Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

БОГОЉУБ СТАНКОВИЋ

РЕШЕЊЕ ЈЕДНЕ ХОМОГЕНЕ ИНТЕГРАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

1. У овом раду посматраћу линеарну хомогену интегралну једначину

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}}f(t)\,dt \tag{1}$$

која има следеће физичко тумачење.

Распоред топлоте у линеарном проводнику дат је једначином:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

Нека је проводник неограничен са оба краја и задовољава почетне услове

$$\theta(x,0)=\begin{cases} f(x) & \text{за} \quad x\geqslant 0\\ 0 & \text{за} \quad x<0.\end{cases}$$

Тада је решење парцијалне једначине провођења топлоте дато релацијом

$$\theta(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}f(u)\,du. \tag{2}$$

Нека је поред почетног услова дат и „гранични", наиме нека је у тачки $x=0$ распоред топлоте дат за свако $t\geqslant 0$ и то тако да је

$$\theta(0,t)=\frac{\lambda}{2}f(t),$$

где је λ произвољан параметар. Питање је која функција $f(t)$ може, на основу релације (2), да задовољи ове услове. Налажење функције $f(x)$ се тада своди на решавање интегралне једначине (1).

Једначину (1) можемо сматрати и као карактеристичну секуларну једначину интегралне трансформације са језгром

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{t^2}{4x}},$$

тј. трансформације

$$G(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_0^\infty e^{\frac{t^2}{4\sigma}} f(t)\,dt. \tag{3}$$

Због сличности овог језгра са језгром Гаусове трансформације,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\, e^{-\frac{(\xi-t)^2}{4\sigma}},$$

ову трансформацију назваћемо g-трансформацијом, иако се она једноставним сменама своди, у извесном смислу, на Лапласову. Према томе, решења једначине (1) су карактеристичне (сопствене) функције g-трансформације, и циљ овога рада је да покаже да је спектар карактеристичних (сопствених) вредности λ ове трансформације непрекидан, као и јединственост њима одговарајућих карактеристичних функција $f(t)$ (тј. јединственост решења сингуларне интегралне једначине (1)), ако при томе претпоставимо да се исте правилно понашају било за $t=0$, било за $t=\infty$ и то у тачки 2 наведеном смислу. Ако међутим за ова решења ништа не претпоставимо, једначина (1) има још бескрајно много решења као што се види из примедбе на крају рада.

Једначину (1) решавао је М. Пароди [1] симболичким рачуном. Лапласовом трансформацијом,

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt,$$

свео је интегралну једначину (1) на функционалну једначину

$$\varphi(s)=\frac{\lambda}{\sqrt{s}}\,\varphi(\sqrt{s}) \tag{4}$$

и показао да су за $\lambda=1$ и $\lambda=2$ решења једначине (4)

$$\varphi(s)=\frac{1}{s},$$

односно

$$\varphi(s)=\frac{\ln s}{s}.$$

Према томе, $f(t)=1$ је решење једначине (1) за $\lambda=1$, а $f(t)=\ln t+c$ за $\lambda=2$, где је c Ојлерова константа.

Овде ћемо, међутим, показати да свакој позитивној вредности λ одговара одређено решење како интегралне једначине (1), тако и функционалне једначине (4) и да су она, до на једну мултипликативну константу, једина решења која се у тачки $t=0$ или $t=\infty$ правилно понашају.

2. За функцију $q(x)$ казаћемо да се правилно понаша у близини тачке $x=0$ (односно $x=\infty$) ако задовољава релацију

$$q(x) \sim x^{\alpha} L(x) \quad \text{кад} \quad x \to 0 \quad (\text{односно } x \to \infty),$$

где је $L(x)$ позитивна и непрекидна функција за $x>0$, која припада класи споропроменљивих функција, тј. задовољава услов да

$$\frac{L(ux)}{L(x)} \to 1$$

за свако $u>0$ кад $x \to 0$ (односно $x \to \infty$).

Наведимо овде само оне особине овако дефинисане класе функција $q(x)=x^{\alpha} L(x)$ које ћемо користити у даљем раду (в. Карамата [**2, 3**]).

A. $$\frac{q(ux)}{q(x)} \to u^{\alpha}, \quad u>0, \quad x \to 0;$$

B. $$q(x) \to 0, \quad \alpha>0, \quad x \to 0;$$

$$q(x) \to \infty, \quad \alpha<0, \quad x \to 0;$$

C. Ставимо

$$\left.\begin{aligned} P_1(y) &= \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant y} \{x^{\gamma} L(x)\}, & p_1(y) &= \operatorname*{Min}_{x \geqslant y} \{x^{\gamma} L(x)\}, \\ P_2(y) &= \operatorname*{Max}_{x \geqslant y} \{x^{-\gamma} L(x)\}, & p_2(y) &= \operatorname*{Min}_{0 \leqslant x \leqslant y} \{x^{-\gamma} L(x)\}. \end{aligned}\right\} \quad (\gamma>0)$$

Тада је, кад $x \to 0$,

a. $P_1 \sim x^{\gamma} L(x)$, b. $p_1(y) \sim x^{\gamma} L(x)$,

$P_2 \sim x^{-\gamma} L(x)$; $p_2(y) \sim x^{-\gamma} L(x)$.

Према томе су $P_i(y)$ и $p_i(y)$ функције које се такође правилно понашају за $x=0$, а при томе су обе функције монотоне.

3. Обележимо са $\varphi(s)$ Лапласову трансформацију функције $f(t)$,

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

и докажимо најпре став Абелове врсте који се односи на понашање функције $\varphi(s)$ кад $s \to \infty$.

Став I. *Ако се* $f(x)$ *понаша правилно у близини* $x=0$, *њена Лапласова трансформација* $\varphi(s)$ *се правилно понаша у близини* $s=\infty$; *прецизније из*

$$f(x)\sim q(x)=x^{\alpha} L(x), \quad \alpha>-1, \quad x\to 0, \tag{6}$$

следи

$$s\,\varphi(s)\sim\Gamma(\alpha+1)\;q(1/s), \quad s\to\infty.$$

Специјално из

$$f(x)\sim|\ln x|^{\beta} L^{*}(|\ln x|), \quad x\to 0,$$

следи

$$s\,\varphi(s)\sim\ln^{\beta} s\, L^{*}(\ln s), \quad s\to\infty$$

за свако β.

Овај је став формулисао Деч [4], али га не доказује, већ само указује на главне црте његовог доказа [5]. Осим тога, став I је у извесном смислу дуалан ставу који је доказао К. Кноп [7], где је „$x\to 0$, $s\to\infty$“ замењено са „$x\to\infty$, $s\to 0$“, а који гласи

Став I*. *Ако је* $L(x)$ *споропроменљива функција,* $\alpha>-1$ *и* $q(x)=x^{\alpha} L(x)$ *тада из*

$$f(x)\sim q(x), \quad x\to\infty,$$

следи

$$s\,\varphi(s)\sim\Gamma(\alpha+1)\,q\left(\frac{1}{s}\right), \quad s\to 0.$$

Да бисмо доказали став I, докажимо претходно овај помоћни став:

Помоћни став. *Ако је* $L(x)$ *спороправљива функција и* $\alpha>-1$, *тада је*

$$\int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} t^{\alpha} L(t)\,dt\sim\Gamma(\alpha+1)\,\sigma^{\alpha+1} L(\sigma).$$

Доказ. Нека је $a>0$ и $0<\gamma<\alpha+1$; тада је

$$J(\sigma)=\frac{1}{\sigma^{\alpha+1} L(\sigma)}\int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} t^{\alpha} L(t)\,dt=\frac{1}{\sigma^{\gamma} L(\sigma)}\int_0^{a} e^{-t}\, t^{\alpha-\gamma}(\sigma t)^{\gamma} L(\sigma t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)}\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\alpha+\gamma}(\sigma t)^{-\gamma} L(\sigma t)\,dt,$$

па је на основу особине 2.С.а.

$$J(\sigma) \leqslant \frac{P_1(a\sigma)}{\sigma^{\gamma} L(\sigma)} \int_0^a e^{-t} t^{\alpha-\gamma} \, dt + \frac{P_2(a\sigma)}{\sigma^{-\gamma} L(\sigma)} \int_a^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+\gamma} \, dt,$$

а отуда

$$\lim_{\sigma=0} \sup J(\sigma) \leqslant a^{\gamma} \int_0^a e^{-t} t^{\alpha-\gamma} \, dt + a^{-\gamma} \int_a^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+\gamma} \, dt.$$

Како ово важи за произвољно мало $\gamma > 0$ то можемо пустити да $\gamma \to 0$, па је

$$\lim_{\sigma=0} \sup J(\sigma) \leqslant \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} \, dt = \Gamma(\alpha+1).$$

Сличним поступком из особине 2.С.b. следи да је

$$\lim_{\sigma=0} \inf J(\sigma) \geqslant \Gamma(\alpha+1),$$

а тиме је помоћни став доказан.

Доказ става I. Према (6) можемо ставити:

$$f(x) = x^{\alpha} L(x) + \varepsilon(x) x^{\alpha} L(x)$$

тако да

$$\varepsilon(x) \to 0, \quad x \to 0.$$

Ако још ставимо $s = \dfrac{1}{\sigma}$, тада је

$$\varphi(1/\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} t^{\alpha} L(t) \, dt + \int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} \varepsilon(t) t^{\alpha} L(t) \, dt,$$

па се, према помоћном ставу, тврђење става I своди на

$$\int_0^{\infty} e^{-t/\sigma} \varepsilon(t) t^{\alpha} L(t) \, dt = o\{\sigma^{\alpha+1} L(\sigma)\}, \quad \sigma \to 0. \tag{7}$$

Нека је $\varepsilon > 0$ и η тако изабрано да буде

$$|\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{за} \quad 0 \leqslant t \leqslant \eta;$$

тада је

$$\left| \int_0^\infty e^{-t/\sigma} \varepsilon(t)\, t^\alpha L(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\eta e^{-t/\sigma} |\varepsilon(t)|\, t^\alpha L(t)\, dt + \int_\eta^\infty e^{-t/\sigma} |\varepsilon(t)|\, t^\alpha L(t)\, dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-t/\sigma} t^\alpha L(t)\, dt + o(e^{-\eta/\sigma}) <$$

$$< \varepsilon\, \sigma^{\alpha+1} L(\sigma) + o\{\sigma^{\alpha+1} L(\sigma)\}, \quad \sigma \to 0,$$

што доказује релацију (7), а тиме је и став I доказан.

Посматрајмо, сада, g-трансформацију (1) и извршимо у њој смене

$$\frac{1}{4\sigma} = s, \qquad t = \sqrt{\tau}.$$

Тада је

$$G\left(\frac{1}{4s}\right) = \sqrt{\frac{s}{\pi}} \int_0^\infty e^{-s\tau} \frac{f(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\, d\tau$$

или

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\, d\tau,$$

$$\varphi(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, G\left(\frac{1}{4s}\right), \qquad g(\tau) = \frac{f(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}.$$

Према томе за g-трансформацију важи аналоган став ставу I који гласи:

Став II. *Нека је g-трансформација конвергентна за $0 < \sigma < \sigma_0$ и*

$$f(x) \sim x^\beta L(x^2), \quad \beta > -1, \quad x \to 0,$$

где се $L(x)$ споро мења, тада је

$$G(\sigma) \sim \frac{2^\beta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right) \sigma^{\beta/2} L(\sigma), \quad \sigma \to 0.$$

Наведимо овде још два гранична случаја ставова I и II и то:

Став III. *Нека је $\varphi(s)$ Лапласова трансформација функције $f(x)$. Ако је $f(x)$ непрекидна за $x=0$ тада је и $s\,\varphi(s)$ непрекидно за $s=\infty$, тј. из*

$$f(x) \to f(+0), \quad x \to 0,$$

следи

$$s\,\varphi(s) \to f(+0), \quad s \to \infty.$$

Став IV. *Нека је $G(\sigma)$ g-трансформација функције $f(x)$. Ако је $f(x)$ непрекидно за $x=0$, тада је и $G(\sigma)$ непрекидно за $x=0$, тј. из*

$$f(x) \to f(+0), \quad x \to 0,$$

следи

$$G(\sigma) \to f(+0), \quad \sigma \to 0.$$

4. При обради интегралне једначине (1) користићемо се решењима функционалне једначине

$$\psi(s) = \lambda \dot{\psi}(\sqrt{s}) \tag{8}$$

која претставља специјалан случај Шредерове

$$\psi(s) = \lambda \psi[\alpha(s)].$$

Између низа радова о Шредеровој функционалној једначини напоменућемо овде испитивања П. Апела [**6**] који је посматрао једначину

$$F[\alpha(x)] = F(x)$$

као уопштење једначине која дефинише периодичне функције. П. Апел наводи као пример случај када је $\alpha(x) = x^2$ што одговара једначини (8) за $\lambda = 2$ и добија решење у облику реда

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x^{2^{n+1}} (1 - x^{2^n})^2, \quad |x| \leqslant 1.$$

Међутим, лако је непосредно проверити да се опште решење једначине (8) може написати у облику

$$\psi(s) = \lambda^{\frac{ln\, ln\, s}{ln\, 2}} \omega\left(\frac{ln\, ln\, s}{ln\, 2}\right), \tag{9}$$

где је $\omega(t)$ произвољна функција периоде 1, тј. задовољава релацију

$$\omega(x+1) = \omega(x).$$

5. Вратимо се једначини (1). Ако претпоставимо да је функција десно непрекидна, тада је на основу става IV

$$f(+0) = \lambda f(+0).$$

Ова, пак, релација за $f(+0) \neq 0$ може бити задовољена само ако је $\lambda = 1$. Према томе, само ако је $\lambda = 1$ једначина (1) допушта решења која су десно непрекидна и различита од нуле за $x = 0$.

Потражимо ова решења ако при томе још претпоставимо да је за $s > s_0$ функција $e^{-ex} f(x)$ интеграбилна у размаку $(0, \infty)$.

Лапласовом трансформацијом једначина (1) своди се на функционалну

$$\varphi(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{s}}\,\varphi(\sqrt{s})$$

која, када се стави

$$s\,\varphi(s) = \psi(s),$$

прелази у једначину (8) чије је решење (9). За $\lambda = 1$ решење (9) се своди на

$$\psi(s) = \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln 2}\right). \tag{10}$$

Како, на основу става III, непрекидност функције $f(x)$ за $x = 0$ повлачи за собом непрекидност функције $\psi(s) = s\,\varphi(s)$ за $s = \infty$, то непрекидном решењу за $x = 0$ једначине (1) одговара непрекидно решење (10) за $s = \infty$. На основу периодичности функције $\omega(x)$ то је могуће само ако је $\omega(x) = \text{const.}$ тј. $\varphi(s) = 1/s$, односно $f(x) = 1$.

Став V. *Једино решење* $f(x)$ *једначине* (1) *за* $\lambda = 1$ *која има особине да је*

1. *непрекидно и различито од нуле за* $x = 0$,

2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)$ *за* $s > s_0$, *јесте* $f(x) = 1$.

Претпоставимо, даље, да је

$$f(x) \sim x^{\beta} L(x^2);$$

тада на основу става II и једначине (1) следи

$$f(x) \sim \frac{2^{\beta}\lambda}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{\beta+1}{1}\right) x^{\beta/2} L(x).$$

Да би обе ове релације могле да постоје мора да буде

a. $\beta = 0$,

b. $\dfrac{L(x^2)}{L(x)} \to \lambda, \quad x \to 0.$

Ставимо у релацији b. $x = e^{-y}$ и $L(e^{-y}) = R(y)$. Она се тада своди на

$$\frac{R(2y)}{R(y)} \to \lambda, \quad y \to \infty,$$

а ова последња је увек задовољена када је $R(y)$ облика

$$R(y) = y^{\nu} L^*(y).$$

Према томе, ако је

$$L(x) = |\ln x|^{\nu}\, L^*(|\ln x|)$$

релација b. ће бити увек задовољена ако је при томе $\lambda = 2^{\nu}$. Како ν може бити макакав број, то следи да је спектар карактеристичних вредности g-трансформације непрекидан.

Потражимо карактеристичне функције које одговарају карактеристичним вредностима $\lambda = 2^{\nu}$. Како је наш циљ да нађемо решење једначине (1) које се правилно понаша за $x = 0$, то се на основу става I, мора правилно понашати и Лапласова трансформација тог решења. Решење (9) једначине (8), пак, може се правилно понашати за $s = \infty$ само ако је $\omega(x) = \text{const.}$, па је, према томе

$$\psi(s) = \lambda^{\frac{\ln \ln s}{\ln 2}} = \ln^{\nu} s,$$

а одакле следи даје

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \ln^{\nu} s$$

Став VI. *Једино решење једначине* (1) *за* $\lambda = 2^{\nu}$ *које има особине*

1. $f(s) \sim x^{\beta} L(x^2)$, $\beta > -1$, $x \to \infty$,
2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)$, $s > s_0$,

јесте $f(x) \supset \frac{1}{s} \ln^{\nu} s$.

Видели смо да је основа читавог расматрања био став I који даје понашање Лапласове трансформације за $s = \infty$ под претпоставком о понашању $f(x)$ за $x = 0$. Међутим, ако пођемо од става I*, доћи ћемо до истих закључака и основни став који би одговарао ставу VI гласи:

Став VI*. *Једино решење једначине* (1) *за* $\lambda = 2^{\nu}$, *које има особине*

1. $f(x) \sim x^{\beta} L(x^2)$, $\beta >= 1$, $x \to \infty$,
2. $e^{-sx} f(x)$ *интеграбилно у размаку* $(0, \infty)$ *за свако* $s > 0$

јесте $f(x) \supset \frac{\ln^{\nu} s}{s}$.

6. Покажимо на крају како се може одредити функција $f(x)$ која је одређена са једначином

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{s} \ln^{\nu} s.$$

a) $\nu = k$ цео број $\geqslant 0$. Да бисмо у овом случају нашли L-функцију $f(t)$ која одговара l-функцији $\varphi(s) = \frac{\ln^{\nu} s}{s}$, пођимо од интеграла

$$s^{-x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{x-1}\, dt.$$

k-ти извод леве и десне стране релације, за $x=1$, даје

$$(-1)^k \frac{ln^k s}{s} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\frac{1}{\Gamma(x)}\right]_{x=1}^{(i)} \int_0^\infty e^{-st} (ln\, t)^{k-i}\, dt$$

тако да је тражена функција $f(x)$ дата изразом

$$f(x) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \gamma_i (ln\, x)^{k-i},$$

где смо ставили

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \frac{x^i}{i!}.$$

b) $\nu \leqslant 0$. Ставимо $\nu = -\mu$, $\mu > 0$ и користићемо следећу везу за Лапласову трансформацију [8]

$$\int_0^\infty \frac{x^t\, r(t)}{\Gamma(t+1)}\, dt \supset \frac{1}{s}\, g(ln\, s),$$

где $r(s) \supset g(s)$. У нашем случају је $g(s) = s^{-\mu}$, па је $r(t) = \dfrac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$ а одатле следи да је

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{x^t\, t^{\mu-1}}{\Gamma(t+1)}\, dt \supset \frac{1}{s}\, ln^{-\mu} s.$$

c) ν произвољан позитиван број. У случају a), за $\nu = k$ цео број $\geqslant 0$ имали смо

$$\frac{ln^k s}{s} \subset (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \gamma_i (ln\, x)^{k-i} = f_k(x),$$

а у случају b), за $\nu = -\mu \leqslant 0$

$$\frac{1}{s\, ln^\mu s} \subset \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{x^t\, t^{\mu-1}}{\Gamma(t+1)}\, dt = \varphi_\mu(x), \quad \varphi_0(x) = 0.$$

Нека је сада $\nu \geqslant 0$. Ставимо $k = [\nu - 0] + 1$, $k - \mu = \nu \geqslant 0$ и образујмо композицију од $f_k(t)$ и $\varphi_\mu(t)$, тј.

$$\frac{ln^k s}{s} \cdot \frac{1}{s\, ln^\mu s} \subset \varphi_\mu^*(t)\, f_k^*(t) = \int_0^t \varphi_\mu(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau,$$

односно

$$\frac{1}{s}\frac{ln^{\nu} s}{s} \subset \varphi_{\mu}^{*}(t)\, f_{k}^{*}(t).$$

Према томе је тражена функција

$$f(x) \supset \frac{1}{s}\, ln^{\nu} s\,, \quad \nu \geqslant 0,$$

дата изразом

$$f(x) = \frac{d}{dx}\{\varphi_{\mu}^{*}(x)\, f_{k}^{*}(x)\}.$$

Примедба. Др Ј. Карамата дао ми је пример функције која задовољава једначину (1), а која се не понаша правилно за $x = 0$ или $x = \infty$.

Ако пођемо од релације

$$\frac{x^{u}}{\Gamma(1+u)} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4x}} \frac{t^{2u}}{\Gamma(1+2u)}\, dt \tag{11}$$

па је помножимо са функцијом

$$u^{\mu-1}\, \omega\left(\frac{ln\, u}{ln\, 2}\right), \quad \omega(x+1) = \omega(x),$$

и интегришемо по u у границама од 0 до ∞, добићемо функцију

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{u}\, u^{\mu-1}\, \omega(ln\, u / ln\, 2)}{\Gamma(u+1)}\, du$$

која задовољава једначину (1) са $\lambda = 2^{-\mu}$, а не понаша се правилно. Или ако релацију (11) претходно диференцирамо довољан број пута, па је затим помножимо са истом фукцијом $u^{\mu-1}\, \omega\left(\frac{ln\, u}{ln\, 2}\right)$ добићемо решење једначине (1) са произвољно $\lambda > 0$.

Исто тако ми је Др. Ј. Карамата указао да се резултати из 6 a, b, c могу на сличан начин добити директно из релације (11).

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Parodi — Équations intégrales et transformation de Laplace, Paris 1950, pp. 65—67.

[2] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica*, Vol. IV (1930).

[3] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux. *Bull. Soc. Math. de France* **61** (1933).

[4] G. Doetsch — Handbuch der Laplace-Transformation, Basel 1950, s. 479.
[5] G. Doetsch — Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, s. 102.
[6] P. Appell — Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété $F[\varphi(x)]=F(x)$. *C. R.* **88** (1879), pp. 807—810.
[7] K. Knopp — Zwei Abelsche Sätze. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe de Sci.* **4** (1952), pp. 89—94.
[8] W. Magnus und F. Oberhettinger — Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik, Berlin 1948, s. 170.

SOLUTION D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE HOMOGÉNE

par
BOGOLJUB STANKOVIĆ

En partant des théorèmes de nature abelienne sur la transformation

$$G(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4\sigma}} f(t)\, dt\,,$$

dont quelques-uns sont démontrés dans cette note, on parvient, sur l'équation intégrale

$$f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} f(t)\, dt\,,$$

aux résultats suivants:

1. Le spectre des valeurs caractéristiques de cette équation intégrale est continu.

2. On a montré l'existence des fonctions caractéristiques de cette équation intégrale ainsi que leur unicité si on se limite à la classe des fonctions „se comportant régulièrement" au vaisinage de $x = 0$ ou $x = \infty$.

3. On en a donné aussi les solutions.

J. Karamata a donné un contreexemple montrant que, si l'on ne se limite pas aux fonctions „se comportant régulièrement", des fonctions caractéristiques correspondant à une valeur caractéristique il en existe en nombre infini.

L'équation intégrale a aussi sa signification physique. Si par $\theta(x,t)$ on donne la répartition de chaleur dans un conducteur linéaire illimité aux conditions initiales suivantes:

$$\theta(x,0) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0\,, \end{cases}$$

te les „conditions limites"

$$\theta(0,t) = \frac{\lambda}{2} f(x)\,,$$

l'équation intégrale donne alors la fonction $f(x)$.