Зборник радова С.А.Н. XXXV — Математички институт С.А.Н. књ. 3, 1953
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences XXXV
Institut Mathématique № 3, 1953

МИОДРАГ ТОМИЋ

О ЈЕДНОМ СТАВУ Л. БЕРВАЛДА

1. У свом раду [1], као специјалан случај једног оптег става ([1] став 2, стр. 67, види такође [5]) Л. Бервалд је доказао овај став, који садржи познати Какејев став:

Ако коефицијенти реалног полинома

$$f(x)=c_0+c_1 x+c_2 x^2+\dots+c_n x^n\,, \tag{1}$$

задовољавају неједначине

$$\begin{gathered} 0>c_0>c_1>\dots>c_{k-1}\,, \\ c_k>c_{k-1}>\dots>c_n\,, \\ 0\leqslant k\leqslant n+1\,,\quad c_{-1}=c_{n+1}=0\,, \end{gathered} \tag{2}$$

тада полином $f(x)$ има на јединичном кругу највише просту нулу $x=1$, у унутрашњости јединичног круга k или $k-1$ нула према томе да ли је $f(1)>$ или $\leqslant 0$ ([1] став 3, стр. 70).

За доказ свих ставова ове врсте поменути аутор користи више помоћних ставова, између осталог један Фејеров став ([1] Hilfssatz 1, стр. 62—63) који се односи на косинусне полиноме са конвексним коефицијентима.

Овде ћемо доказати овај став користећи један прост геометриски принцип који смо и раније употребљавали за доказ сличних ставова [3], [4]. Сем тога користим још и чињеницу да су *нуле полинома непрекидне функције коефицијената.*

Истим геометриским принципом доказаћемо и следећи став А. Брауера ([2], став 2) који не следи из Бервалдових ставова:

Полином

$$f(x)=x^n-(a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\dots+a_n)\,, \tag{8}$$

где су a_i цели коефицијенти који задовољавају услове

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\dots\geqslant a_n>0\,, \tag{4}$$

има све нуле сем једне у јединичном кругу.

Преко једног става О. Перона, А. Брауер [2] изводи из овог става да је *полином* (3) *са целим рационалним коефицијентима који задовољавају* (4), *несводљив у рационалном или квадратном имагинарном пољу*.

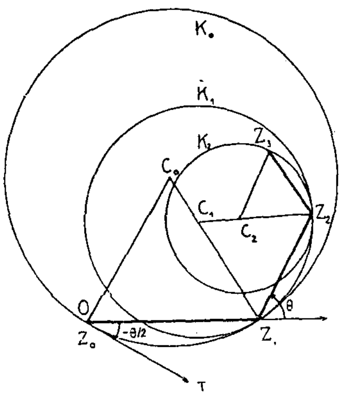
2. *Геометриска интерпретација и њене особине* [3], [4]:

А. Нека су

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0, \tag{5}$$

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{\nu\theta i}, \quad n = 0, 1, \quad 0 < \theta \leqslant \pi, \tag{6}$$

K_ν кругови из чијих се тачака дуж $\overline{z_\nu z_{\nu+1}}$ види под углом $\theta/2$.



Сл. 1

Тада је (в. сл. 1)

1^0 $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_n$.

2^0 Тангента у тачки z_n на круг K_n заклапа угао $-\theta/2$ са $\overline{z_{n-1} z_n}$. Специјално тангента у почетку z_0, чини угао $-\theta/2$ са реалном осом.

В. На исти начин се образује систем кругова и изводе њихове особине 1^0 и 2^0 ако је

$$0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n.$$

У овом случају биће, например, особина 1^0 изражена са

1^0 $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n$.

3. *Доказ Бервалдова става.*

Написаћемо (1) са условима (2) у облику

$$-f(x) = -c_0 - c_1 x - \ldots - c_{k-1} x^{k-1} - x^k (c_k + c_{k+1} x + \ldots + c_n x^{n-k}).$$

Због првог услова (2) према В 1^0 за $x = e^{\theta i}$ $(\theta \neq 0)$ збир

$$-c_0 - c_1 x - \ldots - c_{k-1} x^{k-1},$$

налази се у систему кругова $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_{k-1}$, односно на кругу K_{k-1} (в. сл. 2).

Због другог од услова (2) за $x = e^{\theta i}$ $(\theta \neq 0)$ вектор

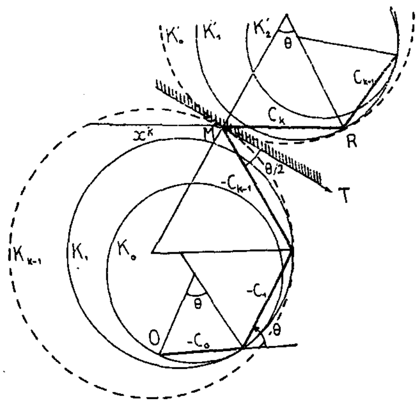
$$-x^k (c_k + c_{k+1} x + \ldots + c_n x^{n-k})$$

је у систему кругова $K'_0 \supset K'_1 \supset \ldots \supset K'_{n-k}$. Кругови K_{k-1} и K'_0 имају заједничку тангенту $\overrightarrow{MT}$, тј. додирују се споља (в. сл. 2).

Ово следи из A 2⁰ и B 2⁰. Отуда је $f(e^{\theta i}) \neq 0$ за $0 < \theta \leqslant \pi$, јер је крај вектора $f(e^{\theta i})$ увек изнад $\overrightarrow{MT}$, тј. изван круга K_0 (на коме лежи 0). Нека је сада, например, $f(1) > 0$. Ако на непрекидан начин првих k коефицијената c_0, $c_1, \dots c_{k-1}$ теже нули, а при томе услови (2) остају стално испуњени следи да $f(x)$ има $n-k$ нула изван круга $|x|=1$. У ствари, тада

$$-f(x) \to -x^k (c_k + c_{k+1} x + \dots + c_n x^{n-k}),$$

а овај последњи полином има према Какеја ставу [3] $n-k$ нула ван $|x|=1$, па је то случај и у почетном положају (где је $f(x)$ дато са (1)). Ово следи из чињенице да је услов (2) по претпоставци стално испуњен, тако да ни једна нула приликом варијације c_ν $(\nu=0, 1, 2, \dots, k-1)$ не може доћи на круг $|x|=1$ догод је $\theta \neq 0$. (За свако $\theta \neq 0$ и c_ν постоји слика 2.) Сем тога, када c_ν, $\nu = 0, 1, 2, \dots, k-1$ теже нули (например монотоно) биће стално $-f(1) < 0$ као у почетном положају, па нуле не могу прећи ни кроз реалну осу. $f(x)$ има још једну реалну нулу у (0,1) ако је $f(1) > 0$, што се непосредно види из $f(0) = c_0 < 0$ и $f(1) > 0$.



Сл. 2

Ако је $f(1) \leqslant 0$, резоновање је потпуно исто, само треба пустити да последњих $n-k$ коефицијената $c_k, c_{k+1}, \dots, c_{n-k}$ теже непрекидно нули.

Доказ Брауерова става. За $\theta \neq 0$, $|x| \geqslant 1$ $(x = |x| e^{\theta i})$ лако се види да је $\varphi(x)$ дато са (3) $\neq 0$. Довољно је да $\varphi(x)$ напишемо у облику

$$-\varphi(x) = a_n + \dots + a_1 x^{n-1} - x^n.$$

Први збир овог израза налази се у систему кругова (сл. 2) K_0, $K_1, \dots, K_{n-1}$, који се могу и сви поклапати (ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$), а члан $-x^n$ на правој $\overline{MR}$, дакле изван K_0. Тиме је доказано да је $\varphi(x) \neq 0$ за $\theta \neq 0$ и $|x| \geqslant 1$. Функција $\varphi(x)/x^n$ има само један реалан корен у $(1, \infty)$, јер $\varphi(x)/x^n \to 1$ за $x \to \infty$ и $\varphi(1) < 0$ (јер су a_i бројеви $\neq 0$) и најзад извод од $\{\varphi(x)/x^n\}$ је позитиван за $x > 0$. Дакле, $(n-1)$ корена од $\varphi(x)$ су у кругу $|x| = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Berwald — Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. *Math. Zeit.* **37** (1932), 61—76.

[2] A. Brauer — On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle. *Math. Nachr.* **4** (1950/51), 250—257.

[3] M. Tomić — Généralisation et démonstration géometrique de certaines théorèmes de Fejér et Kakeya. *Publ. de l'Inst. Math. de l'Acad. Serbe de Sci.* **2** (1848), 146—154.

[4] ———— О тригонометриским збировима. *Зборник радова Мат. института* **2** (1952), 13—52.

[5] M. Marden — The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, New York 1949.

SUR UN THÉORÈME DE L. BERWALD

par

MIODRAG TOMIĆ

En utilisant une méthode géometrique élémentaire, déjà exposée dans [**3**] et [**4**], on déduit une simple démonstration du suivant théorème de L. Berwald ([**1**] th. 3, p. 70):

Si les coefficients d'un polynôme (1) *satisfont aux conditions* (2) *alors* (1) *possède sur la circonférence du cercle d'unité au plus un zéro simple* $x=1$ *et dans le circle d'unité* k *ou* $k-1$ *zéros suivant que* $f(1) > ou \leqslant 0$.

La même méthode géometrique donne immediatement le suivant héorème de A. Brauer ([**2**], th. 2):

Le polynôme (3) *dont les coefficients sont des nombres entiers satisfaisant aux* (4), *a tous ces zéros, à l'exception d'un, dans le cercle d'unité.*

La démonstration du théorème de L. Berwald éxige encore le ait bien connu, que les zéros d'un polynôme sont des fonctions continues de ses coefficients.