

Лема 2. *Из* (a)* *и услова конвергенције*

$$S(v) - S(u) > -m_2\sqrt{u}, \quad u \leqslant v \leqslant \lambda u, \quad \lambda > 1,^{**}$$

---

* Довољно је, шта више, само да је

$$\int_0^\infty \frac{S(u)\,du}{(u+x)^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \to \infty.$$

** Из (2.1) непосредно следи да $S(u)$ задовољава овај услов конвергенције.

следи

$$S(u) = O(\sqrt{u}), \quad u \to \infty. \tag{2.4}$$

Доказ ове леме добија се једноставном транскрипцијом доказа једног Сасовог става [6].

На основу (2.3) и (2.4) добијамо да је за $u \leqslant v \leqslant u+1$

$$\frac{1}{v} S(v^4) - \frac{1}{u} S(u^4) > -m_3. \tag{2.5}$$

Ова неједначина очевидно следи из

$$\frac{1}{v} S(v^4) - \frac{1}{u} S(u^4) = \frac{1}{u} \{S(v^4) - S(u^4)\} - \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) S(v^4).$$

Наиме, према (2.3) је први члан десне стране $> -m_1$, а из (2.4) следи

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) S(v^4) = O(1), \quad u+1 \geqslant v \to \infty,$$

јер је у том случају $1/u - 1/v = O(1/v^2)$.

За доказ става 2 потребна нам је још позната чињеница да је, кад $x \to 0$,

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{d\{S(u)\}}{u+x} = O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2.6}$$

2.2. Доказ става II. Због (a) и (2.6) постоји

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi s} \int_0^\infty f(x) e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}} \sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\}\, dx. \tag{2.7}$$

У тачки 2.3 доказаћемо да се у овом интегралу сме изменити ред интеграције, тако да је

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty d\{S(u)\} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}} \sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\} \frac{dx}{x+u}.$$

Како је за $s > 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}} \sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\} \frac{dx}{x+u} = e^{-s\sqrt[4]{u}},$$

то је

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-s\sqrt[4]{u}}\, d\{S(u)\}. \tag{2.8}$$

Доказ се сада своди на то да покажемо да је функција $\varphi(s)$ регуларна у десној полуравни укључивши и тачку $s=0$. Да је функција $\varphi(s)$ регуларна за $R(s)>0$ следи из чињенице да интеграли (2.7) и (2.8) конвергирају за реалне и позитивне s што је непосредна последица неједначине (2.4). Да бисмо показали да је функција $\varphi(s)$ регуларна у тачки $s=0$, доказаћемо да интеграл (2.7) апсолутно конвергира ако s лежи у довољно малом кругу око нуле. То, међутим, непосредно следи из (a), (2.6) и неједначине

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant 2\, e^{|z|},$$

која важи за свако комплексно z.

Парцијалном интеграцијом интеграла (2.7) и сменом $\sqrt[4]{u} \mid u$ добијамо

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-su}\, S(u^4)\, du .$$

Ако ставимо

$$\psi(s)=\int_s^\infty \varphi(t)\, dt ,$$

тада је функција

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-su}\, S(u^4)\,\frac{du}{u}$$

регуларна у десној полуравни укључивши и тачку $s=0$.

Тиме је доказ става 2 завршен, јер из (2.5) и регуларности функције $\psi(s)$ у тачки $s=0$ следи

$$\frac{1}{u}\, S(u^4)=O(1), \quad u\to\infty ,$$

као што то произлази из познатог става Ј. Карамате [**7**, стр. 28—36.].

2.3. *Промена реда интеграције.* Остало је још једино да докажемо да се у интегралу (2.7) сме изменити ред интеграције.

(i) Нека је

$$F(x)=e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}}\sin\{s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}\}.$$

Како је за коначне R_1 и R_2

$$\int_0^{R_1} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx,$$

то је

$$\int_0^{\infty} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \lim_{R_1=\infty} \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

Доказаћемо најпре да је

$$\lim_{R_1=\infty} \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx = \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

За фиксирано R_2 нека је

$$D_1 = \int_0^{R_1} dS(u) \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx - \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{u+x}\,dx =$$

$$= \int_0^{R_2} dS(u) \int_{R_1}^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

Тада је

$$|D_1| \leqslant \int_0^{R_2} \frac{|dS(u)|}{u+R_1} \int_{R_1}^{\infty} e^{-s\sqrt[4]{x}/\sqrt{2}}\,dx \to 0,\ R_1 \to \infty.$$

Према томе је

$$\int_0^{\infty} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \int_0^{R_2} dS(u) \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{u+x}\,dx.$$

(ii) Кад $R_2 \to \infty$, биће

$$\int_0^\infty dS(u) \int_0^\infty \frac{F(x)}{u+x}\, dx = \lim_{R_2=\infty} \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x}.$$

Остало је, дакле, да докажемо да је

$$\lim_{R_2=\infty} \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} = \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x}.$$

Нека је

$$D_2 = \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x} - \int_0^\infty F(x)\, dx \int_0^{R_2} \frac{dS(u)}{u+x} =$$

$$= \int_0^\infty F(x)\, dx \int_{R_2}^\infty \frac{dS(u)}{u+x}.$$

Ставимо

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{dS(u)}{u+x} \quad \text{и} \quad g(t) = \int_0^t \frac{dS(u)}{u+1}.$$

Тада парцијалном интеграцијом добијамо

$$\int_{R_2}^\infty \frac{dS(u)}{u+x} = f(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2} + (1-x)\int_{R_2}^\infty \frac{g(t)}{(x+t)^2}\, dt,$$

тако да је

$$D_2 = \int_0^\infty F(x)\, dx \left\{ f(1) - g(R_2)\frac{1+R_2}{x+R_2} + (1-x)\int_{R_2}^\infty \frac{g(t)}{(x+t)^2}\, dt \right\}.$$

Како је $|g(t)| \leqslant M$ за $t \geqslant R_2$, то је

$$|D_2| \leqslant \int_0^\infty |F(x)| \left| f(1) - g(R_2) \frac{1+R_2}{x+R_2} \right| dx + M \int_0^\infty |F(x)| \frac{|1-x|}{R_2+x} dx.$$

Означимо са J_1 и J_2 интеграле на десној страни ове неједначине. J_2 очевидно тежи нули кад $R_2 \to \infty$. Доказаћемо да то исто важи и за J_1.

За довољно велико R_2 је

$$g(R_2) = f(1) + o(1),$$

тако да је

$$f(1) - g(R_2) \frac{1+R_2}{x+R_2} = f(1) \frac{x-1}{x+R_2} + o(1) \frac{1+R_2}{x+R_2}, \quad R_2 \to \infty.$$

Према томе је

$$|J_1| \leqslant |f(1)| \int_0^\infty |F(x)| \frac{|x-1|}{x+R_2} dx + o(1) \int_0^\infty |F(x)| \frac{1+R_2}{x+R_2} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|f(1)|}{R_2} \int_0^\infty (x+1) |F(x)| dx + o(1) \int_0^\infty |F(x)| dx,$$

тј.

$$|J_2| = o(1), \quad R_3 \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Å. Pleijel — Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes des vibrations. *Arkiv för Mat. och Fys.* **27** A, №. 13 (1940).

[2] R. Courant — D. Hilbert — Methoden der Mathematischen Physik, I, Berlin, 1931.

[3] T. Carleman — Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. *Förhandlingar Skandinaviska Matematikerkongressen,* Stockholm, 1934, 34—44.

[4] V. G. Avakumović — (a) Bemerkung uber einen Satz des Herrn T. Carleman. *Math. Zeitschr.* **53**,(1950) 53—58. (b) Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung. *Publ. de l'Inst. Math. Beograd* **4** (1952), 95—96.

[5] R. Courant — Über die Schwingungen eingespannter Platten. *Math. Zeitsch.* **15** (1922), 195—200.

[6] O. Szász — Über einige Sätze von Hardy und Littlewood. *Nachrichten v. der Gesell. der Wiss. Göttingen, Math. Phys Klasse,* (1930) 311—333.

[7] J. Karamata — Über einen Satz von H. Heilbronn und E. Landau. *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade,* **5** (1936) 28—38.

ÜBER DIE EIGENFUNKTIONEN DER SCHWINGENDEN PLATTE

RANKO BOJANIĆ und VLADETA VUČKOVIĆ

(i) Sei S ein offenes und beschränktes Gebiet der x, y — Ebene und S' der Rand von S; S' sei glatt. Ferner bezeichne $\{\lambda_n\}$ die Eigenwerte und $\{\Phi_n(P)\}$ die orthonormierten Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} &\Delta\Delta\, u-\lambda u=0, \quad P\in S,\\ &u=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}=0, \quad P\in S'; \end{aligned}$$

dabei bezeichnet P, ebenso wie nachher Q, einen Punkt aus S.

Nach Å. Pleijel [1] ist

$$\text{(1)}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n+\lambda}=\frac{1}{8\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-3/4}),\quad \lambda\to\infty,$$

woraus sich auf Grund des bekannten Hardy-Littlewoodschen Satzes Tauberscher Art ergibt dass

$$\text{(I')}\qquad E(\lambda)=\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}\Phi_n^2(P)\sim\frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda},\quad \lambda\to\infty$$

ist. Ausserdem folgt aus (I') dass

$$\text{(II')}\qquad I(\lambda)=\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)=O(\sqrt{\lambda}),\quad \lambda\to\infty$$

ist.

Will man aber für $E(\lambda)$ und $I(\lambda)$ schärfere Abschätzungen als (I') bzw. (II') erhalten, so muss man, wie dies V. G. Avakumović [4,b], bei der Behandlung der Randwertaufgabe zweiter Ordnung bemerkt hat anstatt des Hardy-Littlewoodschen Satzes einen anderen Satz Tauberscher Art verwenden. Um diese Beweisanordnung auf die Randwertaufgabe (A) übertragen zu können ist es notwendig einerseits die Pleijelsche Abschätzung zu verschärfen, anderseits einen neuen, dem Avakumovićschen analogen Satz Tauberscher Art zu beweisen.

Durch die Verschärfung der Pleijelschen Beweisanordnung für die Abschätzung der Greenschen Funktion werden folgende asymptotische Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n+\lambda} = \frac{1}{8\sqrt{\lambda}} + O\left(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n+\lambda} = O\left(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}}\right), \quad \lambda \to \infty \tag{3}$$

bewiesen.

Dann wird folgender Satz Tauberscher Art bewiesen:

Satz 2. *Sei $S(u)$ von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke und*

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{d\{S(u)\}}{u+x} \tag{4}$$

konvergent für ein (und somit für alle) $x > 0$.

Wenn $f(x)$ der Bedingung

$$f(x) = O\left(e^{-cx^{1/4}}\right), \quad x \to \infty \tag{a}$$

$(c > 0)$ und $S(u)$ der Konvergenzbedingung

$$S(v) - S(u) > -m\sqrt[4]{u} \text{ für alle } u \leqslant v \leqslant u + u^{3/4} \tag{b}$$

genügt, so ist

$$S(u) = O(\sqrt[4]{u}), \quad u \to \infty.$$

Durch Anwendung dieses Satzes gewinnt man aus (2) und (3) sowohl die zweite Approximation für die Funktion $E(\lambda)$ als auch eine verschärfte Abschätzung für die Funktion $I(\lambda)$:

(I) $$E(\lambda) = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\lambda} + O(\sqrt[4]{\lambda}), \quad \lambda \to \infty$$

und

(II) $$I(\lambda) = O(\sqrt[4]{\lambda}), \quad \lambda \to \infty.$$

Die Abschätzung (I) folgt aus dem Satze 2 wenn man

$$S(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} \Phi_n^2(P) - \frac{1}{4\pi}\sqrt{u}$$

setzt und beachtet dass auf Grund von (2) das Stieltjessche Integral (4) $O(e^{-c\sqrt[4]{\lambda}})$ ist.

(II) folgt auf dieselbe Weise indem man direkt $S(u) = I(u)$ nimmt.